This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06910477 0

Leonhard Euler's

vollständige Anleitung

zur

Integralrechnung.

Aus dem Lateinischen ins Deutsche übersetzt

von

Joseph Salomon,

k. k. Professor.

Zweyter Band,

welcher die Materie, aus einer gegebenen Relation der Differenzialien des zweyten oder eines höhern Grades Functionen einer einzigen Veränderlichen zu finden, behandelt.

Wien.

Gedruckt und im Verlage bey Carl Gerold.

1829.

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY

ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATIONS

Inhalt des zweyten Bandes.

Erſter Abſchnitt.

Von der Auflöſung der Differenzialgleichungen des zweyten Grades, welche bloß zwey Variablen enthalten.

Kapitel I.

Seite

Von der Integration der einfachen Differenzialformeln des zweyten Grades 3

Kapitel II.

Von den Differenzialgleichungen des zweyten Grades, in welchen die eine der beyden Veränderlichen nicht erſcheint 22

Kapitel III.

Von den homogenen Differenzialgleichungen des zweyten Grades, und von jenen, welche ſich auf dieſe Form zurückleiten laſſen . . 47

Kapitel IV.

Von den Differenzialgleichungen des zweyten Grades, in welchen die eine der beyden Veränderlichen nur eine Dimenſion hat 73

Kapitel V.

Von der Integration der Differenzialgleichungen des zweyten Grades, bey welchen die eine Veränderliche den erſten Grad nicht überſteigt, mittelſt Factoren 94

Kapitel VI.

Von der Integration anderer Differenzialgleichungen des zweyten Grades mittelſt ſchicklicher Factoren 121

Kapitel VII.

Von der Auflöſung der Differenzialgleichung $d^2y + nx^n y dx^2 = o$ mittelſt unendlicher Reihen 144

Kapitel VIII.

Von der Auflöſung anderer Differenzialgleichungen des zweyten Grades mittelſt unendlicher Reihen 176

Kapitel IX.

Von der Transformation der Differenzialgleichungen des zweyten Grades von der Form $L d^2y + M dx dy + N y dx^2 = o$ . . . 201

Kapitel X.

Seite

Von der Conſtruction der Differenzialgleichungen des zweyten Grades mittelſt der Quadratur der Curven 219

Kapitel XI.

Von der Conſtruction der Differenzialgleichungen des zweyten Grades, gegründet auf ihre Auflöſung mittelſt unendlicher Reihen . . . 245

Kapitel XII.

Von der näherungsweiſen Integration der Differenzialgleichungen des zweyten Grades 271

Zweyter Abſchnitt.

Von der Auflöſung der Differenzialgleichungen des dritten und der höhern Grade, welche bloß zwey Veränderliche enthalten.

Kapitel I.

Seite

Von der Integration der einfachen Differenzialformeln des dritten oder eines höhern Grades 287

Kapitel II.

Von der Auflöſung der Differenzialgleichungen von der Form

$$Ay + B \cdot \frac{dy}{dx} + C \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + D \cdot \frac{d^3y}{dx^3} + E \cdot \frac{d^4y}{dx^4} + \ldots = 0,$$

bey welchen das Element dx conſtant genommen iſt 299

Kapitel III.

Von der Integration der Differenzialgleichungen von der Form

$$X = Ay + \frac{B\,dy}{dx} + \frac{C\,d^2y}{dx^2} + \frac{D\,d^3y}{dx^3} + \ldots \quad . \quad 323$$

Kapitel IV.

Anwendung der im vorigen Kapitel gelehrten Integrationsmethode auf Beyſpiele 363

Kapitel V.

Von der Integration der Differenzialgleichungen von der Form

$$X = Ay + \frac{Bx\,dy}{dx} + \frac{Cx^2\,d^2y}{dx^2} + \frac{Dx^3\,d^3y}{dx^3} + \frac{Ex^4\,d^4y}{dx^4} + \ldots \quad 390$$

Erstes Buch

der

Integralrechnung.

Zweyter Theil. Erster Abschnitt.

Zweyter Theil,

oder die Methode, aus einer gegebenen Relation der Differenzialien des zweyten oder eines höhern Grades Functionen einer einzigen Veränderlichen zu bestimmen.

Erster Abschnitt.

Von der Auflösung der Differenzialgleichungen des zweyten Grades, welche bloß zwey Variabeln enthalten.

Kapitel I.

Von der Integration der einfachen Differenzialformeln des zweyten Grades.

Erklärung.

§. 706. Wenn x und y veränderliche Größen bezeichnen, und man setzt $dy = pdx$ und $dp = qdx$, so heißt jede Gleichung, welche eine Relation zwischen den Größen x, y, p und q festsetzt, eine Differenzialgleichung des zweyten Grades zwischen den zwey Veränderlichen x und y.

Zusatz 1.

§. 707. So wie also der Buchstabe p das Verhältniß der Differenzialien des ersten Grades bezeichnet, weil $p = \frac{dy}{dx}$ ist, eben so drückt auch der Buchstabe $q = \frac{dp}{dx}$ das Verhältniß der Differenzialien des zweyten Grades aus. Denn betrachtet man, wie es

gewöhnlich zu geschehen pflegt, das Element dx als constant, so wird $dp = \frac{d^2y}{dx}$ und daher $q = \frac{d^2y}{dx^2}$.

Zusatz 2.

§. 708. Wenn also in der vorgelegten Gleichung der Buchstabe q erscheint, so ist dieß eine Differenzialgleichung des zweyten Grades; denn wäre q nicht vorhanden, sondern würde bloß die Größe p vorkommen, so wäre die Gleichung nur eine Differenzialgleichung des ersten Grades; würde aber weder p noch q in derselben erscheinen, so hätte man bloß eine Gleichung zwischen x und y, und man hat weiter nichts zu suchen.

Zusatz 3.

§. 709. Ist demnach irgend eine Gleichung zwischen x und y, die auch noch die Größen $p = \frac{dy}{dx}$ und $q = \frac{dp}{dx}$ mit sich führt, gegeben, so handelt es sich um eine Methode, zwischen x und y eine Relation aufzufinden, aus welcher hervorgeht, was y für eine Function von x sey, oder umgekehrt.

Anmerkung 1.

§. 710. Führen wir auf diese Art den Buchstaben q in die Rechnung ein, so wird bey den Differenzialgleichungen des zweyten Grades die Bedingung, nach welcher jedes Differenzial des ersten Grades gewöhnlich als constant genommen wird, aufgehoben; denn da dieselben bloß auf endliche Größen zurückgeführt werden, durch welche das Verhältniß der Differenzialien des ersten Grades ausgedrückt wird, so kann man ein Differenziale nicht einmahl als constant betrachten. Wenn also die Differenzialgleichungen des zweyten Grades nach der gewöhnlichen Verfahrungsart so dargestellt werden, daß jedes Differenziale als constant betrachtet wird, so wird durch die Einführung der Größen $p = \frac{dy}{dx}$ und $q = \frac{dp}{dx}$, die Art der Differenzialien ganz aufgehoben, weil die Gleichung dann nur endliche Größen enthält. Eben so kann man auch umgekehrt eine zwischen den endlichen Größen x, y, p, q gegebene Gleichung auf die gewöhnliche Form auf unendlich viele Arten zurückführen, je nachdem man immer ein anderes Differenziale als constant betrachtet, und demnach stimmen alle diese, der Form nach von einander verschiedenen Gleichungen, mit einander

vollkommen überein; ja man kann eine vorgelegte Gleichung auf die gewöhnliche Form sogar dann noch bringen, wenn gar kein Differenziale als constant betrachtet wird.

Anmerkung 2.

§. 711. Wir werden also zuerst in der Kürze zeigen müssen, wie man eine auf gewöhnliche Art durch Differenzialien des zweyten Grades ausgedrückte Gleichung auf unsere Form zurückführen könne, welches Differenziale auch immer als constant angenommen werden mag. Sey ds das als unveränderlich betrachtete Differenziale, dessen Verhältniß zu dx durch p, weil $\frac{dy}{dx} = p$ ist, und vielleicht durch die Veränderlichen x und y selbst gegeben wird; man setze also $ds = v\,dx$, damit v eine endliche Größe werde. Da nun in der Gleichung die Ausdrücke d^2x und d^2y vorkommen, oder wenigstens einer derselben erscheint, so schreibe man

$$ds \,.\, d \,.\, \frac{dx}{ds} \text{ statt } d^2x, \text{ weil } ds \,.\, d \,.\, \frac{dx}{ds} = d^2x$$

wird, indem ds constant ist; man erhält also

$$d^2x = ds \,.\, d \,.\, \frac{1}{v} = -\frac{ds\,dv}{v^2}.$$

Schreibt man statt d^2y auf dieselbe Art

$$ds \,.\, d \,.\, \frac{dy}{ds} = ds \,.\, d \,.\, \frac{p}{v},$$

so findet man

$$d^2y = \frac{ds\,(v\,dp - p\,dv)}{v^2}.$$

Weil demnach v durch p, x und y gegeben ist, so erhält man

$$dv = M\,dx + N\,dy + P\,dp = dx\,(M + Np + Pq),$$

indem $dp = q\,dx$ ist, und so wird

$$d^2x = -\frac{dx^2}{v}\,(M + Np + Pq), \text{ und}$$

$$d^2y = \frac{dx^2}{v}\,(qv - Mp - Np^2 - Ppq).$$

Werden nun diese Werthe für d^2x und d^2y substituirt, so werden in der Gleichung nur noch Differenzialien des ersten Grades erscheinen, und wenn diese alle durch dx ausgedrückt werden, so wird die Gleichung durch Division von den Differenzialien gänzlich befreyt seyn.

Umgekehrt wird eine ſolche, zwiſchen x, y, p und q gegebene Gleichung, wenn irgend ein Element ds als conſtant betrachtet wird, auf die gewöhnliche Form zurückgeführt werden, wenn man erſtlich ſtatt p überall $\frac{dy}{dx}$ ſchreibt, ſtatt q aber den Werth

$$\frac{1}{dx} d \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3},$$

wobey aber noch auf kein conſtantes Element Rückſicht genommen wurde. Weil aber $ds = v\,dx$ conſtant iſt, ſo erhält man überdieß die Gleichung $v\,d^2x + dv\,dx = 0$; oder weil

$$dv = M\,dx + N\,dy + P\,d \cdot \frac{dy}{dx} \text{ iſt,}$$

$$v\,d^2x + M\,dx^2 + N\,dx\,dy + \frac{P\,[dx\,d^2y - dy\,d^2x]}{dx} = 0,$$

wo man nach Belieben entweder d^2x oder d^2y beſtimmen kann; wird aber keine dieſer Größen beſtimmt, ſo laſſen ſich unendlich viele gleichgeltende Ausdrücke darſtellen.

Anmerkung 3.

§. 712. Es fällt demnach hier der Vorzug der endlichen Form, auf welche wir die Differenzialgleichungen des zweyten Grades zurückführen, vor der gewöhnlichen Darſtellungsweiſe derſelben ganz beſonders in die Augen, weil dieſelbe Gleichung bey der gewöhnlichen Methode unendlich vieler Formen fähig wird, wenn man bald dieſes bald jenes Element als conſtant betrachtet, während nach unſerer Methode dieſelbe Gleichung immer nur auf eine einzige Form zurückgebracht wird. Wenn alſo nach unſerer Darſtellungsart verſchiedene Gleichungen zum Vorſchein kommen ſollten, ſo drücken dieſe ganz zuverläßig auch verſchiedene, zwiſchen x und y beſtehende Relationen aus, da im Gegentheile nach der gewöhnlichen Methode die verſchiedenartigſten Differenzialgleichungen des zweyten Grades immer eine und dieſelbe Relation angeben können, und gewöhnlich iſt es ſchwierig, aus denſelben gerade die für die Auflöſung am meiſten brauchbare auszuwählen.

Weil es ſich nun hier um eine Methode handelt, nach welcher man, wenn irgend eine Gleichung zwiſchen den vier Größen x, y, p und q gegeben iſt, die zwiſchen den beyden Veränderlichen x und y beſtehende Relation finden könne, ſo wollen wir, da dieſes Problem die menſchlichen Kräfte zu überſteigen ſcheint, von den einfachſten Fällen ausgehen. Dieſe treten aber offenbar dann ein, wenn in der vor-

gelegten Gleichung nur zwey von jenen Größen vorkommen, nämlich entweder bloß x und q, oder y und q, oder p und q, d. i. wenn q bloß einer Function von x, oder von y, oder von p gleich wird. Mit diesen Fällen werden wir uns, unserem Plane gemäß, in diesem Kapitel beschäftigen.

Erklärung.

§. 713. Eine Differenzialformel des zweyten Grades heißt einfach, wenn für $dy = pdx$ und $dp = qdx$ die Größe q bloß eine Function von x, oder von y, oder von p bezeichnet.

Zusatz 1.

§. 714. Es gibt demnach drey Arten von einfachen Differenzialformeln des zweyten Grades, deren Auflösung wir in diesem Kapitel lehren werden; es erscheint nämlich q entweder bloß als eine Function von p, oder von x, oder von y.

Zusatz 2.

§. 715. Wenn also X eine Function von x, Y eine Function von y und P eine Function von p allein bezeichnet, so sind die drey Gattungen dieser einfachen Formeln 1) $q = X$, 2) $q = Y$, 3) $q = P$, in welchen der einfachste Fall $q = \text{Const.}$ enthalten ist.

Zusatz 3.

§. 716. Wenn wir diese Formeln auf die gewöhnliche Art ausdrücken wollen, so wird, weil $q = \frac{dp}{dx} = \frac{1}{dx} d.\frac{dy}{dx}$ ist, $q = \frac{d^2y}{dx^2}$, wenn dx als constant angenommen wird, oder $q = -\frac{dy\,d^2x}{dx^3}$, wenn man das Element dy als unveränderlich ansieht, oder endlich $q = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}$, wenn kein Element als constant betrachtet wird, wodurch die Einfachheit jener Formeln außerordentlich verliert.

Zusatz 4.

§. 717. Wenn das Element $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, wie es häufig geschieht, constant genommen wird, so erhält man $dx\,d^2x + dy\,d^2y = 0$, und daher geht der letzte Werth von q, weil $d^2y = -\frac{dx\,d^2x}{dy}$ ist,

über in $q = -\frac{(dx^2 + dy^2)\,d^2x}{dx^3\,dy}$, oder er verwandelt sich, weil $d^2x = -\frac{dy\,d^2y}{dx}$ ist, in $q = \frac{(dx^2 + dy^2)\,d^2y}{dx^4}$.

Anmerkung.

§. 718. Verbannen wir also die gewöhnliche Darstellungsweise der Differenzialgleichungen des zweyten Grades gänzlich, weil nach ihr Ausdrücke, die an und für sich ziemlich einfach sind, in sehr verwickelten Formen erscheinen können, und bedienen wir uns lieber der hier festgesetzten Bezeichnungsart, auf welche wir die Lehre von der Auflösung solcher einfachen Formeln gründen wollen.

Aufgabe 93.

§. 719. Die zwischen den Veränderlichen x und y bestehende Relation zu finden, wenn für $dy = p\,dx$ und $dp = q\,dx$ die Größe q eine beliebige Function von p bezeichnet.

Auflösung.

Sey also $q = P$, wo P eine beliebige Function von p bezeichnet; weil nun $q = \frac{dp}{dx}$ ist, so wird $dp = P\,dx$, und daher $dx = \frac{dp}{P}$, und $dy = p\,dx = \frac{p\,dp}{P}$, woraus wir durch Integration erhalten

$$x = a + \int \frac{dp}{P} \quad \text{und} \quad y = b + \int \frac{p\,dp}{P},$$

so daß sowohl x als y durch dieselbe neue Veränderliche p bestimmt wird. Da endlich durch die doppelte Integration zwey neue constante Größen a und b eingeführt wurden, so ist dieses Integrale für das vollständige zu halten.

Zusatz 1.

§. 720. Wenn wir die Gleichung $q = P$, deren Integration wir hier gelehrt haben, auf die gewöhnliche Form bringen, indem wir dx als constant betrachten, so erhalten wir, weil $q = \frac{d^2y}{dx^2}$ ist, $d^2y = dx^2 f\left(\frac{dy}{dx}\right)$, welches eine Differenzialgleichung des zweyten Grades ist, in der die Veränderlichen x und y nicht erscheinen.

Zuſatz 2.

§. 721. Eine ſolche Form kommt auch zum Vorſchein, wenn das Element dy, oder ein anderer Differenzialausdruck, welcher die Veränderlichen x und y nicht enthält, wie z. B. $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, als conſtant betrachtet wird. Es wird ſich demnach auf dieſe Art jede Differenzialgleichung des zweyten Grades, in welcher die Veränderlichen x und y nicht erſcheinen, integriren laſſen.

Zuſatz 3.

§. 722. Wird aber ein ſolches Element, wie $y\,dx - x\,dy$, als conſtant betrachtet, ſo daß $y\,d^2x - x\,d^2y = 0$, ſo wird, weil

$$q = \frac{1}{dx}\,d \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3} \text{ iſt,}$$

$$q = \frac{(y\,dx - x\,dy)\,d^2x}{x\,dx^3} = \frac{(y\,dx - x\,dy)\,d^2y}{y\,dx^3},$$

welcher Ausdruck integrabel ſeyn wird, wenn er eine Function von $p = \frac{dy}{dx}$ bezeichnet.

Zuſatz 4.

§. 723. Wenn P eine conſtante Größe ſeyn ſollte, ſo daß $q = f$ wird, ſo erhält man

$$x = a + \frac{p}{f} \text{ und } y = b + \frac{p^2}{2f},$$

und daher wird

$$y = b + \frac{f}{2}(x - a)^2, \text{ oder}$$

$$y = \tfrac{1}{2}fx^2 - afx + \tfrac{1}{2}a^2f + b,$$

oder wenn die Form der Conſtanten geändert wird,

$$y = \tfrac{1}{2}fx^2 + Cx + D.$$

Anmerkung.

§. 724. Da nämlich eine Differenzialgleichung des zweyten Grades eine doppelte Integration erfordert, ſo werden, wenn jede derſelben in der ganzen Ausdehnung ausgeführt wird, zwey neue willkürliche Conſtanten eingeführt, und hierauf gründet ſich die Beurtheilung, ob ein ſolches Integrale ein completes ſey. Denn ſo wie die vollſtändige Integration der Differenzialgleichungen des erſten Grades eine willkürliche Conſtante in die Integralgleichung einführt, eben ſo wer-

Leonhard Euler's

vollständige Anleitung

zur

Integralrechnung.

Aus dem Lateinischen ins Deutsche übersetzt

von

Joseph Salomon,

k. k. Professor.

Zweyter Band,

welcher die Materie, aus einer gegebenen Relation der Differenzialien des zweyten oder eines höhern Grades Functionen einer einzigen Veränderlichen zu finden, behandelt.

Wien.

Gedruckt und im Verlage bey Carl Gerold.

1829.

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY

ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATIONS

Inhalt des zweyten Bandes.

Erſter Abſchnitt.

Von der Auflöſung der Differenzialgleichungen des zweyten Grades, welche bloß zwey Variablen enthalten.

Kapitel I.

Von der Integration der einfachen Differenzialformeln des zweyten Grades . . . . . Seite 3

Kapitel II.

Von den Differenzialgleichungen des zweyten Grades, in welchen die eine der beyden Veränderlichen nicht erſcheint 22

Kapitel III.

Von den homogenen Differenzialgleichungen des zweyten Grades, und von jenen, welche ſich auf dieſe Form zurückleiten laſſen . . 47

Kapitel IV.

Von den Differenzialgleichungen des zweyten Grades, in welchen die eine der beyden Veränderlichen nur eine Dimenſion hat 73

Kapitel V.

Von der Integration der Differenzialgleichungen des zweyten Grades, bey welchen die eine Veränderliche den erſten Grad nicht überſteigt, mittelſt Factoren 94

Kapitel VI.

Von der Integration anderer Differenzialgleichungen des zweyten Grades mittelſt ſchicklicher Factoren 121

Kapitel VII.

Von der Auflöſung der Differenzialgleichung $d^2y + nx^n y dx^2 = o$ mittelſt unendlicher Reihen 144

Kapitel VIII.

Von der Auflöſung anderer Differenzialgleichungen des zweyten Grades mittelſt unendlicher Reihen 176

Kapitel IX.

Von der Transformation der Differenzialgleichungen des zweyten Grades von der Form $L d^2y + M dx dy + N y dx^2 = o$ . . . 201

Kapitel X.

Seite

Von der Construction der Differenzialgleichungen des zweyten Grades mittelst der Quadratur der Curven 219

Kapitel XI.

Von der Construction der Differenzialgleichungen des zweyten Grades, gegründet auf ihre Auflösung mittelst unendlicher Reihen . . . 245

Kapitel XII.

Von der näherungsweisen Integration der Differenzialgleichungen des zweyten Grades 271

Zweyter Abschnitt.

Von der Auflösung der Differenzialgleichungen des dritten und der höhern Grade, welche bloß zwey Veränderliche enthalten.

Kapitel I.

Seite

Von der Integration der einfachen Differenzialformeln des dritten oder eines höhern Grades 287

Kapitel II.

Von der Auflösung der Differenzialgleichungen von der Form

$$Ay + B \cdot \frac{dy}{dx} + C \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + D \cdot \frac{d^3y}{dx^3} + E \cdot \frac{d^4y}{dx^4} + \ldots = 0,$$

bey welchen das Element dx constant genommen ist 299

Kapitel III.

Von der Integration der Differenzialgleichungen von der Form

$$X = Ay + \frac{B\,dy}{dx} + \frac{C\,d^2y}{dx^2} + \frac{D\,d^3y}{dx^3} + \ldots \quad . \quad 323$$

Kapitel IV.

Anwendung der im vorigen Kapitel gelehrten Integrationsmethode auf Beyspiele 363

Kapitel V.

Von der Integration der Differenzialgleichungen von der Form

$$X = Ay + \frac{B\,x\,dy}{dx} + \frac{C\,x^2\,d^2y}{dx^2} + \frac{D\,x^3\,d^3y}{dx^3} + \frac{E\,x^4\,d^4y}{dx^4} + \ldots \quad 390$$

Erſtes Buch

der

Integralrechnung.

Zweyter Theil. Erſter Abſchnitt.

Zweyter Theil,

oder die Methode, aus einer gegebenen Relation der Differenzialien des zweyten oder eines höhern Grades Functionen einer einzigen Veränderlichen zu bestimmen.

Erster Abschnitt.

Von der Auflösung der Differenzialgleichungen des zweyten Grades, welche bloß zwey Variabeln enthalten.

Kapitel I.

Von der Integration der einfachen Differenzialformeln des zweyten Grades.

Erklärung.

§. 706. Wenn x und y veränderliche Größen bezeichnen, und man setzt $dy = pdx$ und $dp = qdx$, so heißt jede Gleichung, welche eine Relation zwischen den Größen x, y, p und q festsetzt, eine Differenzialgleichung des zweyten Grades zwischen den zwey Veränderlichen x und y.

Zusatz 1.

§. 707. So wie also der Buchstabe p das Verhältniß der Differenzialien des ersten Grades bezeichnet, weil $p = \frac{dy}{dx}$ ist, eben so drückt auch der Buchstabe $q = \frac{dp}{dx}$ das Verhältniß der Differenzialien des zweyten Grades aus. Denn betrachtet man, wie es

gewöhnlich zu geschehen pflegt, das Element dx als constant, so wird $dp = \frac{d^2y}{dx}$ und daher $q = \frac{d^2y}{dx^2}$.

Zusatz 2.

§. 708. Wenn also in der vorgelegten Gleichung der Buchstabe q erscheint, so ist dieß eine Differenzialgleichung des zweyten Grades; denn wäre q nicht vorhanden, sondern würde bloß die Größe p vorkommen, so wäre die Gleichung nur eine Differenzialgleichung des ersten Grades; würde aber weder p noch q in derselben erscheinen, so hätte man bloß eine Gleichung zwischen x und y, und man hat weiter nichts zu suchen.

Zusatz 3.

§. 709. Ist demnach irgend eine Gleichung zwischen x und y, die auch noch die Größen $p = \frac{dy}{dx}$ und $q = \frac{dp}{dx}$ mit sich führt, gegeben, so handelt es sich um eine Methode, zwischen x und y eine Relation aufzufinden, aus welcher hervorgeht, was y für eine Function von x sey, oder umgekehrt.

Anmerkung 1.

§. 710. Führen wir auf diese Art den Buchstaben q in die Rechnung ein, so wird bey den Differenzialgleichungen des zweyten Grades die Bedingung, nach welcher jedes Differenzial des ersten Grades gewöhnlich als constant genommen wird, aufgehoben; denn da dieselben bloß auf endliche Größen zurückgeführt werden, durch welche das Verhältniß der Differenzialien des ersten Grades ausgedrückt wird, so kann man ein Differenziale nicht einmahl als constant betrachten. Wenn also die Differenzialgleichungen des zweyten Grades nach der gewöhnlichen Verfahrungsart so dargestellt werden, daß jedes Differenziale als constant betrachtet wird, so wird durch die Einführung der Größen $p = \frac{dy}{dx}$ und $q = \frac{dp}{dx}$, die Art der Differenzialien ganz aufgehoben, weil die Gleichung dann nur endliche Größen enthält. Eben so kann man auch umgekehrt eine zwischen den endlichen Größen x, y, p, q gegebene Gleichung auf die gewöhnliche Form auf unendlich viele Arten zurückführen, je nachdem man immer ein anderes Differenziale als constant betrachtet, und demnach stimmen alle diese, der Form nach von einander verschiedenen Gleichungen, mit einander

vollkommen überein; ja man kann eine vorgelegte Gleichung auf die gewöhnliche Form sogar dann noch bringen, wenn gar kein Differenziale als constant betrachtet wird.

Anmerkung 2.

§. 711. Wir werden also zuerst in der Kürze zeigen müssen, wie man eine auf gewöhnliche Art durch Differenzialien des zweyten Grades ausgedrückte Gleichung auf unsere Form zurückführen könne, welches Differenziale auch immer als constant angenommen werden mag. Sey ds das als unveränderlich betrachtete Differenziale, dessen Verhältniß zu dx durch p, weil $\frac{dy}{dx} = p$ ist, und vielleicht durch die Veränderlichen x und y selbst gegeben wird; man setze also $ds = v\,dx$, damit v eine endliche Größe werde. Da nun in der Gleichung die Ausdrücke d^2x und d^2y vorkommen, oder wenigstens einer derselben erscheint, so schreibe man

$$ds \,.\, d \,.\, \frac{dx}{ds} \text{ statt } d^2x, \text{ weil } ds \,.\, d \,.\, \frac{dx}{ds} = d^2x$$

wird, indem ds constant ist; man erhält also

$$d^2x = ds \,.\, d \,.\, \frac{1}{v} = -\frac{ds\,dv}{v^2}.$$

Schreibt man statt d^2y auf dieselbe Art

$$ds \,.\, d \,.\, \frac{dy}{ds} = ds \,.\, d \,.\, \frac{p}{v},$$

so findet man

$$d^2y = \frac{ds\,(v\,dp - p\,dv)}{v^2}.$$

Weil demnach v durch p, x und y gegeben ist, so erhält man

$$dv = M\,dx + N\,dy + P\,dp = dx\,(M + Np + Pq),$$

indem $dp = q\,dx$ ist, und so wird

$$d^2x = -\frac{dx^2}{v}\,(M + Np + Pq), \text{ und}$$

$$d^2y = \frac{dx^2}{v}\,(qv - Mp - Np^2 - Ppq).$$

Werden nun diese Werthe für d^2x und d^2y substituirt, so werden in der Gleichung nur noch Differenzialien des ersten Grades erscheinen, und wenn diese alle durch dx ausgedrückt werden, so wird die Gleichung durch Division von den Differenzialien gänzlich befreyt seyn.

Umgekehrt wird eine solche, zwischen x, y, p und q gegebene Gleichung, wenn irgend ein Element ds als constant betrachtet wird, auf die gewöhnliche Form zurückgeführt werden, wenn man erstlich statt p überall $\frac{dy}{dx}$ schreibt, statt q aber den Werth

$$\frac{1}{dx} d \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3},$$

wobey aber noch auf kein constantes Element Rücksicht genommen wurde. Weil aber $ds = v\,dx$ constant ist, so erhält man überdieß die Gleichung $v\,d^2x + dv\,dx = 0$; oder weil

$$dv = M\,dx + N\,dy + P\,d \cdot \frac{dy}{dx} \text{ ist,}$$

$$v\,d^2x + M\,dx^2 + N\,dx\,dy + \frac{P\,[dx\,d^2y - dy\,d^2x]}{dx} = 0,$$

wo man nach Belieben entweder d^2x oder d^2y bestimmen kann; wird aber keine dieser Größen bestimmt, so lassen sich unendlich viele gleichgeltende Ausdrücke darstellen.

Anmerkung 3.

§. 712. Es fällt demnach hier der Vorzug der endlichen Form, auf welche wir die Differenzialgleichungen des zweyten Grades zurückführen, vor der gewöhnlichen Darstellungsweise derselben ganz besonders in die Augen, weil dieselbe Gleichung bey der gewöhnlichen Methode unendlich vieler Formen fähig wird, wenn man bald dieses bald jenes Element als constant betrachtet, während nach unserer Methode dieselbe Gleichung immer nur auf eine einzige Form zurückgebracht wird. Wenn also nach unserer Darstellungsart verschiedene Gleichungen zum Vorschein kommen sollten, so drücken diese ganz zuverläßig auch verschiedene, zwischen x und y bestehende Relationen aus, da im Gegentheile nach der gewöhnlichen Methode die verschiedenartigsten Differenzialgleichungen des zweyten Grades immer eine und dieselbe Relation angeben können, und gewöhnlich ist es schwierig, aus denselben gerade die für die Auflösung am meisten brauchbare auszuwählen.

Weil es sich nun hier um eine Methode handelt, nach welcher man, wenn irgend eine Gleichung zwischen den vier Größen x, y, p und q gegeben ist, die zwischen den beyden Veränderlichen x und y bestehende Relation finden könne, so wollen wir, da dieses Problem die menschlichen Kräfte zu übersteigen scheint, von den einfachsten Fällen ausgehen. Diese treten aber offenbar dann ein, wenn in der vor-

gelegten Gleichung nur zwey von jenen Größen vorkommen, nämlich entweder bloß x und q, oder y und q, oder p und q, d. i. wenn q bloß einer Function von x, oder von y, oder von p gleich wird. Mit dieſen Fällen werden wir uns, unſerem Plane gemäß, in dieſem Kapitel beſchäftigen.

Erklärung.

§. 713. Eine Differenzialformel des zweyten Grades heißt einfach, wenn für $dy = pdx$ und $dp = qdx$ die Größe q bloß eine Function von x, oder von y, oder von p bezeichnet.

Zuſatz 1.

§. 714. Es gibt demnach drey Arten von einfachen Differenzialformeln des zweyten Grades, deren Auflöſung wir in dieſem Kapitel lehren werden; es erſcheint nämlich q entweder bloß als eine Function von p, oder von x, oder von y.

Zuſatz 2.

§. 715. Wenn alſo X eine Function von x, Y eine Function von y und P eine Function von p allein bezeichnet, ſo ſind die drey Gattungen dieſer einfachen Formeln 1) $q = X$, 2) $q = Y$, 3) $q = P$, in welchen der einfachſte Fall $q = \text{Const.}$ enthalten iſt.

Zuſatz 3.

§. 716. Wenn wir dieſe Formeln auf die gewöhnliche Art ausdrücken wollen, ſo wird, weil $q = \frac{dp}{dx} = \frac{1}{dx} d.\frac{dy}{dx}$ iſt, $q = \frac{d^2y}{dx^2}$, wenn dx als conſtant angenommen wird, oder $q = -\frac{dy\,d^2x}{dx^3}$, wenn man das Element dy als unveränderlich anſieht, oder endlich $q = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}$, wenn kein Element als conſtant betrachtet wird, wodurch die Einfachheit jener Formeln außerordentlich verliert.

Zuſatz 4.

§. 717. Wenn das Element $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, wie es häufig geſchieht, conſtant genommen wird, ſo erhält man $dx\,d^2x + dy\,d^2y = 0$, und daher geht der letzte Werth von q, weil $d^2y = -\frac{dx\,d^2x}{dy}$ iſt,

über in $q = -\frac{(dx^2 + dy^2)\,d^2x}{dx^3\,dy}$, oder er verwandelt sich, weil $d^2x = -\frac{dy\,d^2y}{dx}$ ist, in $q = \frac{(dx^2 + dy^2)\,d^2y}{dx^4}$.

Anmerkung.

§. 718. Verbannen wir also die gewöhnliche Darstellungsweise der Differenzialgleichungen des zweyten Grades gänzlich, weil nach ihr Ausdrücke, die an und für sich ziemlich einfach sind, in sehr verwickelten Formen erscheinen können, und bedienen wir uns lieber der hier festgesetzten Bezeichnungsart, auf welche wir die Lehre von der Auflösung solcher einfachen Formeln gründen wollen.

Aufgabe 93.

§. 719. Die zwischen den Veränderlichen x und y bestehende Relation zu finden, wenn für $dy = p\,dx$ und $dp = q\,dx$ die Größe q eine beliebige Function von p bezeichnet.

Auflösung.

Sey also $q = P$, wo P eine beliebige Function von p bezeichnet; weil nun $q = \frac{dp}{dx}$ ist, so wird $dp = P\,dx$, und daher $dx = \frac{dp}{P}$, und $dy = p\,dx = \frac{p\,dp}{P}$, woraus wir durch Integration erhalten

$$x = a + \int \frac{dp}{P} \quad \text{und} \quad y = b + \int \frac{p\,dp}{P},$$

so daß sowohl x als y durch dieselbe neue Veränderliche p bestimmt wird. Da endlich durch die doppelte Integration zwey neue constante Größen a und b eingeführt wurden, so ist dieses Integrale für das vollständige zu halten.

Zusatz 1.

§. 720. Wenn wir die Gleichung $q = P$, deren Integration wir hier gelehrt haben, auf die gewöhnliche Form bringen, indem wir dx als constant betrachten, so erhalten wir, weil $q = \frac{d^2y}{dx^2}$ ist, $d^2y = dx^2 f\left(\frac{dy}{dx}\right)$, welches eine Differenzialgleichung des zweyten Grades ist, in der die Veränderlichen x und y nicht erscheinen.

Zuſatz 2.

§. 721. Eine ſolche Form kommt auch zum Vorſchein, wenn das Element dy, oder ein anderer Differenzialausdruck, welcher die Veränderlichen x und y nicht enthält, wie z. B. $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, als conſtant betrachtet wird. Es wird ſich demnach auf dieſe Art jede Differenzialgleichung des zweyten Grades, in welcher die Veränderlichen x und y nicht erſcheinen, integriren laſſen.

Zuſatz 3.

§. 722. Wird aber ein ſolches Element, wie $y\,dx - x\,dy$, als conſtant betrachtet, ſo daß $y\,d^2x - x\,d^2y = 0$, ſo wird, weil

$$q = \frac{1}{dx}\,d\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3} \text{ iſt,}$$

$$q = \frac{(y\,dx - x\,dy)\,d^2x}{x\,dx^3} = \frac{(y\,dx - x\,dy)\,d^2y}{y\,dx^3},$$

welcher Ausdruck integrabel ſeyn wird, wenn er eine Function von $p = \frac{dy}{dx}$ bezeichnet.

Zuſatz 4.

§. 723. Wenn P eine conſtante Größe ſeyn ſollte, ſo daß $q = f$ wird, ſo erhält man

$$x = a + \frac{p}{f} \text{ und } y = b + \frac{p^2}{2f},$$

und daher wird

$$y = b + \frac{f}{2}(x - a)^2, \text{ oder}$$

$$y = \tfrac{1}{2}fx^2 - afx + \tfrac{1}{2}a^2f + b,$$

oder wenn die Form der Conſtanten geändert wird,

$$y = \tfrac{1}{2}fx^2 + Cx + D.$$

Anmerkung.

§. 724. Da nämlich eine Differenzialgleichung des zweyten Grades eine doppelte Integration erfordert, ſo werden, wenn jede derſelben in der ganzen Ausdehnung ausgeführt wird, zwey neue willkürliche Conſtanten eingeführt, und hierauf gründet ſich die Beurtheilung, ob ein ſolches Integrale ein completes ſey. Denn ſo wie die vollſtändige Integration der Differenzialgleichungen des erſten Grades eine willkürliche Conſtante in die Integralgleichung einführt, eben ſo wer-

den bey jeder Differenzialgleichung des zweyten Grades zwey neue Constanten im vollständigen Integrale erscheinen; drey oder mehrere beständige Größen aber zeigen sich im completen Integrale einer Differenzialgleichung des dritten oder eines höhern Grades. Die Aufgaben aber, deren Auflösung auf solche Differenzialgleichungen eines höhern Grades leitet, sind ihrer Natur nach so beschaffen, daß die Bestimmung der Auflösung eben so viele Constanten erfordert. So führt die der Gleichung $q = f$, oder wenn dx constant genommen wird, $d^2y = f dx^2$ entsprechende vollständige Integralgleichung

$$y = \tfrac{1}{2} f x^2 + Cx + D$$

zwey neue Constanten C und D mit sich, was sich auch bey den nachfolgenden Beyspielen zeigen wird.

Beyspiel 1.

§. 725. Das vollständige Integrale der Differenzialgleichung des zweyten Grades

$$a d^2y = dx\,dy$$

zu bestimmen, wenn das Element dx als constant betrachtet wird.

Setzt man $dy = p\,dx$ und $dp = q\,dx$, so erhält man

$d^2y = q\,dx^2$, und daher $aq = p$ und $P = \frac{p}{a}$;

man findet also durch Integration

$$x = \int \frac{a\,dp}{p} = C + a\,lp \text{ und}$$

$$y = \int a\,dp = D + ap.$$

Da nun $p = \frac{y - D}{a}$, so wird $x = C + a\,l\frac{y - D}{a}$, welches die vollständige Integralgleichung ist, und die beyden Constanten C und D enthält.

Beyspiel 2.

§. 726. Man betrachte dx als constant, und suche eine solche Gleichung zwischen x und y, daß

$$\frac{(dx^2 + dy^2)\sqrt{dx^2 + dy^2}}{-dx\,d^2y} = a$$

werde.

Wird $dy = pdx$ gesetzt, so wird, weil dx constant ist, $d^2y = dpdx$, und so geht unsere Gleichung über in

$$\frac{(1+p^2)\sqrt{1+p^2}}{-dp} \cdot dx = a;$$

demnach wird

$$dx = \frac{-adp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{und} \quad dy = \frac{-apdp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Wir finden also durch Integration

$$x = A - \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}} \quad \text{und} \quad y = B + \frac{a}{\sqrt{1+p^2}};$$

und hieraus folgern wir

$$(A-x)^2 + (y-B)^2 = a^2.$$

Zusatz.

§. 727. Wenn x und y die rechtwinkligen Coordinaten einer krummen Linie bezeichnen, so drückt die Formel $\frac{(dx^2+dy^2)\sqrt{dx^2+dy^2}}{-dxd^2y}$ den Krümmungshalbmesser derselben aus, damit dieser gleich der Constanten a werde, so bezeichnet die gefundene Integralgleichung einen Kreis, welchem der Halbmesser a entspricht.

Beyspiel 3.

§. 728. Es sey $ds = \sqrt{dx^2+dy^2}$, man betrachte diesen Ausdruck als constant, und suche eine solche Gleichung zwischen x und y, daß $\frac{dsdy}{d^2x} = \frac{adx}{dy}$ werde.

Wird $dy = pdx$ gesetzt, so wird $ds = dx\sqrt{1+p^2}$, und weil ds constant ist,

$$d^2x\sqrt{1+p^2} + \frac{pdxdp}{\sqrt{1+p^2}} = 0 \quad \text{oder} \quad d^2x = \frac{-pdxdp}{1+p^2},$$

daher verwandelt sich unsere vorgelegte Gleichung in

$$\frac{pdx^2\sqrt{1+p^2}}{-pdxdp}(1+p^2) = \frac{a}{p} \quad \text{oder} \quad dx = \frac{-adp}{p(1+p^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\text{und} \quad dy = \frac{-adp}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \text{also} \quad y = D - \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Für diesen Ausdruck aber setze man $p = \frac{1}{r}$, so wird

$$dx = \frac{ar^2dr}{(r^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{adr}{\sqrt{r^2+1}} - \frac{adr}{(r^2+1)^{\frac{3}{2}}};$$

folglich findet man durch Integration

$$x = C - \frac{ar}{\sqrt{1+r^2}} + al\,(r + \sqrt{1+r^2}), \text{ oder}$$

$$x = C - \frac{a}{\sqrt{1+p^2}} + al\,.\,\frac{1+\sqrt{1+p^2}}{p}.$$

Beyspiel 4.

§. 729. Wenn $ds = \sqrt{dx^2+dy^2}$ gesetzt, und als constant betrachtet wird, so soll

$$\frac{ds\,dy}{d^2x} = a \text{ arc. tang. } \frac{dy}{dx}$$

werden.

Wird, wie vorhin, $dy = p\,dx$ gesetzt, so hat man folgende Gleichung zu integriren:

$$\frac{-dx\,(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{dp} = a \text{ arc. tang. } p, \text{ oder}$$

$$dx = \frac{-a\,dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ arc. tang. } p \text{ und } dy = \frac{-ap\,dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ arc. tang. } p.$$

Weil nun d. arc. tang. $p = \frac{dp}{1+p^2}$ ist, so erhält man

$$x = \frac{-ap}{\sqrt{1+p^2}} \text{ arc. tang. } p + a\int \frac{p\,dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ und}$$

$$y = \frac{a}{\sqrt{1+p^2}} \text{ arc. tang. } p - a\int \frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}};$$

und hieraus folgern wir

$$x = C - \frac{a}{\sqrt{1+p^2}} - \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}} \text{ arc. tang. } p \text{ und}$$

$$y = D - \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}} + \frac{a}{\sqrt{1+p^2}} \text{ arc. tang. } p.$$

Zusatz 1.

§. 730. Bezeichnet x die Abscisse und y die Ordinate einer Curve, so muß der Krümmungshalbmesser dem Winkel, welchen die Tangente der Curve mit der Achse bildet, proportional seyn; und hieraus geht hervor, daß diese Curve irgend eine Spirale sey, welche sich um den Scheitel der Coordinaten windet.

Zuſatz 2.

§. 731. Setzt man den Winkel, deſſen Tangente $= p$ iſt, $= \varphi$, ſo wird $p = \text{tang.}\,\varphi$, und daher

$$x = C - a\cos.\varphi - a\varphi\sin.\varphi \text{ und}$$
$$y = D - a\sin.\varphi + a\varphi\cos.\varphi,$$

woraus man folgende Gleichung erhält:

$$x\cos.\varphi + y\sin.\varphi = C\cos.\varphi + D\sin.\varphi - a.$$

Zuſatz 3.

§. 732. Sollen für $\varphi = 0$ beyde Veränderliche x und y verſchwinden, ſo muß man $C = a$ und $D = 0$ ſetzen, und dann wird

$$x = a - a\cos.\varphi - a\varphi\sin.\varphi \text{ und}$$
$$y = -a\sin.\varphi + a\varphi\cos.\varphi,$$

und daher wird, ſo lange der Winkel φ ſehr klein iſt,

$$x = -\tfrac{1}{2}a\varphi^2 + \tfrac{1}{6}a\varphi^4 \text{ und}$$
$$y = -\tfrac{1}{3}a\varphi^3 + \tfrac{1}{10}\varphi^5,$$

alſo wird näherungsweiſe

$$\frac{x^3}{y^2} = -\tfrac{9}{8}a \quad \text{oder} \quad y^2 = \frac{-8x^3}{9a}.$$

Aufgabe 94.

§. 733. Zwiſchen den Veränderlichen x und y eine Relation aufzufinden, wenn für

$$dy = pdx \text{ und } dp = qdx$$

die Größe q irgend eine Function von x wird, welche wir durch X bezeichnen wollen.

Auflöſung.

Da alſo $q = X$ iſt, ſo wird $qdx = dp = Xdx$, und demnach erhalten wir durch Integration $p = \int Xdx + C$, daher finden wir, weil $dy = pdx$ iſt:

$$y = \int dx \int Xdx + Cx + D; \text{ es iſt aber}$$
$$\int dx \int Xdx = x\int Xdx - \int Xxdx,$$

wie von ſelbſt einleuchtet, wenn man wieder die Differenzialien nimmt.

Die vollſtändige Integralgleichung, welche die zwiſchen x und y beſtehende Relation bezeichnet, iſt demnach

$$y = x\int X dx - \int X x dx + Cx + D,$$

und enthält die beyden willkürlichen Constanten C und D. Diese Gleichung wird also algebraisch seyn, wenn die beyden Differenzialformeln Xdx und $Xxdx$ die Integration zulassen.

Zusatz 1.

§. 734. Wenn demnach $q = o$ oder wenn dx als constant betrachtet wird, $d^2y = o$, damit $X = o$ werde, so ist die vollständige Integralgleichung $y = Cx + D$.

Zusatz 2.

§. 735. Die Differenzialgleichungen des zweyten Grades, welche sich auf diese Art integriren lassen, wenn dx als constant betrachtet wird, sind demnach enthalten unter der Form $d^2y = Xdx^2$, und daher gibt die erste Integration $dy = dx\int Xdx + C$, und die zweyte $y = \int dx \int Xdx + Cx + D$.

Zusatz 3.

§. 736. Wenn aber das Differenziale dy constant genommen wird, so findet man, weil $p = \frac{dy}{dx}$ ist, $dp = -\frac{dyd^2x}{dx^2} = qdx$, und die Form der auf diese Art zu integrirenden Gleichungen wird $-dyd^2x = Xdx^3$ seyn.

Zusatz 4.

§. 737. Nimmt man das Element $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ als unveränderlich an, so wird, wegen $dxd^2x + dyd^2y = o$

$$dp = \frac{dxd^2y - dyd^2x}{dx^2} = \frac{-ds^2d^2x}{dx^2dy} = qdx.$$

Es ist demnach $-ds^2d^2x = Xdx^3dy$ die Form der auf diese Weise zu integrirenden Gleichungen, oder auch $ds^2d^2y = Xdx^4$, weil auch $dp = qdx = +\frac{ds^2d^2y}{dx^3}$ ist.

Anmerkung.

§. 738. Man sieht also hier deutlich, wie wichtig es sey, die Differenzialgleichungen des zweyten Grades von der gewöhnlichen Form, wo irgend ein Element als constant angenommen wird, von dieser Bedingung zu befreyen, und sie auf die hier festgesetzte Form zurück-

zuführen. Denn wäre die Gleichung $ds^2 d^2y = X dx^4$ gegeben, bey welcher das Element $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ constant genommen seyn soll, so läßt sich nicht so leicht einsehen, wie man die Integration derselben vornehmen könne. Setzen wir aber nach unserer Methode $dy = p\,dx$, damit $ds = dx\sqrt{1 + p^2}$ und $d^2y = p\,d^2x + dx\,dp$ werde, so nimmt jene Gleichung folgende Form an:

$$dx^2\,(1 + p^2)\,(p\,d^2x + dx\,dp) = X dx^4, \text{ oder}$$
$$(p\,d^2x + dx\,dp)\,(1 + p^2) = X dx^2.$$

Weil aber ds und daher auch $ds^2 = dx^2\,(1 + p^2)$ constant ist, so wird

$$d^2x\,(1 + p^2) + p\,dx\,dp = 0 \quad \text{oder} \quad d^2x = \frac{-p\,dx\,dp}{1 + p^2},$$

und daher

$$p\,d^2x + dx\,dp = \frac{dx\,dp}{1 + p^2},$$

so daß $dp = X dx$ werde, welche Gleichung sich nun sehr leicht behandeln läßt. Man muß hier nämlich seine Zuflucht zu jenen Vorschriften nehmen, welche wir oben für die Integration der einfachen Differenzialformeln gegeben haben.

Beyspiel 1.

§. 739. **Das vollständige Integrale der Differenzialgleichung $d^2y = \alpha x^n dx^2$ anzugeben, wenn dx als constant betrachtet wird.**

Da $\frac{d^2y}{dx} = \alpha x^n dx$ ist, so findet man, weil dx constant genommen wird,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha}{n+1} x^{n+1} + C,$$

und wenn man von neuem integrirt:

$$y = \frac{\alpha}{(n+1)(n+2)} x^{n+2} + Cx + D;$$

wo die Fälle, wenn $n = -1$ und $n = -2$ ist, für sich entwickelt werden müssen.

I. Ist also $n = -1$, so wird

$$\frac{d^2y}{dx} = \frac{\alpha dx}{x} \quad \text{und daher} \quad \frac{dy}{dx} = \alpha l.x + C.$$

Da nun $dy = \alpha dx\,l.x + C dx$ ist, so findet man durch wie-

derholte Integration

$$y = \alpha x l.x - \alpha x + Cx + D,$$

oder wenn man C ſtatt $C - \alpha$ ſetzt,

$$y = \alpha x l.x + Cx + D.$$

II. Wenn $n = -2$ und $\frac{d^2y}{dx} = \frac{\alpha dx}{x^2}$ iſt, ſo wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\alpha}{x} + C, \text{ und daher}$$

$$y = -\alpha l.x + Cx + D.$$

Beyſpiel 2.

§. 740. Das vollſtändige Integrale der Gleichung

$$\frac{ds^2 d^2y}{dx^4} = \frac{1}{a} \cos.\frac{x}{c}$$

zu beſtimmen, wenn $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ als conſtant betrachtet wird.

Aus dem Vorhergehenden iſt klar, daß $\frac{ds^2 d^2y}{dx^4} = q$ ſeyn werde, ſo daß die Gleichung $q = \frac{1}{a} \cos.\frac{x}{c}$ gegeben iſt; es wird demnach

$$qdx = dp = \frac{dx}{a} . \cos.\frac{x}{c},$$

und durch Integration

$$p = \frac{c}{a} \sin.\frac{x}{c} + C = \frac{dy}{dx}.$$

Man erhält demnach

$$y = -\frac{c^2}{a} \cos.\frac{x}{c} + Cx + D,$$

welches die geſuchte vollſtändige Integralgleichung iſt.

Aufgabe 95.

§. 741. Die vollſtändige Integralgleichung zwiſchen x und y zu finden, wenn für $dy = pdx$ und $dp = qdx$ die Größe q gleich wird irgend einer Function von der einzigen Veränderlichen y, welche durch Y bezeichnet werden ſoll.

Auflöſung.

Weil $q = Y = \frac{dp}{dx}$ iſt, ſo wird $dx = \frac{dp}{Y}$, und daher

$pdx = dy = \frac{pdp}{Y}$. Man erhält demnach zwiſchen p und y die abgeſonderte Gleichung $pdp = Ydy$, und durch Integration derſelben findet man:

$$\tfrac{1}{2}p^2 = \int Ydy + \tfrac{1}{2}C \text{ und}$$

$$p = \sqrt{C + 2\int Ydy} = \frac{dy}{dx}.$$

Hieraus folgern wir alſo weiter die Gleichung

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{C + 2\int Ydy}},$$

welche Integration von neuem eine willkürliche Conſtante einführt, ſo daß auf dieſe Art die vollſtändige Integralgleichung zwiſchen x und y gefunden wird.

Zuſatz 1.

§. 742. Weil $q = \frac{dp}{dx}$ und $dx = \frac{dy}{p}$ iſt, ſo wird $q = \frac{pdp}{dy}$. Da aber $q = Y$ die vorgelegte Gleichung iſt, ſo findet man $\frac{pdp}{dy} = Y$ und daher $pdp = Ydy$, woraus ſich die vorhergehende Integration von ſelbſt ergibt.

Zuſatz 2.

§. 743. Wenn das Element dx conſtant genommen wird, ſo werden, weil $q = \frac{d^2y}{dx^2}$ iſt, die hier integrirten Gleichungen die Form $d^2y = Ydx^2$ haben, und wenn man durch dy multiplicirt, ſo iſt die Integration für ſich klar, denn man erhält

$$\tfrac{1}{2}dy^2 = dx^2\int Ydy + \tfrac{1}{2}Cdx^2,$$

weil dx conſtant iſt, und demnach wie vorhin

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{C + 2\int Ydy}}.$$

Anmerkung.

§. 744. Wir haben alſo hier eine Gattung von Differenzialgleichungen, welche durch einen ſchicklichen Multiplicator integrabel gemacht werden; woraus erhellt, daß dieſe Methode auch bey dieſen Gleichungen angewendet werden könne, und es wird ſich uns die Gelegenheit darbiethen, dieſe Methode noch weiter auszubilden, weil ihr

ausgezeichneter Nutzen sich vorzüglich bey den Differenzialgleichungen höherer Grade bewährt, wo die Absonderung der Veränderlichen keine Anwendung mehr findet. Aus diesem Grunde haben wir schon oben die Methode durch Multiplicatoren zu integriren empfohlen, und ihr einen entschiedenen Vorzug vor der Integrationsmethode durch Absonderung beygelegt.

Beyspiel 1.

§. 745. Das vollständige Integrale der Differenzialgleichung

$$a^2 d^2 y = y dx^2$$

zu bestimmen, wenn dx als constant betrachtet wird.

Multiplicirt man die vorgelegte Gleichung durch $2dy$, so erhält man

$$2a^2 dy \,.\, d^2 y = 2y dy dx^2,$$

und dieser Gleichung entspricht, weil dx unveränderlich ist, das Integrale

$$a^2 dy^2 = y^2 dx^2 + C dx^2,$$

woraus man erhält

$$dx = \frac{a dy}{\sqrt{y^2 + C}},$$

und diese Gleichung gibt nach wiederholter Integration

$$x = a l [y + \sqrt{y^2 + C}] - a l b.$$

Hieraus folgern wir, indem wir die Zahl, deren Logarithmus $= 1$ ist, durch e bezeichnen,

$$b e^{\frac{x}{a}} = y + \sqrt{y^2 + C},$$

und durch Beseitigung der Irrationalität

$$b^2 e^{\frac{2x}{a}} - 2by e^{\frac{x}{a}} = C,$$

so daß man erhält

$$y = \tfrac{1}{2} b e^{\frac{x}{a}} - \frac{C}{2b} \,.\, e^{-\frac{x}{a}}.$$

Ändert man endlich die Form der Constanten C und b, so findet man

$$y = C e^{\frac{x}{a}} + D e^{-\frac{x}{a}}$$

als die vollständige Integralgleichung.

Beyspiel 2.

§. 746. Das vollständige Integrale der Differenzialgleichung

$$a^2 d^2y + y dx^2 = 0$$

zu finden, wobey dx constant genommen ist.

Multiplicirt man mit $2dy$, und integrirt dann die Gleichung

$2a^2 dy d^2y + 2y dy dx^2 = 0$, so findet man

$a^2 dy^2 + y^2 dx^2 = c^2 dx^2$, und hieraus folgt

$$dx = \frac{a\,dy}{\sqrt{c^2 - y^2}};$$

endlich gibt die wiederholte Integration

$$x = a \text{ arc. sin. } \frac{y}{c} + b.$$

Es ist also

$$\frac{y}{c} = \sin. \frac{x-b}{a} = \cos. \frac{b}{a} \sin. \frac{x}{a} - \sin. \frac{b}{a} \cos. \frac{x}{a},$$

oder, wenn die Constanten b und c so geändert werden, daß

$$c \cdot \cos. \frac{b}{a} = C \quad \text{und} \quad -c \sin. \frac{b}{a} = D \quad \text{wird},$$

$$y = C \sin. \frac{x}{a} + D \cos. \frac{x}{a},$$

oder, wenn man die erste Form beybehält:

$$y = C \sin. \left(\frac{x}{a} + \alpha\right).$$

Zusatz.

§. 747. Dieses Beyspiel hätte man mit Hülfe des vorhergehenden auflösen können, da

$e^{u\sqrt{-1}} = \cos. u + \sqrt{-1} \sin. u$ und $e^{-u\sqrt{-1}} = \cos. u - \sqrt{-1} \sin. u$ ist, und umgekehrt

$$\cos. u \cdot \sqrt{-1} = \tfrac{1}{2} e^u + \tfrac{1}{2} e^{-u} \quad \text{und}$$

$$\sin. u \cdot \sqrt{-1} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} e^u - \frac{1}{2\sqrt{-1}} e^{-u}.$$

Beyspiel 3.

§. 748. Es sey, wenn dx als constant betrachtet wird,

$$d^2y\sqrt{ay} = dx^2;$$

man bestimme das vollständige Integrale.

Da also $2dyd^2y = \frac{2dy}{\sqrt{ay}}dx^2$, so erhält man durch Integration

$$dy^2 = \frac{4dx^2\sqrt{y}}{\sqrt{a}} + 4ndx^2 = \frac{4dx^2(\sqrt{y}+n\sqrt{a})}{\sqrt{a}},$$

und hieraus

$$2dx = \frac{dy\sqrt[4]{a}}{\sqrt{\sqrt{y}+n\sqrt{a}}}.$$

Es sey wegen der Bequemlichkeit $n\sqrt{a} = b$ und $\sqrt{y} = z$, damit

$$dy = 2zdz \text{ und } \frac{dx\sqrt{n}}{\sqrt{b}} = \frac{zdz}{\sqrt{b+z}}$$

werde, so ist das Integrale dieser Gleichung

$$\frac{x\sqrt{n}}{\sqrt{b}} = \tfrac{2}{3}(z-2b)\sqrt{b+z} + C,$$

oder wenn man die Werthe wieder substituirt:

$$\frac{x}{\sqrt[4]{a}} = \tfrac{2}{3}(\sqrt{y}-2\sqrt{c})\sqrt{\sqrt{y}+\sqrt{c}} + C,$$

wo c und C zwey willkürliche Constanten sind. Es ist also

$$\frac{3(x+f)}{2\sqrt[4]{a}} = (\sqrt{y}-2\sqrt{c})\sqrt{\sqrt{y}+\sqrt{c}},$$

wenn $C = \frac{-f}{\sqrt[4]{a}}$ gesetzt wird, und wenn man die Quadrate nimmt, so wird

$$\frac{9(x+f)^2}{4\sqrt{a}} = y\sqrt{y} - 3y\sqrt{c} + 4c\sqrt{c}.$$

Anmerkung.

§. 749. Die gewöhnliche Form der auf diese Art zu integrirenden Gleichungen ist demnach, wenn dx als unveränderlich betrachtet wird, $d^2y = Ydx^2$, welche Gleichung durch die Multiplication mit dy offenbar integrabel wird. Sollte aber das Element dy als constant angesehen werden, so wird man, weil $q = \frac{dp}{dx}$ und $p = \frac{dy}{dx}$ ist, $q = -\frac{dyd^2x}{dx^3}$ erhalten, und daher ist die gewöhnliche Form $dyd^2x = -Ydx^3$. Wird ferner das Element $ds = \sqrt{dx^2+dy^2}$

als unveränderlich betrachtet, so daß $dx\,d^2x + dy\,d^2y = o$ wird, so erhält man, da $dp = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^2}$ ist, entweder

$$q = -\frac{ds^2\,d^2x}{dx^3\,dy} \quad \text{oder} \quad q = \frac{ds^2\,d^2y}{dx^4},$$

und hieraus ergibt sich die Form:

$$-\frac{ds^2\,d^2x}{dx^3\,dy} = Y \quad \text{oder} \quad \frac{ds^2\,d^2y}{dx^4} = Y,$$

welche Ausdrücke durch die Multiplication mit dy auch beyde integrabel werden, obgleich dieß nicht sogleich in die Augen fällt. Auf ähnliche Art erhält man, wenn das Element $y\,dx$ constant seyn soll, so daß $y\,d^2x + dx\,dy = o$ und $d^2x = -\frac{dx\,dy}{y}$ wird, weil $dp = \frac{d^2y}{dx} + \frac{dy^2}{y\,dx}$ ist, folgende Form:

$$y\,d^2y + dy^2 = Y\,y\,dx^2,$$

deren erstes Glied integrabel gemacht wird, wenn man mit irgend einer Function von $y\,dy$ und $y\,dx$ multiplicirt, also auch durch den Multiplicator $\frac{y\,dy}{y^2\,dx^2}$, durch welchen zugleich auch das andere Glied $Y\,y\,dx^2$ integrabel gemacht wird. Nachdem wir nun diese höchst einfachen Fälle von Differenzialgleichungen des zweyten Grades, welche nicht die mindeste Schwierigkeit darbiethen, aus einander gesetzt haben, so wollen wir zu den schwierigeren Fällen übergehen, und zwar zuerst zu jenen Gleichungen, in welchen die eine der beyden Veränderlichen x und y nicht erscheint, so daß die vorgelegte Gleichung nur die drey Größen x, p und q, oder y, p und q enthält, denn die Beziehungen beyder sind beynahe dieselben.

Kapitel II.

Von den Differenzialgleichungen des zweyten Grades, in welchen die eine der beyden Veränderlichen nicht erscheint.

Aufgabe 96.

§. 750 **Wenn** $dy = pdx$ und $dp = qdx$ gesetzt wird, und es ist irgend eine Gleichung zwischen den drey Größen x, p und q, in welcher die zweyte Veränderliche y nicht erscheint, gegeben, so soll die zwischen den Variablen x und y bestehende Relation aufgefunden werden.

Auflösung.

Da die vorgelegte Gleichung die drey Größen x, p und q enthält, so schreibe man für die Größe q ihren Werth $\frac{dp}{dx}$, so findet man eine Differenzialgleichung des ersten Grades zwischen den zwey Veränderlichen x und p allein, welche nach den im ersten Theile gelehrten Vorschriften behandelt und integrirt werden muß. Ist aber das Integrale, welches, wenn es vollständig ist, eine willkürliche Constante enthalten wird, gefunden, so läßt sich aus demselben entweder p durch x, oder x durch p ausdrücken. Im ersten Falle, im welchem sich p durch x bestimmen läßt, wo demnach p als eine Function von x erscheint, die wir $= X$ setzen wollen, wird man wegen $p = X$ die Gleichung $pdx = dy = Xdx$ erhalten, und hieraus ergibt sich

$$y = \int Xdx + \text{Const.},$$

welche Gleichung die zwischen x und y gesuchte Relation bestimmt. Im letztern Falle, in welchem x durch p gegeben wird, und demnach eine Function P von p bezeichnet, so daß $x = P$, wird man

$$y = \int pdx = \int pdP \quad \text{oder} \quad y = Pp - \int Pdp$$

erhalten. Läßt sich aber weder x durch p, noch p durch x bestimmen, so muß man sehen, ob man beyde Größen zugleich durch eine neue Veränderliche u ausdrücken kann; denn wird in diesem Falle $x = V$ und $p = U$, so erhält man $y = \int UdV$.

Zusatz 1.

§. 751. Man löst also eine solche Differenzialgleichung des zweyten Grades so auf, daß man sie auf eine Differenzialgleichung des ersten Grades, zwischen den zwey Veränderlichen x und p zurückführt. Läßt sich dann diese integriren, so ergibt sich zugleich die Integration der vorgelegten Gleichung, indem man nur noch eine neue Integration auszuführen hat.

Zusatz 2.

§. 752. Ist die zwischen x, p und q gegebene Gleichung so beschaffen, daß q den ersten Grad nicht übersteigt, oder daß sie sich auf eine solche Form zurückführen läßt, so erhält man eine einfache Differenzialgleichung, in welcher die Differenzialien nur in der ersten Potenz erscheinen, und auf welche demnach die bereits gelehrten Vorschriften angewendet werden müssen.

Zusatz 3.

§. 753. Erscheint aber die Größe q entweder in einer höhern Potenz, oder gar in einer transcendenten Form, so muß man seine Zuflucht zu jenen Kunstgriffen nehmen, welche am Ende des ersten Theiles für die Auflösung solcher Gleichungen gelehrt worden sind.

Anmerkung.

§. 754. Wenn in der Gleichung zwischen x, p und q der Buchstabe q bloß in der ersten Potenz erscheint, und demnach für $q = \frac{dp}{dx}$ eine einfache Differenzialgleichung erhalten wird, so sind die vorzüglichsten Fälle, in welchen die Integration gelingt, folgende:

1) Wenn diese Differenzialgleichung die Absonderung zuläßt;
2) wenn eine von den Veränderlichen p und x, selbst wenn auf die Differenzialien Rücksicht genommen wird, den ersten Grad nicht übersteigt; und
3) wenn beyde Veränderliche x und p durchaus dieselbe Anzahl von Dimensionen bilden, in welchem Falle die Gleichung homogen genannt wird.

Der minder allgemeinen Fälle, wie wir sie oben entwickelt haben, erwähnen wir hier nicht. Wenn ferner die Größe q entweder in höhern Potenzen, oder selbst in transcendenter Form erscheint, so sind

die vorzüglichsten auflösbaren Fälle, wie wir oben gelehrt haben, folgende:

1) Wenn zwischen x und y irgend eine Gleichung gegeben wird, in welcher also p fehlet;
2) wenn die vorgelegte Gleichung nur die Größen p und q enthält, welche beyden Fälle wir aber schon im vorhergehenden Kapitel behandelt haben;
3) wenn in der gegebenen Gleichung die beyden Veränderlichen p und x durchaus dieselbe Anzahl von Dimensionen bilden;
4) wenn in der Gleichung zwischen x, p und q eine der beyden Veränderlichen x oder p bloß in der ersten Potenz erscheint; endlich
5) wenn die gegebene Gleichung so gebildet ist, daß sie durch die Substitution $x = v^{\mu}$, $p = z^{\mu+\nu}$ und $q = t^{\nu}$ in eine homogene Gleichung zwischen v, z und t übergeht, bey welcher also durchaus dieselbe Anzahl von Dimensionen Statt findet.

Für diese Fälle wollen wir nun Beyspiele anführen.

Beyspiel 1.

§. 755. Eine solche Gleichung zwischen x und y aufzufinden, daß wenn dx als constant betrachtet wird, die Formel $\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y}$ einer gegebenen Function X von x gleich werde.

Wird $dy = p\,dx$ und $dp = q\,dx$ gesetzt, so findet man

$$\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q} = X = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}\,dx}{dp}, \text{ also}$$

$$\frac{dx}{X} = \frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}},$$

und da hier die Veränderlichen x und p abgesondert erscheinen, so gibt die Integration

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = \int \frac{dx}{X}.$$

Man setze $\int \frac{dx}{X} = V$, als vollständigem Integrale betrachtet, so wird V eine Function von x bezeichnen, daher ist

$$p = V\sqrt{1+p^2} \quad \text{und} \quad p = \frac{V}{\sqrt{1-V^2}},$$

und demnach

$$dy = pdx = \frac{V\,dx}{\sqrt{1 - V^2}}, \text{ also}$$

$$y = \int \frac{V\,dx}{\sqrt{1 - V^2}}.$$

Dann aber findet man das Element

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + p^2} = \frac{dx}{\sqrt{1 - V^2}},$$

und das Integrale dieser Gleichung gibt

$$\int dx\sqrt{1 + p^2} = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - V^2}}.$$

Zusatz 1.

§. 756. Bezeichnen x und y die rechtwinkligen Coordinaten einer Curve, so ist die Formel $\frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$ der Krümmungshalbmesser derselben, und demnach wird hiedurch eine krumme Linie bestimmt, deren Krümmungshalbmesser als eine Function der Abscisse x erscheint.

Zusatz 2.

§. 757. Muß also der Krümmungshalbmesser der Abscisse x umgekehrt proportional seyn, so setze man $X = \frac{a^2}{2x}$, und man erhält

$$V = \int \frac{2x\,dx}{a^2} = \frac{x^2 + ab}{a^2}, \text{ also}$$

$$y = \int \frac{(x^2 + ab)\,dx}{\sqrt{a^4 - (x^2 + ab)^2}}.$$

welche Gleichung die von einem elastischen Faden gebildeten Curven darstellt.

Zusatz 3.

§. 758. Ist $V = x^n$ oder $X = \frac{1}{nx^{n-1}}$, so erhält man, wenn die beyzufügende Constante außer Acht gelassen wird, $y = \int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{1 - x^{2n}}}$, welches Integrale in den Fällen, in welchen entweder $n = \frac{1}{2k + 1}$ oder $n = \frac{-1}{2k}$ ist, wobey k eine ganze positive Zahl bezeichnet, eine algebraische Form erhalten kann.

Beyſpiel 2.

§. 759. Eine Gleichung zwiſchen x und y zu finden, wenn dx als unveränderlich betrachtet,

$$dx(dx^2 + dy^2) + xdyd^2y = ad^2y\sqrt{dx^2 + dy^2}$$

ſeyn muß.

Wird $dy = pdx$ geſetzt, ſo nimmt unſere Gleichung, weil $d^2y = dpdx$ iſt, folgende Form an:

$$dx(1 + p^2) + xpdp = adp\sqrt{1 + p^2};$$

welche Gleichung durch $\sqrt{1 + p^2}$ dividirt, integrabel wird, denn man erhält:

$$x\sqrt{1 + p^2} = ap + b \quad \text{oder} \quad x = \frac{ap + b}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

Weil nun

$$y = \int pdx = px - \int xdp \text{ iſt, ſo erhält man}$$

$$y = \frac{ap^2 + bp}{\sqrt{1 + p^2}} - \int \frac{dp \cdot (ap + b)}{\sqrt{1 + p^2}},$$

oder, wenn die Integration ausgeführt wird:

$$y = \frac{ap^2 + bp}{\sqrt{1 + p^2}} - a\sqrt{1 + p^2} - bl \cdot \frac{p + \sqrt{1 + p^2}}{n}, \text{ oder}$$

$$y = \frac{bp - a}{\sqrt{1 + p^2}} - bl \cdot \frac{p + \sqrt{1 + p^2}}{n},$$

ſo daß alſo beyde Veränderlichen x und y durch p ausgedrückt werden. Da alſo aus der erſten Gleichung

$$p = \frac{ab + x\sqrt{a^2 + b^2 - x^2}}{x^2 - a^2}, \text{ und}$$

$$\sqrt{1 + p^2} = \frac{bx + a\sqrt{a^2 + b^2 - x^2}}{x^2 - a^2}$$

gefunden wird, ſo erhält man durch Subſtitution dieſer Werthe:

$$y = \frac{a(a^2 + b^2 - x^2) + bx\sqrt{a^2 + b^2 - x^2}}{bx + a\sqrt{a^2 + b^2 - x^2}} - bl \cdot \frac{b + \sqrt{a^2 + b^2 - x^2}}{n(x - a)},$$

oder

$$y = \sqrt{a^2 + b^2 - x^2} - bl \cdot \frac{b + \sqrt{a^2 + b^2 - x^2}}{n(x - a)}.$$

Zuſatz.

§. 760. Läßt man die durch die erſtere Integration eingeführte

Constante b verſchwinden, ſo erhält man zwiſchen x und y eine algebraiſche Gleichung, denn es wird $y = \sqrt{a^2 - x^2}$. Wenn aber b nicht verſchwindet, ſo iſt die Integralgleichung tranſcendent und enthält Logarithmen.

Beyſpiel 3.

§. 761. Eine Gleichung zwiſchen x und y zu finden, wenn

$$a^2 d^2 y \sqrt{a^2 + x^2} + a^2 dx dy = x^2 dx^2$$

werden muß, ſobald dx conſtant genommen wird.

Für $dy = p dx$ erhalten wir die Gleichung

$$a^2 dp \sqrt{a^2 + x^2} + a^2 p dx = x^2 dx, \text{ oder}$$

$$dp + \frac{p dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{x^2 dx}{a^2 \sqrt{a^2 + x^2}},$$

in welcher die Veränderliche p den erſten Grad nicht überſchreitet.

Da alſo

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = l\left[x + \sqrt{a^2 + x^2}\right]$$

iſt, ſo wird dieſe Gleichung integrabel gemacht, wenn man ſie mit $x + \sqrt{a^2 + x^2}$ multiplicirt, denn man erhält:

$$p\left[x + \sqrt{a^2 + x^2}\right] = \int \frac{x^2 dx \left[x + \sqrt{a^2 + x^2}\right]}{a^2 \sqrt{a^2 + x^2}}, \text{ oder}$$

$$p\left[x + \sqrt{a^2 + x^2}\right] = \frac{1}{a^2} \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{x^3}{3a^2};$$

aber es iſt

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \tfrac{1}{3}(x^2 - 2a^2)\sqrt{a^2 + x^2} + C, \text{ alſo wird}$$

$$p\left[x + \sqrt{a^2 + x^2}\right] = \frac{(x^2 - 2a^2)\sqrt{a^2 + x^2} + x^3}{3a^2} + C.$$

Multiplicirt man dieſe Gleichung durch $\sqrt{a^2 + x^2} - x$, ſo daß

$$a^2 p = \frac{-x^2 - 2a^2 + 2x\sqrt{a^2 + x^2}}{3} + C\sqrt{a^2 + x^2} - Cx$$

wird, ſo findet man, weil $dy = p dx$ iſt, durch Integration

$$a^2 y = -\tfrac{1}{9}x^3 - \tfrac{2}{3}a^2 x + \tfrac{2}{9}(a^2 + x^2)\sqrt{a^2 + x^2}$$
$$- \tfrac{1}{2}Cx^2 + C\int dx \sqrt{a^2 + x^2}.$$

Wenn also die Constante C verschwindet, so erhält man eine algebraische Gleichung zwischen x und y, nämlich

$$9a^2y + 6a^2x + x^3 = 2(a^2 + x^2)\sqrt{a^2 + x^2}.$$

Beyspiel 4.

§. 762. Das Integrale der Differenzialgleichung des zweyten Grades

$$(a^2dy^2 + x^2dx^2)\,d^2y = nxdx^3dy$$

zu bestimmen, wenn dx als constant betrachtet wird.

Sey $dy = pdx$, so erhalten wir, weil $d^2y = dpdx$ ist:

$$(a^2p^2 + x^2)\,dp = npxdx;$$

und da diese Gleichung homogen ist, so setzen wir $x = pu$, so wird

$$p^2(a^2 + u^2)\,dp = np^2u(pdu + udp), \text{ oder}$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{nudu}{a^2 + (1-n)u^2},$$

und durch Integration dieser Gleichung:

$$lp = \frac{n}{2(1-n)}\,l[a^2 + (1-n)u^2] + \text{Const.}$$

Hieraus ergibt sich nun

$$p = C[a^2 + (1-n)u^2]^{\frac{n}{2(1-n)}} \text{ und}$$

$$x = Cu[a^2 + (1-n)u^2]^{\frac{n}{2(1-n)}}.$$

Da ferner

$$y = px - \int xdp \text{ und } dp = Cnudu[a^2 + (1-n)u^2]^{\frac{3n-2}{2(1-n)}}$$

ist, so wird

$$y = C^2u[a^2 + (1-n)u^2]^{\frac{n}{1-n}} - nC^2\int u^2du[a^2 + (1-n)u^2]^{\frac{2n-1}{1-n}}.$$

Für den Fall aber, wo $n = 1$ ist, wird

$$lp = \frac{u^2}{2a^2} + C \text{ und } u = a\sqrt{2l\frac{p}{c}}, \text{ also}$$

$$x = ap\sqrt{2l\frac{p}{c}} \text{ und } y = ap^2\sqrt{2l\frac{p}{c}} - a\int pdp\sqrt{2l\frac{p}{c}}.$$

Zusatz.

§. 763. Ist $n = \frac{1}{2}$, so wird

$$x = Cu\sqrt{a^2 + \tfrac{1}{2}u^2} \text{ und}$$

$y = C^2 u (a^2 + \frac{1}{6}u^2) - \frac{1}{6}C^2 u^3 + D = C^2 u (a^2 + \frac{1}{3}u^2) + D$,

und so erhält man die zwischen x und y bestehende Relation in einer algebraischen Form, welches auch der Fall ist für $n = \frac{2}{3}$, oder für $n = \frac{3}{4}$, oder für $n = \frac{4}{5}$ u. s. w.

Beyspiel 5.

§. 764. Die Differenzialgleichung des zweyten Grades

$$a dx dy^2 + x^2 dx d^2y = nx dy \sqrt{dx^4 + a^2 (d^2y)^2}$$

zu integriren, wenn dx als constant betrachtet wird.

Man setze $dy = p dx$ und $dp = q dx$, damit $d^2y = q dx^2$ werde, so nimmt unsere Gleichung folgende Form an:

$$ap^2 + qx^2 = npx\sqrt{1 + a^2 q^2},$$

welche Gleichung in Bezug auf p und x homogen ist. Man setze also $p = ux$, so erhält man

$$au^2 + q = nu\sqrt{1 + a^2 q^2};$$ nun ist aber
$dp = q dx = u dx + x du$, und demnach wird

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{q - u}.$$

Aus der obigen Gleichung zwischen q und u aber erhält man

$$q = \frac{au^2 + nu\sqrt{1 - n^2a^2u^2 + a^4u^4}}{n^2a^2u^2 - 1}, \text{ und}$$

$$q - u = \frac{u(1 + au - n^2a^2u^2) + nu\sqrt{1 - n^2a^2u^2 + a^4u^4}}{n^2a^2u^2 - 1},$$

und so findet man

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{u} \cdot \frac{n^2a^2u^2 - 1}{1 + au - n^2a^2u^2 + n\sqrt{1 - n^2a^2u^2 + a^4u^4}}.$$

Es wird also x durch u, und daher auch $p = ux$ durch u ausgedrückt, und hieraus wird $y = \int p dx = \int ux dx$ abgeleitet.

Zusatz 1.

§. 765. Die obige Differenzialgleichung läßt sich auch auf die Form

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{u} \cdot \frac{1 + au - n^2a^2u^2 - n\sqrt{1 - n^2a^2u^2 + a^4u^4}}{n^2 - 1 - 2au + (n^2 - 1)a^2u^2}$$

bringen, und in dieser Gestalt läßt sich leichter erkennen, wie man die Integration auszuführen habe.

Zusatz 2.

§. 766. Bemerkenswerth ist der Fall, wo $n^2 = 2$ ist, da man erhält dann

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{u} \cdot \frac{1 + au - 2a^2u^2 - (1 - a^2u^2)\sqrt{2}}{(1 - au)^2}, \text{ oder}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{u} \cdot \frac{1 + 2au - (1 + au)\sqrt{2}}{1 - au} = \frac{du(1 - \sqrt{2})}{u} + \frac{adu(3 - 2\sqrt{2})}{1 - au}$$

und hieraus ergibt sich

$$lx = (1 - \sqrt{2})\, lu - (3 - 2\sqrt{2})\, l(1 - au) + \text{Const.}, \text{ od}$$

$$xu^{\sqrt{2}-1}(1 - au)^{3-2\sqrt{2}} = C.$$

Beyspiel 6.

§. 767. Man bestimme das Integrale der Differenzialgleichung

$$dx^3 dy - x ds^2 d^2y = a dx ds \sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2},$$

wenn das Element $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ als unveränderlich angesehen wird.

Für $dy = p dx$ wird $ds = dx\sqrt{1 + p^2}$, und weil $d^2s =$ ist, so wird

$$d^2x = -\frac{p\, dp\, dx}{1 + p^2} = \frac{-p q dx^2}{1 + p^2},$$

wobey $dp = q dx$ ist, dann aber findet man

$$d^2y = p d^2x + dp dx = \frac{-p^2 q dx^2}{1 + p^2} + q dx^2 = \frac{q dx^2}{1 + p^2},$$

und daher

$$\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2} = \frac{q dx^2}{\sqrt{1 + p^2}};$$

werden nun diese Werthe substituirt, so geht unsere Gleichung über

$$p - qx = aq,$$

und durch Differenziation erhält man

$$-x dq = a dq, \text{ also } dq = o \text{ und } q = \frac{1}{c}.$$

Man findet demnach

$$p = \int q dx = \frac{x + a}{c},$$

welcher Werth sich auch aus der Gleichung $p = (x + a)q$ ohne Integration ergibt. Endlich aber erhält man

$$y = \int p\,dx = \frac{x^2 + 2ax}{2c} + b,$$

welches die gesuchte vollständige Integralgleichung ist, und die zwey Constanten b und c enthält.

Beyspiel 7.

§. 768. Man suche das Integrale der Differenzialgleichung des zweyten Grades

$$dx^3\,dy - x\,ds^2\,d^2y = \frac{b\,dx^4\,ds^2\,d^2y}{\sqrt{dx^8 + a^2\,ds^4\,(d^2y)^2}},$$

wenn das Element $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ constant genommen wird.

Wird $dy = p\,dx$ und $dp = q\,dx$, also $ds = dx\sqrt{1 + p^2}$ gesetzt, so erhält man

$$d^2x = -\frac{p\,q\,dx^2}{1 + p^2} \quad \text{und} \quad d^2y = -\frac{dx\,d^2x}{dy} = -\frac{d^2x}{p} = \frac{q\,dx^2}{1 + p^2},$$

also

$$ds^2\,d^2y = q\,dx^4;$$

daher geht unsere Gleichung über in

$$p - qx = \frac{bq}{\sqrt{1 + a^2q^2}},$$

und wenn man diese differenzirt, so findet man

$$-x\,dq = \frac{b\,dq}{(1 + a^2q^2)^{\frac{3}{2}}},$$

woraus entweder $dq = 0$ oder $x = \frac{-b}{(1 + a^2q^2)^{\frac{3}{2}}}$ gefolgert wird.

Im erstern Falle ist $q = \frac{1}{c}$ und $p = \frac{x}{c} + \frac{b}{\sqrt{c^2 + a^2}}$, und daher

$$y = \int p\,dx = \frac{x^2}{2c} + \frac{bx}{\sqrt{c^2 + a^2}} + f.$$

Im zweyten Falle, wo $x = \frac{-b}{(1 + a^2q^2)^{\frac{3}{2}}}$ ist, wird

$$p = \frac{-bq}{(1 + a^2q^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{bq}{\sqrt{1 + a^2q^2}} = \frac{a^2bq^3}{(1 + a^2q^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Nun ist aber

$$dx = \frac{+3a^2bq\,dq}{(1 + a^2q^2)^{\frac{5}{2}}}, \text{ daher ist}$$

$$dy = pdx = \frac{3a^4b^2q^4dq}{(1+a^2q^2)^4},$$

und nach gehöriger Reduction erhält man

$$y = \frac{-\frac{1}{3}b^2q - a^2b^2q^3}{(1+a^2q^2)^3} + \frac{1}{3}b^2\int\frac{dq}{(1+a^2q^2)^3}.$$

Es ist aber

$$\int\frac{dq}{(1+a^2q^2)^{n+1}} = \frac{q}{2n(1+a^2q^2)^n} + \frac{2n-1}{2n}\int\frac{dq}{(1+a^2q^2)^n};$$

also

$$\int\frac{dq}{(1+a^2q^2)^3} = \frac{q}{4(1+a^2q^2)^2} + \frac{3}{4}\int\frac{dq}{(1+a^2q^2)^2}, \text{ und}$$

$$\int\frac{dq}{(1+a^2q^2)^2} = \frac{q}{2(1+a^2q^2)} + \frac{1}{2}\int\frac{dq}{1+a^2q^2}$$

$$= \frac{q}{2(1+a^2q^2)} + \frac{1}{2a}\text{ arc. tang. }aq,$$

und demnach

$$\int\frac{dq}{(1+a^2q^2)^3} = \frac{q}{4(1+a^2q^2)^2} + \frac{3q}{8(1+a^2q^2)} - \frac{3}{8a}\text{ arc. tg. }aq,$$

folglich wird

$$y = \frac{-b^2q(1+2a^2q^2)}{2(1+a^2q^2)^3} - \frac{b^2q}{8(1+a^2q^2)^2} + \frac{3b^2q}{16(1+a^2q^2)}$$

$$+ \frac{3b^2}{16a}\text{ arc. tang. }aq,$$

wobey

$$x = \frac{-b}{(1+a^2q^2)^{\frac{3}{2}}}\text{ ist, und daher wird}$$

$$1 + a^2q^2 = \sqrt[3]{\frac{b^2}{x^2}},$$

so daß auf diese Art eine Gleichung zwischen x und y aufgestellt werden kann; übrigens ist dieses Integrale, wie wir oben gesehen haben, nur ein particuläres.

Aufgabe 97.

§. 769. Eine Integralgleichung zwischen x und y aufzufinden, wenn irgend eine Gleichung zwischen y, p und q vorgelegt wird, in welcher also die Veränderliche x nicht erscheint, und wo $dy = pdx$ und $dp = qdx$ ist.

Auflösung.

Weil $q = \frac{dp}{dx}$ und $dx = \frac{dy}{p}$ ist, so wird $q = \frac{p\,dp}{dy}$; man setze demnach in der zwischen y, p und q gegebenen Gleichung überall statt q den Werth $\frac{p\,dp}{dy}$, so erhält man bloß zwischen den beyden Veränderlichen p und y eine Differenzialgleichung des ersten Grades, deren Auflösung man nach den oben erklärten Methoden versuchen muß. Hat man aber zwischen p und y die Integralgleichung gefunden, so kann man aus derselben entweder p durch y oder y durch p bestimmen, um die zweyte Integration desto leichter ausführen zu können. Läßt sich y bequem durch p ausdrücken, so daß y als irgend eine Function von p erscheint, welche wir mit P bezeichnen wollen, so daß $y = P$ ist, so wird $dx = \frac{dP}{p}$ und daher $x = \int\frac{dP}{p} = \frac{P}{p} + \int\frac{P\,dp}{p^2}$. Läßt sich aber bequemer p durch y bestimmen, so daß $p = Y$ wird, wobey Y irgend eine Function von y bezeichnet, so erhält man $x = \int\frac{dy}{Y}$, weil $dx = \frac{dy}{p}$ ist. Sollte aber keine dieser Bestimmungen gelingen, so drücke man die beyden Größen p und y durch eine neue Veränderliche u aus, so daß $p = U$ und $y = V$ werde, wobey U und V Functionen von u bezeichnen, so erhält man dann hieraus $dx = \frac{dV}{U}$ und $x = \int\frac{dV}{U}$, und auf diese Weise wird durch doppelte Integration das vollständige Integrale gefunden werden.

Zusatz 1.

§. 770. Die Auflösung solcher Differenzialgleichungen des zweyten Grades wird also auch auf eine Differenzialgleichung des ersten Grades zurückgeführt, und kann man diese auflösen, so läßt sich auch zugleich das Integrale der vorgelegten Gleichung darstellen.

Zusatz 2.

§. 771. Ist die zwischen y, p und q vorgelegte Gleichung so beschaffen, daß sich aus ihr der Werth von q bequem bestimmen läßt, und demnach q als Function von y und p erscheint, welche durch T bezeichnet werden soll, so wird $p\,dp = T\,dy$, welches eine einfache Differenzialgleichung des ersten Grades ist.

Zusatz 3.

§. 772. Wenn eine solche Entwickelung nicht gelingt, indem die Größe q entweder in höhern Potenzen oder unter Wurzelzeichen, oder sogar unter transcendenten Formen erscheint, so ist die Differenzialgleichung zwar vom ersten Grade, allein complicirt, und man muß sie dann nach den oben gelehrten Methoden behandeln.

Anmerkung. 1.

§. 773. Weil sich die Differenzialgleichungen des ersten Grades nur in wenigen Fällen integriren lassen, so wird es gut seyn, dieselben hier zu bemerken und durch Beyspiele zu erläutern; inzwischen kann man auch die übrigen Fälle als aufgelöst betrachten, und dieß ist bey Differenzialgleichungen höherer Ordnungen vorzüglich nöthig, um die Auflösung derselben auf eine niedrigere Ordnung zurückzuführen, denn man pflegt in der Analysis alle jene Lehren, welche nach dem Plane des Vortrags vorausgehen, gleichsam als gänzlich vollendet zu betrachten, obgleich sie noch vieles zu wünschen übrig lassen, um auf diese Weise die Anzahl der unvollendeten Lehren zu vermindern. Ist man gleichwohl auch weit entfernt, die algebraischen Gleichungen aller Grade auflösen zu können, indem wir die Gleichungen bloß bis zum vierten Grade aufzulösen wissen, so betrachten wir dennoch in der höhern Analysis die Auflösung aller jener Gleichungen als eine bekannte Sache. Es läßt sich aber hievon auch wirklich Anwendung machen, indem man in der Ausübung sich damit begnügt, aus einer vorgelegten Gleichung den gesuchten Werth näherungsweise so genau bestimmen zu können, als man nur immer will. Weil wir die Methode, die Integralien der Differenzialgleichungen des ersten Grades näherungsweise zu bestimmen, bereits gelehrt haben, so können wir nun auf dieselbe Art die ganze Rechnung als völlig vollendet mit Recht betrachten, so bald wir die Auflösung der Differenzialgleichungen höherer Grade auf jene des ersten Grades zurückzuführen im Stande waren. Wir werden demnach auch in diesem zweyten Theile die Rechnung für beendigt halten, so bald wir eine vorgelegte Differenzialgleichung des zweyten Grades auf den ersten Grad zurückgeführt haben.

Anmerkung 2.

§. 774. Es sind demnach die Differenzialgleichungen des zweyten Grades, welche sich auf diese Art auf Differenzialgleichungen des

ersten Grades zurückführen lassen, so beschaffen, daß wenn $dy = pdx$ und $dp = qdx$ gesetzt wird, die Veränderliche x aus denselben verschwindet, und eine Gleichung zwischen den Veränderlichen y, p und q allein erscheint. Die Fälle, in welchen eine solche Gleichung auflösbar ist, sind demnach von doppelter Art, zu deren erstern man jene Fälle rechnet, in welchen q bloß in der ersten Potenz erscheint, und man kann demnach q irgend einer Function von y und p gleich setzen. Da also $q = \frac{pdp}{dy} = f(y, p)$, welche Function wir $= T$ setzen wollen, so wird die Auflösung in folgenden Fällen gelingen:

1) Wenn T eine homogene Function des ersten Grades von y und p ist.

2) Wenn $T = \frac{P}{y + Q}$, wobey P und Q was immer für Functionen der einzigen Veränderlichen p bezeichnen; denn in diesem Falle wird $Pdy = ypdp + Qpdp$; übrigens gehört hierher auch der Fall $T = \frac{P}{y + Qy^n}$.

3) Wenn $T = p(Yp + Z)$ ist, so bald Y und Z was immer für Functionen von y bezeichnen; weil dann die Gleichung

$$dp = Ypdy + Zdy,$$

welche die Veränderliche p nur in der ersten Potenz enthält, integrabel wird. Hierher kann auch der Fall $T = p(Yp + Zp^n)$ gerechnet werden.

Zu der zweyten Gattung gehören jene Fälle, in welchen die Größe q entweder in höhern Potenzen oder unter Wurzelzeichen erscheint, oder sogar in transcendenten Formen vorkömmt, und in diesen läßt sich die zwischen y, p und q vorgelegte Gleichung dann auflösen:

1) Wenn für $q = pu$, also $u = \frac{dp}{dy}$, zwischen y und p eine homogene Gleichung erhalten wird; eine solche Gleichung nämlich, in welcher y und p durchaus dieselbe Anzahl von Dimensionen bilden, wie auch übrigens die Größe u in der Gleichung verflochten erscheinen mag.

2) Wenn in der Gleichung, welche durch die Substitution $q = pu$ zwischen y, p und u erhalten wird, die eine der beyden Größen y oder p bloß in der ersten Potenz erscheint.

3) Wenn für $y = v^\mu$, $p = z^{\mu+\nu}$ und $u = t^\nu$ eine homogene

Gleichung zwiſchen den drey Größen v, z und t erhalten wird; denn ſolche Gleichungen haben wir oben auflöſen gelehrt.

Beyſpiel 1.

§. 775. Man erhalte, ſo bald das Element dx als conſtant betrachtet wird, folgende Differenzialgleichung des zweyten Grades:

$$d^2y + Adxdy + Bydx^2 = o;$$

man beſtimme das vollſtändige Integrale derſelben.

Wird $dy = pdx$ und $dp = qdx$ geſetzt, ſo wird unſere Gleichung übergehen in

$$q + Ap + By = o \quad \text{oder} \quad pdp + Apdy + Bydy = o,$$

und weil dieſe Gleichung homogen iſt, ſo verwandelt ſie ſich, wenn $p = vy$ geſetzt wird, in folgende:

$$v^2ydy + vy^2dv + Avydy + Bydy = o;$$

und hieraus ergibt ſich:

$$\frac{dy}{y} + \frac{vdv}{v^2 + Av + B} = o.$$

Sey $v^2 + Av + B = (v + \alpha)(v + \beta)$, ſo daß $\alpha + \beta = A$ und $\alpha\beta = B$ iſt, ſo wird

$$\frac{dy}{y} + \frac{\alpha dv}{(\alpha - \beta)(v + \alpha)} - \frac{\beta dv}{(\alpha - \beta)(v + \beta)} = o,$$

und daher durch Integration

$$ly + \frac{\alpha}{\alpha - \beta} l(v + \alpha) - \frac{\beta}{\alpha - \beta} l(v + \beta) = C, \text{ oder}$$

$$y = a(x + \beta)^{\frac{\beta}{\alpha - \beta}} (v + \alpha)^{\frac{-\alpha}{\alpha - \beta}}, \text{ und daher}$$

$$p = vy = av(v + \beta)^{\frac{\beta}{\alpha - \beta}} (v + \alpha)^{\frac{-\alpha}{\alpha + \beta}};$$

dann aber wird

$$dx = \frac{dy}{p} = \frac{dy}{vy}, \text{ und weil}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{-vdv}{v^2 + Av + B}, \text{ ſo erhält man}$$

$$dx = \frac{-dv}{v^2 + Av + B} = \frac{dv}{(\alpha - \beta)(v + \alpha)} - \frac{dv}{(\alpha - \beta)(v + \beta)},$$

$$\text{und} \quad x = \frac{1}{\alpha - \beta} l\frac{v + \alpha}{v + \beta} + \text{Const.}$$

Dieſe Auflöſung aber läßt ſich auf folgende Art leichter ausführen. Weil

$$\frac{dy}{y} = \frac{-v\,dv}{(v+\alpha)(v+\beta)} \quad \text{und} \quad dx = \frac{-dv}{(v+\alpha)(v+\beta)},$$

ſo wird

$$\frac{dy}{y} + \alpha dx = \frac{-dv}{v+\beta} \quad \text{und} \quad \frac{dy}{y} + \beta dx = \frac{-dv}{v+\alpha}, \text{ alſo}$$

$$ly + \alpha x = la - l(v+\beta) \quad \text{und} \quad ly + \beta x = lb - l(v+\alpha),$$

folglich

$$v + \beta = \frac{a}{y} e^{-\alpha x} \quad \text{und} \quad v + \alpha = \frac{b}{y} e^{-\beta x},$$

und hieraus ergibt ſich

$$\alpha - \beta = \frac{1}{y}(be^{-\beta x} - ae^{-\alpha x}),$$

alſo wenn man die Conſtanten verändert:

$$y = \mathfrak{A}e^{-\alpha x} + \mathfrak{B}e^{-\beta x},$$

welche Integration Statt findet, wenn α und β reelle und ungleiche Größen ſind. Da wir nun

$$v^2 + Av + B = (v+\alpha)(v+\beta)$$

geſetzt haben, ſo wird

$$\alpha = \tfrac{1}{2}A + \sqrt{\tfrac{1}{4}A^2 - B} \quad \text{und} \quad \beta = \tfrac{1}{2}A - \sqrt{\tfrac{1}{4}A^2 - B},$$

es ſind demnach hier drey Fälle zu entwickeln, denn es iſt entweder $\frac{1}{4}A^2 - B$ poſitiv oder negativ, oder es verſchwindet dieſer Ausdruck.

1) Es ſey $\frac{1}{2}A = m$ und $\sqrt{\frac{1}{4}A^2 - B} = n$, ſo iſt das vollſtändige Integrale der vorgelegten Gleichung

$$y = \mathfrak{A}e^{-(m+n)x} + \mathfrak{B}e^{-(m-n)x} = e^{-mx}(\mathfrak{A}e^{-nx} + \mathfrak{B}e^{nx}).$$

2) Sey $\frac{1}{2}A = m$ und $\sqrt{\frac{1}{4}A^2 - B} = n\sqrt{-1}$, ſo wird, weil

$$e^{nx\sqrt{-1}} = \cos.\,nx + \sqrt{-1}\,\sin.\,nx \quad \text{und}$$

$$e^{-nx\sqrt{-1}} = \cos.\,nx - \sqrt{-1}\,\sin.\,nx;$$

nach Änderung der Conſtanten:

$$y = e^{-mx}(\mathfrak{C}\cos.\,nx + \mathfrak{D}\sin.\,nx) = \mathfrak{E}e^{-mx}\cos.\,(nx+e).$$

3) Sey endlich $\frac{1}{2}A = m$ und $\sqrt{\frac{1}{4}A^2 - B} = o$, oder im erſten Falle $n = o$, ſo wird, weil $e^{-nx} = 1 - nx$ und $e^{nx} = 1 + nx$ iſt,

$$y = e^{-mx}(\mathfrak{C} + \mathfrak{D}x).$$

Zusatz 1.

§. 776. Um also das Integrale der vorgelegten Gleichung zu bestimmen, muß man die Wurzeln der Gleichung $v^2 + Av + B = o$ suchen, und nach Auffindung derselben wird die Bestimmung des vollständigen Integrals keine Schwierigkeit mehr haben.

Zusatz 2.

§. 777. Die quadratische Gleichung

$$v^2 + Av + B = o$$

hat eine merkwürdige Analogie mit der vorgelegten Gleichung

$$d^2y + Ady dx + Bydx^2 = o,$$

denn sie entsteht aus dieser, wenn man 1, v, v^2 statt y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ setzt.

Zusatz 3.

§. 778. Hat man sich aber einmal die algebraische Gleichung $v^2 + Av + B = o$ gebildet, und ist $(v + \alpha)$ ein Factor derselben, so ergibt sich aus demselben sogleich das particuläre Integrale $y = \mathfrak{A}e^{-\alpha x}$, und auf dieselbe Weise wird der andere Factor $v + \beta$ das particuläre Integrale $y = \mathfrak{B}e^{-\beta x}$ darbiethen, und durch Verbindung beyder endlich erhält man das vollständige Integrale

$$y = \mathfrak{A}e^{-\alpha x} + \mathfrak{B}e^{-\beta x}.$$

Anmerkung.

§. 779. Weiter unten werden wir eine leichtere Methode für die Behandlung solcher Differenzialgleichungen des zweyten Grades lehren, die auch ihre Anwendung findet auf Gleichungen von der Form

$$d^2y + Pdydx + Qydx^2 = o,$$

wo P und Q beliebige Functionen von x seyn sollen, ja es wird sich dieselbe selbst ausdehnen lassen auf die Form

$$d^2y + Pdydx + Qydx^2 = Xdx^2,$$

wenn für X irgend eine Function von x gesetzt wird. Jene Methode wird sich nämlich daraus ableiten lassen, daß in solchen Gleichungen die Variable y mit ihren Differenzialien dy und d^2y durchaus nur in der ersten Potenz oder gar nicht erscheint, und mit Hülfe derselben wird sich die Auflösung auf eine Differenzialgleichung des ersten Grades

zurückleiten lassen, in welchem Falle dann die Operation für beendet zu halten ist; wenn man aber auf diese Art eine Differenzialgleichung des zweyten Grades auf eine Differenzialgleichung des ersten Grades zurückführt, so muß man sich wohl in Acht nehmen, daß man diese Reduction nicht für eine Integration hält, auf welche man nämlich bloß mit Hülfe einer zweckmäßigen Substitution gekommen ist, denn man hat demungeachtet noch zwey Integrationen auszuführen, durch welche eben so viele willkürliche Constanten eingeführt werden, wenn das vollständige Integrale verlangt wird, wie wir es in diesem Beyspiele, als im vorhergehenden deutlich sehen.

Beyspiel 2.

§. 780. Man bestimme das vollständige Integrale folgender Differenzialgleichung des zweyten Grades:

$$ab\,d^2y = dx\sqrt{y^2\,dx^2 + a^2\,dy^2}.$$

Wird $dy = p\,dx$ und $dp = q\,dx$ gesetzt, so geht diese Gleichung über in folgende:

$$abq = \sqrt{y^2 + a^2p^2} = \frac{ab\,p\,dp}{dy}, \text{ weil } q = \frac{p\,dp}{dy}$$

ist, und da diese Gleichung homogen ist, setze man $p = \frac{y}{u}$, so wird

$$y\,dy\sqrt{1 + \frac{a^2}{u^2}} = \frac{aby}{u^3}(u\,dy - y\,du), \text{ oder}$$

$$u^2\,dy\sqrt{a^2 + u^2} = abu\,dy - aby\,du,$$

und demnach wird

$$\frac{dy}{y} = \frac{ab\,du}{abu - u^2\sqrt{a^2 + u^2}}.$$

Man setze $\sqrt{a^2 + u^2} = su$, so wird

$$u^2 = \frac{a^2}{s^2 - 1}, \quad \frac{du}{u} = \frac{-s\,ds}{s^2 - 1} \text{ und } \frac{dy}{y} = \frac{-bs\,ds}{bs^2 - as - b} = \frac{-s\,ds}{s^2 - 2ns - 1},$$

wenn $\frac{a}{b} = 2n$ gesetzt wird. Folglich ist

$$\frac{2\,dy\sqrt{n^2+1}}{y} = \frac{-ds\,(n + \sqrt{n^2+1})}{s - n - \sqrt{n^2+1}} + \frac{ds\,(n - \sqrt{n^2+1})}{s - n + \sqrt{n^2+1}},$$

und daher

$$y^2\sqrt{n^2+1} = \frac{C\,(s - n + \sqrt{n^2+1})^{n - \sqrt{n^2+1}}}{(s - n - \sqrt{n^2+1})^{n + \sqrt{n^2+1}}}.$$

Es wird also y durch s gegeben; man setze daher $y = S$, so wird

$$u = \frac{a}{\sqrt{s^2 - 1}}, \quad p = \frac{S\sqrt{s^2 - 1}}{a} \quad \text{und}$$

$$dx = \frac{a\,dS}{S\sqrt{s^2 - 1}} \quad \text{oder} \quad dx = \frac{-\,a\,s\,ds}{(s^2 - 2ns - 1)\sqrt{s^2 - 1}},$$

welche Formel man rational darstellen und durch Logarithmen oder Kreisbogen integriren kann.

Beyspiel 3.

§. 781. Man setze $dy = p\,dx$ und $dp = q\,dx$, und bestimme dann das Integrale folgender Gleichung:

$$\frac{(p^2 + y^2)\sqrt{p^2 + y^2}}{2p^2 + y^2 - qy} = ny.$$

Weil $q = \frac{p\,dp}{dy}$ ist, so wird

$$dy\,(p^2 + y^2)\sqrt{p^2 + y^2} = 2np^2 y\,dy + ny^3\,dy - ny^2\,p\,dp;$$

und da diese Gleichung homogen ist, setze man $p = uy$, so wird man erhalten:

$$y^3\,dy\,(u^2 + 1)^{\frac{3}{2}} = 2nu^2 y^3\,dy + ny^3\,dy - nu^2 y^3\,dy - nuy^4\,du,$$

und hieraus ergibt sich

$$\frac{dy}{y} = \frac{-\,nu\,du}{(u^2 + 1)\sqrt{1 + u^2} - nu^2 - n} = \frac{nu\,du}{(u^2 + 1)(n - \sqrt{1 + u^2})};$$

es wird also y durch u bestimmt, und daher wird $p = uy$ und

$$dx = \frac{dy}{uy} = \frac{n\,du}{(u^2 + 1)(n - \sqrt{1 + u^2})}.$$

Für den Fall, wo $n = 1$ ist, wird

$$\frac{dy}{y} = \frac{-\,u\,du}{(u^2 + 1)\,[\sqrt{u^2 + 1} - 1]} = \frac{-\,du\,[1 + \sqrt{1 + u^2}]}{u\,(u^2 + 1)} \quad \text{und}$$

$$dx = \frac{-\,du\,(1 + \sqrt{1 + u^2})}{u^2(u^2 + 1)}.$$

Es ist aber

$$\int \frac{du}{u\,(u^2 + 1)} = l \cdot \frac{u}{\sqrt{u^2 + 1}}; \quad \int \frac{du}{u^2(u^2 + 1)} = -\frac{1}{u} - \text{arc. tang. } u;$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 + 1}} = l \cdot \frac{\sqrt{u^2 + 1} - 1}{u}; \quad \int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2 + 1}} = -\frac{\sqrt{u^2 + 1}}{u};$$

und demnach erhält man:

$$y = \frac{C\sqrt{u^2+1}}{\sqrt{u^2+1}-1} = \frac{C\sqrt{u^2+1}}{u^2}\left[\sqrt{u^2+1}+1\right], \text{ und}$$

$$x = D + \frac{\sqrt{u^2+1}+1}{u} + \text{arc. tang. } u.$$

Hieraus folgt ferner:

$$\frac{1}{\sqrt{u^2+1}} = 1 - \frac{a}{y} \text{ und } u = \frac{\sqrt{2ay-a^2}}{y-a}; \text{ also ist}$$

$$x = D + \frac{\sqrt{2y-a}}{a} + \text{arc. cos. } \frac{y-a}{y}.$$

Führt man aber den Winkel φ, dessen Cosinus $= \frac{y-a}{y}$ ist, in die Rechnung ein, so stellen sich die obigen Gleichungen unter folgenden Formen dar:

$$y = \frac{a}{1-\cos.\varphi} \text{ und } x = 2 + \varphi + \text{cotang.} \tfrac{1}{2}\varphi.$$

Zusatz 1.

§. 782. Aus der anfangs gefundenen abgesonderten Gleichung ergibt sich eine besondere Auflösung, wenn man der Größe u einen solchen constanten Werth beylegt, daß der Nenner verschwindet; wenn man nämlich

$$u = \sqrt{n^2-1}; \text{ also } p = y\sqrt{n^2-1} \text{ und } dx\sqrt{n^2-1} = \frac{dy}{y}$$

setzt, und dann erhält man $ly = la + x\sqrt{n^2-1}$.

Zusatz 2.

§. 783. Wenn $n = 1$ ist, so gibt dieser besondere Fall $y = a$ für jeden Werth der andern Veränderlichen; denn es wird $u = o$, also auch $p = o$, so daß aus der Gleichung $dy = p\,dx$ die Größe x sich nicht bestimmen läßt.

Anmerkung.

§. 784. Wenn y den Leitstrahl, der von einem fixen Puncte zu einer beliebigen Curve gezogen wird, und x den Neigungswinkel desselben gegen irgend eine der Lage nach gegebenen geraden Linie bezeichnet, so drückt die Formel $\frac{(p^2+y^2)\sqrt{p^2+y^2}}{2p^2+y^2-qy}$ den Krümmungs-

halbmeſſer dieſer Curve aus. In dem vorgelegten Beyſpiele wird alſo eine Curve von der Beſchaffenheit geſucht, deren Krümmungshalbmeſſer $= ny$ iſt. Dieſer Aufgabe leiſtet, wenn $n = 1$ iſt, auch der Werth $y = a$ Genüge, und bezeichnet einen Kreis, der auch aus der Integralgleichung $y = C\left(1 - \frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}}\right)$ gefunden wird, wenn man die Conſtante C unendlich groß nimmt, denn dann muß nothwendig $u = 0$ und $p = 0$ ſeyn, und ſo bleibt der Winkel x unbeſtimmt. Außer dem Kreiſe aber entſprechen noch unzählige andere Curven unſerer Aufgabe. Iſt $n > 1$, ſo gibt die particuläre Auflöſung $ly = la + x\sqrt{n^2 - 1}$ die logarithmiſche Spirale; übrigens leiſten aber auch hier wieder unzählige andere krumme Linien Genüge. In den Fällen, wo $n < 1$ iſt, gibt es keine ſolche particuläre Auflöſung, ſondern man muß die für $\frac{dy}{y}$ und dx gefundenen Formeln wirklich integriren.

Beyſpiel 4.

§. 785. Eine ſolche Gleichung zwiſchen x und y zu beſtimmen, daß, wenn $dy = pdx$ und $dp = qdx$ geſetzt wird, die Gleichung

$$\frac{(p^2 + y^2)\sqrt{p^2 + y^2}}{2p^2 + y^2 - qy} = a$$

Statt finde.

Weil $q = \frac{pdp}{dy}$ iſt, ſo ſetze man $p^2 + y^2 = z^2$, und man wird, weil $pdp = qdy$ iſt, erhalten $qdy + ydy = zdz$ oder $q + y = \frac{zdz}{dy}$; die vorgelegte Gleichung aber erhält die Form:

$$z^3 = a(2z^2 - y^2 - qy) = a\left(2z^2 - \frac{yzdz}{dy}\right), \text{ oder}$$

$$z^2 dy = 2azdy - aydz, \text{ und demnach wird}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{adz}{2az - z^2}, \text{ oder } \frac{2dy}{y} = \frac{dz}{z} + \frac{dz}{2a - z},$$

alſo durch Integration:

$$y^2 = \frac{Cz}{2a - z} \text{ und } p^2 = z^2 - \frac{Cz}{2a - z} = \frac{-Cz + 2az^2 - z^3}{2a - z}$$

Es iſt aber $z = \frac{2ay^2}{C + y^2}$; alſo

$$p^2 = \frac{4a^2y^4}{(C + y^2)^2} - y^2 = \frac{y^2[4a^2y^2 - (C + y^2)^2]}{(C + y^2)^2},$$

und hieraus ergibt ſich demnach

$$dx = \frac{(C + y^2)\,dy}{y\sqrt{4a^2y^2 - (C+y^2)^2}};$$

oder wenn $y^2 = u$ geſetzt wird:

$$dx = \frac{(C + u)\,du}{2u\sqrt{4a^2u - (C+u)^2}}.$$

Dieſe Gleichung ſtellt ſich unter einer leichter zu behandelnden Form dar, wenn man

$$u = 2a^2 - C + 2a\cos.\varphi\sqrt{a^2 - C}$$

ſetzt, denn dann wird

$$dx = \frac{-a\,d\varphi\,[a + \cos.\varphi\sqrt{a^2 - C}]}{2a^2 - C + 2a\cos.\varphi\sqrt{a^2 - C}}, \text{ oder}$$

$$a\,dx = -d\varphi - \frac{C\,d\varphi}{2a^2 - C + 2a\cos.\varphi\sqrt{a^2 - C}}.$$

Die Integration dieſer Gleichung gibt

$$2x = 2 - \varphi - \text{arc. cos.}\frac{m + \cos.\varphi}{1 + m\cos.\varphi};$$

und wenn $m = \frac{2a\sqrt{a^2 - C}}{2a^2 - C}$ geſetzt wird, alſo

$$C = \frac{2a^2\sqrt{1 - m^2}}{1 + \sqrt{1 - m^2}} \text{ und } \sqrt{a^2 - C} = \frac{ma}{1 + \sqrt{1 - m^2}},$$

folglich $y^2 = \frac{2a^2(1 + m\cos.\varphi)}{1 + \sqrt{1 - m^2}}$; ſo findet man

$$\cos.\varphi = \frac{y^2[1 + \sqrt{1 - m^2}] - 2a^2}{2ma^2} \text{ und}$$

$$\frac{m + \cos.\varphi}{1 + m\cos.\varphi} = \frac{y^2[1 + \sqrt{1 - m^2}] - 2a^2(1 - m^2)}{my^2[1 + \sqrt{1 - m^2}]}.$$

Zuſatz 1.

§. 786. Da $y^2 = \frac{2a^2(1 + m\cos.\varphi)}{1 + \sqrt{1 - m^2}}$ iſt, ſo wird

$$y^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos.\varphi, \text{ wenn}$$

$$b = \frac{a[1 - \sqrt{1 - m^2}]}{m}$$

geſetzt wird; man erhält alſo

$$m = \frac{2ab}{a^2 + b^2} \text{ und } \sqrt{1 - m^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}, \text{ folglich}$$

$$2x = 2 - \varphi - \text{arc. cos.} \frac{2ab + (a^2 + b^2)\cos.\varphi}{a^2 + b^2 + 2ab\cos.\varphi}, \text{ oder}$$

$$2x = 2 - \varphi - \text{arc. sin.} \frac{(a^2 - b^2)\sin.\varphi}{y^2}.$$

Zusatz 2.

§. 787. Beziehen wir, wie oben, den Leitstahl y mit dem Winkel x auf eine krumme Linie, so muß diese Curve ein mit dem Halbmesser $= a$ beschriebener Kreis seyn. Es wird aber

$$dx = \frac{d\varphi\,(a^2 - ab\cos.\varphi)}{a^2 + b^2 - 2ab\cos.\varphi},$$

wenn man $y^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos.\varphi$ setzt, und demnach

$$x = z + \text{arc. tang.} \frac{a\sin.\varphi}{a\cos.\varphi - b};$$

die Anwendung hievon auf die Geometrie macht die Sache ganz deutlich.

Beyspiel 5.

§. 788. Das Integrale der Gleichung

$$d^2y\,(y\,dy + a\,dx) = dy\,(dx^2 + dy^2),$$

bey welcher das Element dx constant genommen ist, zu bestimmen.

Wenn wir $dy = p\,dx$ und $dp = q\,dx$ setzen, so erhalten wir

$q(py + a) = p(1 + p^2)$, und weil $q = \frac{p\,dp}{dy}$ ist,

$$dp\,(py + a) = dy\,(1 + p^2), \text{ oder}$$

$$dy - \frac{py\,dp}{1 + p^2} = \frac{a\,dp}{1 + p^2}.$$

Die Integration dieser Gleichung gibt:

$$\frac{y}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}} + b, \text{ also}$$

$$y = ap + b\sqrt{1 + p^2} \text{ und}$$

$$x = \int \frac{dy}{p} = a\,l\,p + b\,l\,[p + \sqrt{1 + p^2}] + C,$$

wo also die beyden Größen x und y durch dieselbe Veränderliche p bestimmt werden. Setzt man die Constante $b = 0$, so erhält man das particuläre Integrale

$$y = ap \text{ und } x = a\,l\,p + C = a\,l\frac{y}{a} + C,$$

oder, durch Exponentialgrößen ausgedrückt:

$$y = C \cdot e^{\frac{x}{a}}.$$

Wird aber $b = a$ genommen, so findet man, weil

$$p + \sqrt{1 + p^2} = \frac{y}{a} \quad \text{und} \quad p = \frac{y^2 - a^2}{2ay} \quad \text{ist},$$

$$x = a l \frac{y^2 - a^2}{2a^2} + C \quad \text{oder} \quad y^2 = a^2 + Ce^{x:a}.$$

Beyspiel 6.

§. 789. Man bestimme das Integrale folgender Differenzialgleichung:

$$dy^2 - y d^2 y = n\sqrt{dx^2 dy^2 + a^2 (d^2 y)^2},$$

bey welcher dx constant genommen ist.

Für $dy = p dx$ und $dp = q dx$ findet man

$$p^2 - qy = n\sqrt{p^2 + a^2 q^2},$$

welche Gleichung, so bald $q = pu$, also auch $\frac{p dp}{dy} = pu$, und daher $dp = u dy$ gesetzt wird, sich verwandelt in

$$p^2 - puy = np\sqrt{1 + a^2 u^2}, \quad \text{oder}$$

$$p - uy = n\sqrt{1 + a^2 u^2}.$$

Weil nun $dp = u dy$ ist, so differenzire man diese Gleichung, und man erhält

$$- y du = \frac{n a^2 u du}{\sqrt{1 + a^2 u^2}},$$

also entweder $du = o$ oder $y = \frac{- n a^2 u}{\sqrt{1 + a^2 u^2}}$.

1) Für den Fall, daß $du = o$ ist, wird $u = \alpha$, $p = \alpha y + \beta$ und $dx = \frac{dy}{\alpha y + \beta}$, also

$$\alpha x = l(\alpha y + \beta) + C.$$

2) Ist aber $y = \frac{- n a^2 u}{\sqrt{1 + a^2 u^2}}$, so erhält man

$$p = uy + n\sqrt{1 + a^2 u^2} = \frac{n}{\sqrt{1 + a^2 u^2}}, \quad \text{und daher}$$

$$dx = \frac{dy}{p} = \frac{- a^2 du}{1 + a^2 u^2} \quad \text{und} \quad x = - a \text{ arc. tang. } au + C,$$

oder es iſt, weil $u = \frac{y}{a\sqrt{n^2a^2 - y^2}}$, die zwiſchen x und y geſuchte Gleichung

$$\frac{b - x}{a} = \text{arc. tang.} \frac{y}{\sqrt{n^2a^2 - y^2}} = \text{arc. sin.} \frac{y}{na},$$

folglich wird

$$y = na \text{ sin.} \frac{b - x}{a}.$$

Übrigens iſt dieſe Relation bloß für ein particuläres Integrale zu halten.

Kapitel III.

Von den homogenen Differenzialgleichungen des zweyten Grades, und von jenen, welche sich auf diese Form zurückleiten lassen.

Aufgabe 98.

§. 790. Die Natur der homogenen Differenzialgleichungen des zweyten Grades zu erklären, und sie, wenn $dy = pdx$ und $dp = qdx$ gesetzt wird, auf eine endliche Form zu bringen.

Auflösung.

Betrachtet man das Element dx als constant, so heißt eine auf gewöhnliche Art ausgedrückte Differenzialgleichung des zweyten Grades homogen, wenn alle Glieder der Gleichung dieselbe Anzahl von Dimensionen enthalten, so bald man nicht allein den Veränderlichen x und y, sondern auch ihren Differenzialien dx und dy, so wie dem zweyten Differenziale d^2y nur eine Dimension beylegt, wie dieß der Fall ist bey der Gleichung

$$x^2 d^2y + x dx^2 + y dy^2 = 0,$$

wo in jedem Gliede drey Dimensionen erscheinen.

Setzen wir also $\frac{dy}{dx} = p$ und $\frac{dp}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = q$, so ist p als eine Größe zu betrachten, die keine Dimension enthält, q aber als eine Größe, die eine negative Dimension hat. Es wird demnach eine Differenzialgleichung des zweyten Grades, welche auf die hier angenommene Form zurückgeführt ist, so daß sie nur die endlichen Größen x, y, p und q enthält, homogen seyn, wenn in den einzelnen Gliedern der Gleichung dieselbe Anzahl von Dimensionen erhalten wird, so bald man den Größen x und y eine Dimension, der Größe p aber keine, und der Größe q eine negative Dimension beylegt. So oft also umgekehrt in einer zwischen den vier Größen x, y, p und q vorgelegten Gleichung diese Eigenschaft vorhanden ist, so wird diese Gleichung homogen seyn, und wird, auf gewöhnliche Art ausgedrückt, offenbar den Charakter der Homogeneität an sich tragen.

Zuſatz 1.

§. 791. Setzt man alſo in einer ſolchen, zwiſchen den Größen x, y, p und q gegebenen homogenen Gleichung $y = ux$ und $q = \frac{v}{x}$, ſo werden alle Glieder derſelben die nämliche Potenz von x enthalten, und wenn man demnach dieſe Potenz durch Diviſion aus der Gleichung wegſchafft, ſo kömmt bloß eine Gleichung zwiſchen den drey Veränderlichen u, v und p zum Vorſchein.

Zuſatz 2.

§. 792. Ein Kennzeichen für die Beurtheilung der Homogeneität einer zwiſchen den vier Größen x, y, p und q vorgelegten Gleichung beſteht alſo darin, daß wenn $y = ux$ und $q = \frac{v}{x}$ geſetzt wird, die Größe x aus der Rechnung ganz verſchwindet.

Zuſatz 3.

§. 793. Hat man durch dieſe Subſtitution eine Gleichung zwiſchen den drey Größen u, v und p erhalten, ſo läßt ſich dann aus derſelben nach Belieben entweder p durch u und v, oder v durch u und p, oder endlich u durch v und p beſtimmen.

Anmerkung.

§. 794. Wir haben den Begriff der Homogeneität bey den Differenzialgleichungen des zweyten Grades eben ſo feſtgeſetzt, wie wir es bey den Differenzialgleichungen des erſten Grades gethan haben, bey welchen letzteren ſich die Homogeneität bloß aus den Veränderlichen x und y beurtheilen läßt, weil die Differenzialien an und für ſich dieſelbe Anzahl von Dimenſionen haben müſſen. Allein bey den Differenzialgleichungen des zweyten Grades muß man bey der Beſtimmung der Anzahl der Dimenſionen, außer den Veränderlichen x und y, auch noch die Größe q berückſichtigen, indem man derſelben eine negative Dimenſion beyzulegen hat; der Buchſtabe p aber hat bey dieſer Beurtheilung offenbar gar keinen Einfluß, und ſtört alſo auch die Homogeneität nicht, wie er auch immer in der Gleichung erſcheinen mag. Allein es kommt ſehr viel darauf an, die Natur der homogenen Differenzialgleichungen des zweyten Grades genau zu kennen, da ihre Auflöſung auf die Reſolution der Differenzialgleichungen des erſten Grades zurückgeführt werden kann, ſo zwar, daß wenn dieſe letztere gelingt,

auch die Integration der Differenzialgleichungen des zweyten Grades selbst bekannt ist, wie wir in dem folgenden Probleme ausführlicher zeigen werden.

Aufgabe 99.

§. 795. Die Auflösung einer gegebenen homogenen Differenzialgleichung des zweyten Grades auf die Integration einer Differenzialgleichung des ersten Grades zurückzuführen.

Auflösung.

Hat man die Gleichung, indem man $dy = pdx$ und $dp = qdx$ setzt, auf die hier angenommene Form zurückgeführt, so daß eine Gleichung zwischen den vier endlichen Größen x, y, p und q erhalten wird, so setze man $y = ux$ und $q = \frac{v}{x}$, und es wird auf diese Art, weil die Gleichung homogen ist, die Größe x aus der Rechnung ganz verschwinden, und eine Gleichung zwischen den drey Größen u, v und p erscheinen, aus welcher man die eine Größe durch die beyden andern bestimmen kann. Da nun also $dy = pdx$ ist, so wird

$$udx + xdu = pdx, \quad \text{und daher} \quad \frac{dx}{x} = \frac{du}{p - u};$$

weil ferner $dp = qdx$ ist, so wird

$$dp = \frac{vdx}{x}, \quad \text{und daher} \quad \frac{dx}{x} = \frac{dp}{v},$$

und wenn die beyden Werthe von $\frac{dx}{x}$ einander gleichgestellt werden, so erhält man $\frac{du}{p - u} = \frac{dp}{v}$, oder $vdu = pdp - udp$. Bestimmt man demnach aus dieser Gleichung die Größe v durch die beyden andern p und u, so erhält man eine Differenzialgleichung des ersten Grades zwischen den beyden Veränderlichen p und u, und steht die Integration in unserer Macht, so daß p durch u gegeben wird, so integrire man die Gleichung $\frac{dx}{x} = \frac{du}{p - u}$, in welcher die Veränderlichen x und u abgesondert erscheinen, und man erhält so x durch u ausgedrückt, also wird dann $y = ux$, oder man setze in diesem Integrale sogleich $\frac{y}{x}$ statt u, so erhält man die gesuchte Gleichung zwischen x und y.

Zusatz 1.

§. 796. Die ganze Rechnung ist also abhängig von der Integration der einfachen Differenzialgleichung $v\,du = p\,dp - u\,dp$, und kann diese mit Hülfe der oben gelehrten Regeln ausgeführt werden, so ist auch die Integration unserer Differenzialgleichung des zweyten Grades zugleich bekannt.

Zusatz 2.

§. 797. Es ist aber auch zugleich klar, daß die Auflösung solcher Gleichungen eine doppelte Integration erfordere, und daher werden in dem Ausdrucke für das vollständige Integrale zwey willkürliche constante Größen erscheinen.

Zusatz 3.

§. 798. Wenn die Integration der Gleichung

$$v\,du = p\,dp - u\,dp$$

aber auch nicht gelingen sollte, so ist es dennoch schon ein großer Gewinn, die Rechnung bis dahin gebracht zu haben, da wir oben eine allgemeine Methode gelehrt haben, die Integralien aller Differenzialgleichungen des ersten Grades näherungsweise zu bestimmen.

Anmerkung.

§. 799. Es wird sich also der Mühe lohnen, jene Fälle in Erwägung zu ziehen, in welchen die Gleichung $v\,du = p\,dp - u\,dp$ die Integration zuläßt; wir werden demnach untersuchen, was v für eine Function von p und u seyn müsse, damit die Integrabilität eintrete. Zuerst ist einleuchtend, daß dieß der Fall seyn werde, wenn v eine homogene Function des ersten Grades von p und u ist, weil dann diese Gleichung selbst homogen wird, und nach den oben gelehrten Vorschriften integrirt werden kann. Es gelingt aber ferner die Integration auch dann, wenn v irgend eine Function von p ist, weil dann die andere Veränderliche u den ersten Grad nicht übersteigt, und der Gleichung $du + \frac{u\,dp}{v} = \frac{p\,dp}{v}$ entspricht das Integrale

$$e^{\int \frac{dp}{v}} u = \int e^{\frac{dp}{v}} \cdot \frac{p\,dp}{v}.$$

Drittens wird sich die Integration ausführen lassen, wenn v irgend eine Function von $p - u$ ist; denn wird $p - u = s$ gesetzt, wo also

dann v als Function von s erscheint, so wird unsere Gleichung, weil $p = s + u$ ist, übergehen in $v\,du = s\,ds + s\,du$, und daher wird $du = \frac{s\,ds}{v - s}$ und $u = \int \frac{s\,ds}{v - s}$, welches Integrale zu den einfachen Formeln zu rechnen ist. Viertens, wenn $s = p - u$ bleibt, und die Größen P, Q und R bezeichnen was immer für Functionen von s, wird sich unsere Gleichung $v\,du = s\,ds + s\,du$ ebenfalls integriren lassen, so bald $v = s + \frac{Ps}{Qu + Ru^n}$ ist, denn dann wird $P\,du = Q\,u\,ds + R\,u^n\,ds$. Fünftens leuchtet auch ein, daß, wenn V und U was immer für Functionen von u bezeichnen, und

$$v = s + Vs^2 + Us^n$$

ist, die Integration gleichfalls ausgeführt werden könne, denn dann verwandelt sich unsere Gleichung in $V\,s\,du + U\,s^{n-1}\,du = ds$. Wenn endlich allgemein die Differenzialgleichung $ds = Z\,du$ integrabel ist, wobey Z eine Function der zwey Veränderlichen s und u bezeichnet, so werden wir, da unsere Gleichung $s\,ds = (v - s)\,du$ ist, die Gleichung $v = s + Zs$ für alle die Integration zulassende Fälle erhalten.

Beyspiel 1.

§. 800. Man bestimme das Integrale folgender Gleichung:

$$x^2\,d^2y = x\,dx\,dy + n\,y\,dx^2,$$

bey welcher das Element dx constant gesetzt wurde.

Wird $dy = p\,dx$ und $dp = q\,dx$ gesetzt, so erhält man $q\,x^2 = p\,x + n\,y$; also wenn $y = u\,x$ genommen wird,

$$q\,x = p + n\,u = v,$$

so daß v eine Function des ersten Grades von p und u bezeichnet, und unsere Gleichung $(p + n\,u)\,du = p\,dp - u\,dp$ homogen werde. Da also $n\,u\,du + p\,du + u\,dp = p\,dp$ ist, so findet man durch Integration

$C + n\,u^2 + 2\,p\,u = p^2$ und $p = u + \sqrt{C + (n+1)\,u^2}$; man erhält demnach

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{\sqrt{C + (n+1)\,u^2}},$$

und wenn man diese Gleichung von neuem integrirt:

$$lx = \frac{1}{\sqrt{n+1}}\, l\,\frac{u\sqrt{n+1} + \sqrt{C + (n+1)\,u^2}}{D}, \quad \text{oder}$$

$$Dx^{\sqrt{n+1}} = u\sqrt{n+1} + \sqrt{C + (n+1)u^2},$$

und daher

$$D^2x^{2\sqrt{n+1}} - 2Dx^{\sqrt{n+1}}u\sqrt{n+1} = C,$$

oder wenn $D = f\sqrt{n+1}$ und $C = g(n+1)$ gesetzt wird:

$$f^2x^{2\sqrt{n+1}} - 2fx^{\sqrt{n+1}}u = g,$$

wobey $u = \frac{y}{x}$ ist.

Für den Fall, daß $n = -1$ ist, wird man wegen $\frac{dx}{x} =$ erhalten:

$$al\frac{x}{a} = u = \frac{y}{x}, \text{ also } y = axl\frac{x}{a}.$$

Bezeichnet aber $n+1$ eine negative Zahl, so werden durch Integration auch Kreisbogen in die Gleichung eingeführt werden.

Zusatz 1.

§. 801. Wenn $n = 0$ ist, so wird $f^2x^2 - 2fy = g$ das v ständige Integrale der Gleichung $x^2d^2y = xdxdy$ seyn, wel Fall für sich klar ist, weil aus der Gleichung $\frac{d^2y}{dy} = \frac{dx}{x}$ sich sogl $\frac{dy}{dx} = fx$ und dann $2y = fx^2 - \frac{g}{f}$ ergibt.

Zusatz 2.

§. 802. Wenn $n = 3$ ist, so ist $f^2x^4 - 2fxy = g$ das v ständige Integrale der Gleichung $x^2d^2y = xdxdy + 3ydx^2$. D ist auch der Fall, wenn man -2 statt $\sqrt{n+1}$ schreibt, denn wird dann $\frac{f^2}{x^4} - \frac{2fy}{x^3} = g$ und $f^2 - 2fxy = gx^4$; beyde G chungen sind demnach unter der Form $y = \frac{\alpha}{x} + \beta x^3$ enthalten.

Beyspiel 2.

§. 803. Das vollständige Integrale der Differe zialgleichung

$$\frac{x^2d^2y}{dx} = \sqrt{mx^2dy^2 + ny^2dx^2}$$

zu bestimmen, wenn das Element dx als unveränd lich betrachtet wird.

Weil $dy = pdx$ und $dp = qdx$ iſt, ſo erhalten wir

$$qx^2 = \sqrt{mp^2x^2 + ny^2},$$

oder wenn $y = ux$ geſetzt wird:

$$qx = \sqrt{mp^2 + nu^2} = v, \text{ weil } q = \frac{v}{x} \text{ iſt.}$$

Weil alſo $\frac{dx}{x} = \frac{du}{p-u} = \frac{dp}{v}$ iſt, ſo wird

$$du\sqrt{mp^2 + nu^2} = (p-u)\,dp,$$

welches eine homogene Gleichung iſt. Man ſetze daher $p = su$, ſo erhält man

$$du\sqrt{ms^2 + n} = (s-1)(sdu + uds), \text{ alſo}$$

$$\frac{du}{u} = \frac{(s-1)\,ds}{\sqrt{ms^2+n} - s^2 + s},$$

und demnach wird

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{(s-1)u} = \frac{ds}{\sqrt{ms^2+n} - s^2 + s},$$

folglich wird ſowohl $u = \frac{y}{x}$, als auch x durch dieſelbe Veränderliche s beſtimmt.

Beyſpiel 3.

§. 804. Das Integrale der Gleichung

$$nx^3d^2y = (ydx - xdy)^2$$

zu beſtimmen, wenn das Element dx als conſtant betrachtet wird.

Wird $dy = pdx$ und $dp = qdx$ geſetzt, ſo wird

$$nx^3q = (y - px)^2 = nx^2v,$$

weil $q = \frac{v}{x}$ iſt, und wenn man nun $y = ux$ ſetzt, ſo findet man

$$nv = (u-p)^2 \quad \text{und} \quad \frac{dx}{x} = \frac{du}{p-u} = \frac{dp}{v} = \frac{ndp}{(p-u)^2},$$

woraus ſich $ndp = pdu - udu$ ergibt, welche Gleichung ſich für $p - u = s$ verwandelt in $ndu + nds = sdu$ oder $du = \frac{nds}{s-n}$, daher iſt $u = nl\frac{s-n}{\alpha}$. Dann aber wird, wegen $p - u = s$:

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{s} = \frac{nds}{s(s-n)} \quad \text{und} \quad lx = l\frac{s-n}{\beta s}, \text{ alſo}$$

$$x = \frac{s-n}{\beta s} \quad \text{und} \quad y = nxl\frac{s-n}{\alpha}.$$

Da alſo

$$s = \frac{n}{1 - \beta x} \text{ iſt, ſo wird } y = nx\,l\frac{n\beta x}{\alpha(1-\beta x)}.$$

Zuſatz.

§. 805. Die Gleichung $nx^3q = (y - px)^2$ läßt ſich etw leichter auflöſen, wenn man $y - px = z$ ſetzt, denn dann wi $-xdp = dz$, und weil $qdx = dp$ iſt, ſo erhält man

$$nx^3dp = z^2dx = -nx^2dz, \text{ und daher}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a} - \frac{n}{z} \text{ oder } \frac{x-a}{ax} = \frac{n}{y-px}, \text{ alſo}$$

$$y - px = \frac{nax}{x-a} = \frac{ydx - xdy}{dx}.$$

Es wird daher

$$\frac{ydx - xdy}{x^2} = \frac{nadx}{x(x-a)} \text{ und } \frac{y}{x} = nl\frac{x}{x-a} + C$$

wie vorhin.

Beyſpiel 4.

§. 806. Man beſtimme das Integrale der Gl chung

$$(dx^2 + dy^2)\sqrt{dx^2 + dy^2} = ndxd^2y\sqrt{x^2 + y^2},$$

wobey das Element dx conſtant geſetzt iſt.

Wird $dy = pdx$ und $dp = qdx$ geſetzt, ſo nimmt die t gelegte Gleichung folgende Form an:

$$(1 + p^2)\sqrt{1 + p^2} = nq\sqrt{x^2 + y^2},$$

und wenn $y = ux$ und $q = \frac{v}{x}$ geſetzt wird:

$$(1 + p^2)\sqrt{1 + p^2} = nv\sqrt{1 + u^2}.$$

Da nun $\frac{dx}{x} = \frac{du}{p-u} = \frac{dp}{v}$ iſt, ſo wird man, weil

$$v = \frac{(1 + p^2)\sqrt{1 + p^2}}{n\sqrt{1 + u^2}} \text{ iſt, erhalten:}$$

$$(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}du = n(p - u)\,dp\sqrt{1 + u^2},$$

allein die Auflöſung dieſer Gleichung fällt nicht ſo leicht in die Aug Führt man aber die Rechnung mit Hülfe der Kreisbogen, indem n $p = \text{tang. } \varphi$ und $u = \text{tang. } \omega$ ſetzt, ſo erhält man $dp = \frac{d\varphi}{\cos.}$

$u = \frac{d\omega}{\cos.^2\omega}$, $\sqrt{1+p^2} = \frac{1}{\cos.\varphi}$, $\sqrt{1+u^2} = \frac{1}{\cos.\omega}$ und

$$p - u = \frac{\sin.(\varphi-\omega)}{\cos.\varphi\cos.\omega}, \text{ und daher}$$

$$\frac{1}{\cos.^3\varphi}\cdot\frac{d\omega}{\cos.^2\omega} = \frac{n\sin.(\varphi-\omega)}{\cos.\varphi\cos.\omega}\cdot\frac{1}{\cos.\omega}\cdot\frac{d\varphi}{\cos.^2\varphi}, \text{ oder}$$

$d\omega = n\,d\varphi\sin.(\varphi-\omega) = d\varphi - (d\varphi - d\omega)$, alſo

$$d\varphi = \frac{d\varphi - d\omega}{1 - n\sin.(\varphi-\omega)}.$$

Wird demnach $\varphi - \omega = \psi$ geſetzt, ſo erhält man

$$\varphi = \int\frac{d\psi}{1-n\sin.\psi} \text{ und } \omega = \int\frac{d\psi}{1-n\sin.\psi} - \psi,$$

glich wird, weil $p = \text{tang.}\varphi$ und $u = \text{tang.}\omega$ iſt,

$$\frac{dx}{x} = \frac{du\cos.\varphi\cos.\omega}{\sin.\psi} = \frac{d\omega\cos.\varphi}{\sin.\psi\cos.\omega} = \frac{n\,d\psi\cos.\varphi}{\cos.\omega(1-n\sin.\psi)}.$$

Wenn $n = 1$ iſt, ſo findet man

$$d\varphi = \frac{d\psi}{1-\sin.\psi} = \frac{d\psi(1+\sin.\psi)}{\cos.^2\psi}, \text{ alſo}$$

$$\varphi = \text{tang.}\psi + \frac{1}{\cos.\psi} = \frac{1+\sin.\psi}{\cos.\psi} + \alpha,$$

$$\omega = \frac{1+\sin.\psi}{\cos.\psi} + \alpha - \psi \text{ und}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{d\varphi\cos.\varphi}{\cos.\omega} = \frac{d\varphi\,.\cos.\varphi}{\cos.\varphi\cos.\psi + \sin.\varphi\sin.\psi}.$$

Da aber

$$\varphi - \alpha = \sqrt{\frac{1+\sin.\psi}{1-\sin.\psi}} \text{ iſt, ſo wird}$$

$$\sin.\psi = \frac{(\varphi-\alpha)^2 - 1}{(\varphi-\alpha)^2+1}, \quad \cos.\psi = \frac{2(\varphi-\alpha)}{(\varphi-\alpha)^2+1};$$

glich iſt

$$\frac{dx}{x} = \frac{d\varphi\cos.\varphi\,[(\varphi-\alpha)^2+1]}{2(\varphi-\alpha)\cos.\varphi + (\varphi-\alpha)^2\sin.\varphi - \sin.\varphi}.$$

Zuſatz 1.

§. 807. Wenn in dem Falle, wo $n = 1$ iſt, die Conſtante α endlich groß genommen wird, ſo erhält man $\sin.\psi = 1$, alſo $= 90°$ und $\omega = \varphi - 90°$; dann aber iſt $\frac{dx}{x} = \frac{d\varphi\cos.\varphi}{\sin.\varphi}$ und jet $x = a\sin.\varphi$ und $u = -\text{cotang.}\varphi$, alſo $y = -a\cos.\varphi$ d $x^2 + y^2 = a^2$.

Zusatz 2.

§. 808. In eben diesem Falle, wo $n = 1$ ist, ist, wenn die Constante α nicht unendlich groß genommen wird, der Zähler des Bruches, welcher mit $\frac{dx}{x}$ einerley Werth hat, das Differenziale des Nenners, daher wird

$$x = a\,[(\varphi - \alpha)^2 \sin.\varphi - \sin.\varphi + 2(\varphi - \alpha)\cos.\varphi],$$

dann aber ist

$$\omega = \varphi - \text{arc. tang.}\,\frac{(\varphi-\alpha)^2 - 1}{2(\varphi-\alpha)}, \text{ und daher}$$

$$u = \frac{y}{x} = \text{tang.}\,\omega = \frac{\text{tang.}\,\varphi - \frac{(\varphi-\alpha)^2+1}{2(\varphi-\alpha)}}{1 + \frac{(\varphi-\alpha)^2-1}{2(\varphi-\alpha)}\,\text{tang.}\,\varphi}, \text{ oder}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{2(\varphi-\alpha)\sin.\varphi - (\varphi-\alpha)^2\cos.\varphi + \cos.\varphi}{(\varphi-\alpha)^2\sin.\varphi - \sin.\varphi + 2(\varphi-\alpha)\cos.\varphi}; \text{ folglich}$$

$$y = -a\,[(\varphi-\alpha)^2\cos.\varphi - \cos.\varphi - 2(\varphi-\alpha)\sin.\varphi],$$

$$\text{und } \sqrt{x^2+y^2} = (\varphi-\alpha)^2 + 1.$$

Anmerkung 1.

§. 809. Es läßt sich die Integration auch allgemein ausführen; denn da

$$d\varphi = \frac{d\psi}{1 - n\sin.\psi} \text{ und } \frac{dx}{x} = \frac{n\,d\varphi\cos.\varphi}{\cos.\omega}$$

ist, so erhält man

$$\varphi + \alpha = \frac{1}{\sqrt{1-n^2}}\,\text{arc. cos.}\,\frac{n - \sin.\psi}{1 - n\sin.\psi}.$$

Wird demnach

$(\varphi + \alpha)\sqrt{1-n^2} = \theta$ gesetzt, so wird $\cos.\theta = \frac{n - \sin.\psi}{1 - n\sin.\psi}$, und daher

$$\sin.\psi = \frac{n - \cos.\theta}{1 - n\cos.\theta} \text{ und } \cos.\psi = \frac{\sin.\theta\sqrt{1-n^2}}{1 - n\cos.\theta}.$$

Weil aber $\omega = \varphi - \psi$ ist, so findet man

$$\frac{dx}{x} = \frac{n\,d\varphi\cos.\varphi\,(1 - n\cos.\theta)}{\cos.\varphi\sin.\theta\sqrt{1-n^2} + \sin.\varphi\,(n - \cos.\theta)}.$$

Da nun $d\theta = d\varphi\sqrt{1-n^2}$ ist, so ist das Differenziale dieses Nenners

$$-\,d\varphi\,\sin.\varphi\,\sin.\theta\sqrt{1-n^2}+d\varphi\,\cos.\varphi\,\cos.\theta\,(1-n^2)$$
$$+\,n\,d\varphi\,\cos.\varphi-d\varphi\,\cos.\varphi\,\cos.\theta+d\varphi\,\sin.\varphi\,\sin.\theta\sqrt{1-n^2},$$

welches sich auf den Ausdruck $n\,d\varphi\,\cos.\varphi\,(1-n\,\cos\,\theta)$, nämlich auf den Zähler reduciren läßt. Es ist demnach

$$x = a\,[\cos.\varphi\,\sin.\theta\sqrt{1-n^2}+\sin.\varphi\,(n-\cos.\theta)],\text{ oder}$$
$$x = a\,\cos.\omega\,(1-n\,\cos.\theta),\text{ und daher}$$
$$y = ux = a\,\sin.\omega\,(1-n\,\cos.\theta).$$

Hat man also den Winkel θ angenommen, so suche man den Winkel ψ, so daß

$$\sin.\psi = \frac{n-\cos.\theta}{1-n\,\cos.\theta}\quad\text{und}\quad\cos.\psi = \frac{\sin.\theta}{1-n\,\cos.\theta}\sqrt{1-n^2};$$

dann aber werde

$$\omega = \frac{\theta}{\sqrt{1-n^2}} - \alpha - \psi,$$

so ist das vollständige Integrale

$$x = a\,(1-n\,\cos.\theta)\,\cos.\omega\quad\text{und}\quad y = a\,(1-n\,\cos.\theta)\,\sin.\omega.$$

Anmerkung 2.

§. 810. Ist aber die Zahl n größer als die Einheit, so wird diese Integration unmöglich, und zur Beseitigung dieser Unbequemlichkeit muß man bemerken, daß der Gleichung $d\varphi = \frac{d\psi}{1-n\,\sin.\psi}$ folgendes Integrale entspreche:

$$\varphi+\alpha = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}\,l\,\frac{\sqrt{(n-1)(1+\sin.\psi)}+\sqrt{(n+1)(1-\sin.\psi)}}{\sqrt{(n-1)(1+\sin.\psi)}-\sqrt{(n+1)(1-\sin.\psi)}}.$$

Setzt man daher $(\varphi+\alpha)\sqrt{n^2-1} = \theta$, damit

$$d\theta = d\varphi\sqrt{n^2-1}\quad\text{und}\quad\omega = \varphi-\psi = \frac{\theta}{\sqrt{n^2-1}} - \alpha - \psi$$

werde, so erhält man

$$\frac{e^{\theta}+1}{e^{\theta}-1} = \frac{\sqrt{(n-1)(1+\sin.\psi)}}{\sqrt{(n+1)(1-\sin.\psi)}} = \frac{(n-1)(1+\sin.\psi)}{\cos.\psi\sqrt{n^2-1}},$$

und hieraus findet man

$$\sin.\psi = \frac{e^{\theta}+2n+e^{-\theta}}{ne^{\theta}+2+ne^{-\theta}}\quad\text{und}\quad\cos.\psi = \frac{(e^{\theta}-e^{-\theta})\sqrt{n^2-1}}{ne^{\theta}+2+ne^{-\theta}},$$

so daß sich aus dem Winkel θ die Winkel φ, ψ und ω ergeben.

Weil nun

$$\frac{dx}{x} = \frac{n\,d\varphi\,\cos.\varphi}{\cos.\omega} = \frac{n\,d\varphi\,\cos.\varphi}{\cos.\varphi\,\cos.\psi + \sin.\varphi\,\sin.\psi}$$

ist, so erhält man

$$\frac{dx}{x} = \frac{n\,d\varphi\,\cos.\varphi\,(ne^{\theta} + 2 + ne^{-\theta})}{\cos.\varphi\,(e^{\theta} - e^{-\theta})\sqrt{n^2-1} + \sin.\varphi\,(e^{\theta} + 2n + e^{-\theta})},$$

wobey wieder die Bequemlichkeit Statt findet, daß der Zähler selbst das Differenziale des Nenners ist, wovon man sich durch wirkliche Differenziation bald überzeugen kann. Hieraus ergibt sich demnach

$$x = a\,[\cos.\varphi\,(e^{\theta} - e^{-\theta})\sqrt{n^2-1} + \sin.\varphi\,(e^{\theta} + 2n + e^{-\theta})],$$

oder

$x = a\,\cos.\omega\,(ne^{\theta} + 2 + ne^{-\theta})$, und weil $u = \frac{y}{x} = \text{tang.}\,\omega$ ist, so wird

$$y = a\,\sin.\omega\,(ne^{\theta} + 2 + ne^{-\theta}).$$

Man suche deßhalb zuerst aus dem Winkel θ den Winkel ψ, damit

$$\sin.\psi = \frac{e^{\theta} + 2n + e^{-\theta}}{ne^{\theta} + 2 + ne^{-\theta}} \quad \text{und} \quad \cos.\psi = \frac{(e^{\theta} - e^{-\theta})\sqrt{n^2-1}}{ne^{\theta} + 2 + ne^{-\theta}},$$

und ist dieser gefunden, so setze man den Winkel

$$\omega = \frac{\theta}{\sqrt{n^2-1}} - \alpha - \psi,$$

so werden jene für x und y gefundenen Formeln das vollständige Integrale geben, weil in denselben die zwey willkürlichen Constanten a und α erscheinen.

Anmerkung 3.

§. 811. Da hier der vorzüglichere Theil der Integration durch Zufall gelungen zu seyn scheint, so wird es sich wohl der Mühe lohnen, zu untersuchen, ob vielleicht das Fundament der Integration deutlicher erkannt werden könne. Da also

$$\varphi = \psi + \omega \quad \text{und} \quad d\varphi = \frac{d\psi}{1 - n\,\sin.\psi}, \text{ und daher}$$

$$d\omega = \frac{n\,d\psi\,\sin.\psi}{1 - n\,\sin.\psi} = n\,d\varphi\,\sin.\psi,$$

so wird die Gleichung

$$\frac{dx}{x} = \frac{n\,d\varphi\,\cos.\varphi}{\cos.\omega} \quad \text{wegen} \quad \cos.\varphi = \cos.\psi\,\cos.\omega - \sin.\psi\,\sin.\omega,$$

auf folgende zurückgeführt:

$$\frac{dx}{x} = n\,d\varphi\,\cos.\psi - \frac{n\,d\varphi\,\sin.\psi\,\sin.\omega}{\cos.\omega},$$

und dieſe Gleichung erſcheint, weil

$$d\varphi = \frac{d\psi}{1 - n\,\sin.\psi} \quad \text{und} \quad n\,d\varphi\,\sin.\psi = d\omega$$

iſt, unter folgender integrabeln Form:

$$\frac{dx}{x} = \frac{n\,d\psi\,\cos.\psi}{1 - n\,\sin.\psi} - \frac{d\omega\,\sin.\omega}{\cos.\omega},$$

und hieraus ergibt ſich

$$x = \frac{a\,\cos.\omega}{1 - n\,\sin.\psi} \quad \text{und} \quad y = \frac{a\,\sin.\omega}{1 - n\,\sin.\psi},$$

weil $y = ux = x\,\text{tang.}\,\omega$ iſt.

So haben wir denn alſo im Allgemeinen unſere vorgelegte Gleichung integrirt. Setzen wir zwiſchen den Winkeln ω und ψ die Relation feſt, daß

$$d\omega = \frac{n\,d\psi\,\sin.\psi}{1 - n\,\sin.\psi} \text{ iſt, ſo wird}$$

$$x = \frac{a\,\cos.\omega}{1 - n\,\sin.\psi} \quad \text{und} \quad y = \frac{a\,\sin.\omega}{1 - n\,\sin.\psi}.$$

Setzen wir alſo $\sqrt{x^2 + y^2} = z$, ſo daß

$$x = z\,\cos.\omega \quad \text{und} \quad y = z\,\sin.\omega$$

wird, ſo finden wir

$$z = \frac{a}{1 - n\,\sin.\psi} \quad \text{und} \quad \sin.\psi = \frac{z - a}{nz}, \text{ daher}$$

$$d\omega = \frac{(z - a)\,d\psi}{a}.$$

Es wird aber

$$d\psi = \frac{a\,dz}{z\sqrt{n^2 z^2 - (z-a)^2}}, \quad \text{alſo} \quad d\omega = \frac{(z-a)\,dz}{z\sqrt{n^2 z^2 - (z-a)^2}};$$

folglich wird der Winkel ω durch z beſtimmt. Setzen wir, um die Irrationalität zu beſeitigen:

$$\sqrt{n^2 z^2 - (z-a)^2} = s\,(nz + z - a), \text{ ſo wird}$$

$$z = \frac{a\,(s^2+1)}{(n+1)\,s^2 - n + 1} \quad \text{und} \quad d\omega = \frac{2\,n\,ds\,(s^2-1)}{(s^2+1)\,[(n+1)\,s^2 - (n-1)]},$$

$$\text{oder} \quad d\omega = \frac{2\,ds}{s^2+1} - \frac{2\,ds}{(n+1)\,s^2 - n + 1};$$

die Integration dieſer Gleichung iſt für ſich klar.

Aufgabe 100.

§. 812. Die Integration einer Differenzialgleichung des zweyten Grades auf eine Differenzialgleichung des ersten Grades zurückzuführen, wenn dieselbe erst dadurch homogen wird, daß wir der einen Veränderlichen y, n Dimensionen beylegen.

Auflösung.

Für $dy = pdx$ und $dp = qdx$ soll eine Gleichung zwischen den vier endlichen Größen x, y, p und q entstehen, und wir wollen nun sehen, wie diese Gleichung rücksichtlich der Homogeneität beschaffen seyn wird. Da nun also, indem wir der Veränderlichen x nur eine Dimension beylegen, die Veränderliche y, n Dimensionen haben soll, so müssen wir vor Allem der Größe $p = \frac{dy}{dx}$, $n-1$ Dimensionen, und der Größe $q = \frac{dp}{dx}$, $n-2$ Dimensionen zurechnen. Wir setzen deßhalb

$$y = x^n u, \quad p = x^{n-1} t \quad \text{und} \quad q = x^{n-2} v,$$

so werden wir, weil $dy = pdx$ und $dp = qdx$ ist, folgende Gleichungen erhalten:

$$xdu + nudx = tdx \quad \text{und} \quad xdt + (n-1)tdx = vdx,$$

und hieraus ergibt sich

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{t-nu} = \frac{dt}{v-(n-1)t}, \text{ also}$$

$$du\,[v-(n-1)t] = dt\,(t-nu).$$

Werden aber in der zwischen x, y, p und q gegebenen Gleichung die obigen Substitutionen gemacht, so verschwindet, der Voraussetzung gemäß, die Veränderliche y aus der Rechnung, so daß eine Gleichung zwischen den drey Veränderlichen u, t und v allein erscheint, aus welcher man die Größe v durch die beyden andern, t und u, wird bestimmen können; und durch Substitution dieses Werthes erhält man eine Differenzialgleichung des ersten Grades, zwischen den zwey Veränderlichen u und t, aus welcher sich t durch u bestimmen läßt; mit Hülfe der Gleichung $\frac{dx}{x} = \frac{du}{t-nu}$ drücke man x durch u aus, so erhält man dann, weil $u = \frac{y}{x^n}$ ist, die Integralgleichung zwischen

x und y, und zwar die vollständige, weil eine doppelte Integration erfordert wird.

Zusatz 1.

§. 813. Die Gleichungen zwischen den vier Größen x, y, p und q, welche sich auf diese Weise behandeln lassen, erkennt man also daran, daß, wenn $y = x^n u$, $p = x^{n-1} t$ und $q = x^{n-2} v$ gesetzt wird, der Exponent n eine solche Bestimmung zuläßt, daß die Veränderliche x aus der Rechnung durch Division ganz verschwindet.

Zusatz 2.

§. 814. Wenn $n = o$ ist, so wird die vorgelegte Gleichung homogen, wenn man der Veränderlichen y und ihren Differenzialien keine Dimension beylegt. In diesem Falle hat nämlich bloß die Veränderliche x mit ihren Differenzialien einen Einfluß auf die Bestimmung der Dimensionen.

Zusatz 3.

§. 815. Werden aber dagegen die Dimensionen bloß nach der Veränderlichen y beurtheilt, so daß diese Größe mit ihren Differenzialien dy und d^2y durchaus dieselbe Anzahl von Dimensionen bildet, so wird der Exponent n unendlich groß werden.

Anmerkung.

§. 816. Wenn die Veränderliche x allein mit ihren Differenzialien überall dieselbe Anzahl von Dimensionen bildet, so wird $u = y$, weil $n = o$ ist, und in der zwischen x, y, p und q vorgelegten Gleichung muß man $p = \frac{t}{x}$ und $q = \frac{v}{x^2}$ setzen, wodurch die Veränderliche x aus der Rechnung weggeschafft und eine Gleichung zwischen y, t und v erhalten wird, mit deren Hülfe die Differenzialgleichung

$$dy\,(v + t) = t\,dt$$

bloß auf zwey Veränderliche zurückgeführt wird, und durch Auflösung dieser Gleichung erhält man $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{t}$, wo die Integration keine Schwierigkeit mehr hat, indem t durch y gegeben wird. Allein in dem andern Falle, in welchem die Veränderliche y mit ihren Differenzialien allein überall die nämliche Anzahl von Dimensionen hat, und wo deßhalb der Exponent n unendlich groß genommen werden müßte,

muß man die Auflösung nach einer andern Methode, die wir bald kennen lernen werden, ausführen, wenn man nicht etwa durch Vertauschung der Veränderlichen x und y diesen Fall auf den vorhergehenden zurückführen kann.

Beyspiel 1.

§. 817. Das Integrale der Differenzialgleichung

$$x^2 d^2y = \alpha y dx^2 + \beta x dx dy$$

zu bestimmen, wenn das Element dx constant genommen wird.

Man erwäge hier jene Bedingung, nach welcher bloß die Veränderliche x mit ihrem Differenziale dx durchaus zwey Dimensionen bildet, so erhält man $n = o$. Da wir nun $qx^2 = \alpha y + \beta px$ erhalten, sobald $dy = p dx$ und $dp = q dx$ gesetzt wird, so wollen wird $p = \frac{t}{x}$ und $q = \frac{v}{x^2}$ annehmen, so wird $v = \alpha y + \beta t$, woraus sich dann folgende Differenzialgleichung ergibt:

$$\alpha y dy + (\beta + 1) t dy = t dt,$$

und da diese Gleichung homogen ist, setzen wir $t = yz$, so wird

$$\alpha dy + (\beta + 1) z dy = yz dz + z^2 dy, \text{ oder}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{z dz}{\alpha + (\beta + 1) z - z^2}.$$

Es sey nun

$$\alpha + (\beta + 1) z - z^2 = (f + z)(g - z), \text{ also}$$

$\alpha = fg$ und $\beta + 1 = g - f$, so findet man

$$\frac{dy}{y} = \frac{\frac{-f}{f+g} dz}{f + z} + \frac{\frac{g}{f+g} dz}{g - z},$$

und hieraus ergibt sich durch Integration

$$ly = C - \frac{f}{f+g} l(f + z) - \frac{g}{f+g} l(g - z), \text{ oder}$$

$$y (f + z)^{\frac{f}{f+g}} (g - z)^{\frac{g}{f+g}} = a;$$

dann aber ist

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{(f + z)(g - z)}, \text{ oder}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{1}{f+g} \cdot \frac{dz}{f + z} + \frac{1}{f+g} \cdot \frac{dz}{g - z},$$

und daher

$$x = b\left(\frac{f+z}{g-z}\right)^{\frac{1}{f+g}} \quad \text{oder} \quad \frac{f+z}{g-z} = \left(\frac{x}{b}\right)^{f+g}.$$

Weil ferner $z = \frac{g x^{f+g} - f b^{f+g}}{b^{f+g} + x^{f+g}}$ ist, so erhält man durch Substitution dieses Werthes

$$(f+g)\, b^g x^f y = a\,(b^{f+g} + x^{f+g}), \text{ oder wenn}$$

$$\frac{a}{f+g} = c \text{ gesetzt wird:}$$

$$y = c\left(\frac{b^f}{x^f} + \frac{x^g}{b^g}\right); \text{ es ist aber}$$

$$g - f = \beta + 1 \quad \text{und} \quad f + g = \sqrt{(\beta+1)^2 + 4\alpha}.$$

Zusatz.

§. 818. Weil in der vorgelegten Gleichung auch die beyden Veränderlichen x und y durchaus gleich viele Dimensionen bilden, so kann man dieselbe auch nach den Vorschriften des vorhergehenden Problemes behandeln.

Beyspiel 2.

§. 819. Wenn dx als constant angesehen wird, und es besteht die vorgelegte Differenzialgleichung des zweyten Grades bloß aus zwey Theilen; wenn sie also die Form hat:

$$d^2 y = c x^\alpha y^\beta dx^{2-\gamma} dy^\gamma,$$

so soll man das Integrale derselben auffinden.

Wird $dy = p\,dx$ und $dp = q\,dx$ gesetzt, so erhält man den Ausdruck $q = c x^\alpha y^\beta p^\gamma$, wo man den Exponenten n so bestimmen kann, daß sich für $y = x^n u$, $p = x^{n-1} t$ und $q = x^{n-2} v$ die Veränderliche x durch Division wegbringen läßt; denn man muß

$$\alpha + \beta n + \gamma(n-1) - n + 2 = 0 \quad \text{oder} \quad n = \frac{-\alpha+\gamma-2}{\beta+\gamma-1}$$

setzen, und dann wird $v = c u^\beta t^\gamma$. Die aufzulösende Differenzialgleichung des ersten Grades ist also

$$c u^\beta t^\gamma du - (n-1)\, t\, du = t\, dt - n\, u\, dt.$$

Hat man aus dieser Gleichung die Veränderliche t durch u be-

stimmt, so muß man die Formel $\frac{dx}{x} = \frac{du}{t - nu}$ integriren, und hierauf erhält man, weil $u = \frac{y}{x^n}$ ist, die gesuchte Integralgleichung zwischen x und y.

Der Fall, wo $\beta + \gamma = 1$ ist, und in welcher n unendlich groß wird, erfordert allein eine eigenthümliche Behandlung, welche wir weiter unten aus einander setzen werden, wenn nicht etwa zugleich $\gamma = \alpha + 2$ ist, denn dann bleibt der Exponent n unserer Willkür ganz überlassen, und die Gleichung wird homogen seyn.

Beyspiel 3.

§. 820. Man bestimme das Integrale der Differenzialgleichung

$$x^4 d^2y = x^3 dx dy + 2xy dx dy - \tfrac{1}{4} y^2 dx^2,$$

bey welcher das Element dx constant gesetzt ist.

Es ist hier einleuchtend, daß, wenn man der Größe y und ihren Differenzialien dy und d^2y zwey Dimensionen, der Größe x aber und ihrem Differenziale dx nur eine Dimension beylegt, in allen Gliedern sechs Dimensionen erhalten werden. Da wir nun für

$$dy = p\,dx \quad \text{und} \quad dp = q\,dx \quad \text{die Gleichung}$$
$$x^4 q = x^3 p + 2xyp - 4y^2$$

erhalten, so setzen wir

$$y = x^2 u, \quad p = xt \quad \text{und} \quad q = v,$$

und wir finden dann

$$v = t + 2ut - 4u^2.$$

Weil aber $n = 2$ ist, so wird unsere Differenzialgleichung

$$du\,(v - t) = dt\,(t - 2u)$$

seyn, und diese geht über in

$$2u\,du\,(t - 2u) = dt\,(t - 2u),$$

und hieraus folgern wir entweder $t = 2u$ oder $t = u^2 + c$, welche beyden Fälle wir abgesondert behandeln wollen.

1) Wenn $t = 2u$ ist, so wird, weil $\frac{dx}{x} = \frac{du}{t - 2u}$ ist, $du = 0$ und daher $u = C$, also $y = Cx^2$, welches ein particuläres Integrale ist, und der vorgelegten Gleichung wirklich Genüge leistet.

2) Es sey $t = u^2 + c$, so wird $\frac{dx}{x} = \frac{du}{u^2 - 2u + c}$, wo drey Fälle in Betrachtung zu ziehen sind.

Wenn erstlich die Constante $c = 1$ ist, so wird

$$l\frac{x}{a} = \frac{1}{1-u} = \frac{x^2}{x^2 - y} \quad \text{oder} \quad x^2 = (x^2 - y)\, l\, .\, \frac{x}{a}.$$

Zweytens, wenn die Constante $c = 1 - f^2$ ist, so wird $\frac{dx}{x} = \frac{du}{(u-1)^2 - f^2}$, und daher

$$lx = \frac{-1}{2f}\, l\frac{f + u - 1}{f - u + 1} + C,$$

also wird, weil $u = \frac{y}{x^2}$ ist,

$$x = a\left[\frac{(f+1)\,x^2 - y}{(f-1)\,x^2 + y}\right]^{\frac{1}{2f}}.$$

Drittens, wenn die Constante $c = 1 + f^2$ ist, und daher $\frac{dx}{x} = \frac{du}{(u-1)^2 + f^2}$, so findet man durch Integration dieser Gleichung

$$l\frac{x}{a} = \frac{1}{f} \text{ arc. tang. } \frac{u-1}{f} \quad \text{oder} \quad \frac{u-1}{f} = \frac{y - x^2}{fx^2} = \text{tang. } f\, l\frac{x}{a}.$$

Es kömmt demnach auf die Beschaffenheit der willkürlichen Constante c an, ob sich das Integrale in einer algebraischen Form darstellen läßt, oder ob es von Logarithmen oder von Kreisbogen abhängt, folglich läßt sich auch kein allgemeiner Ausdruck für dasselbe angeben.

Anmerkung.

§. 821. Man sieht aber, daß das anfangs gefundene particuläre Integrale $y = Cx^2$ in keiner dieser Formen, unter welchen sich das vollständige Integrale darstellt, enthalten sey, nichts desto weniger aber leistet es dennoch der vorgelegten Differenzialgleichung des zweyten Grades Genüge. Durch dieses Beyspiel wird das noch mehr aufgeklärt, was wir oben rücksichtlich dieses Paradoxons angeführt haben, daß nämlich eine endliche Gleichung bisweilen einer Differenzialgleichung Genüge leiste, ohne gerade in dem vollständigen Integrale dieser letztern enthalten zu seyn. Wir sehen demnach, daß dieses Paradoxon auch bey Differenzialgleichungen des zweyten Grades Statt finde. Ob aber die Gleichung $y = Cx^2$ unter die Integralien zu rechnen sey,

ist eine andere Frage, welche noch nicht ganz beantwortet zu seyn scheint. Zwar kann man sich hier die vorgelegte Gleichung selbst aus Factoren zusammengesetzt denken, aus deren einem jene Gleichung $y = Cx^2$ entstehet, allein wir sind weit entfernt, uns mit dieser Erklärung zu begnügen. Es scheint uns vielmehr nöthig zu seyn, genau zu erwägen, ob jene Frage, deren Auflösung auf eine solche Gleichung geführt hat, in das Gebieth der Geometrie oder in das einer andern Wissenschaft gehöre, wo es dann gewöhnlich gar keine Schwierigkeit macht, zu beurtheilen, ob die einer Differenzialgleichung Genüge leistende Beziehung auch mit der Frage selbst übereinstimme oder nicht? Sollte man z. B. die Fallzeit eines schweren Körpers aus der Höhe $= a$ bestimmen, und ist derselbe jetzt in dem Abstande x über der Erde, so ist dort seine Geschwindigkeit $= \sqrt{a - x}$, und das entsprechende Zeitelement $dt = \frac{-dx}{\sqrt{a-x}}$. Hier leuchtet zwar ein, daß dieser Differenzialgleichung Genüge geschieht, wenn man $x = a$ setzt, so daß die Zeit t unbestimmt bleibt, was aber keineswegs zu unserer Frage paßt, die jedoch durch das vollständige Integrale $t = 2\sqrt{a - x}$ aufgelöst wird.

Aufgabe 101.

§. 822. Die Integration einer vorgelegten Differenzialgleichung des zweyten Grades auf die Integration einer Gleichung des ersten Grades zurückzuführen, wenn in der erstern die Veränderliche y mit ihren Differenzialien dy und d^2y durchaus dieselbe Anzahl von Dimensionen bildet.

Auflösung.

Setzt man $dy = pdx$ und $dp = qdx$, so wird die Gleichung die Eigenschaft erhalten, daß in ihr die drey Veränderlichen y, p, q überall dieselbe Anzahl von Dimensionen darbiethen, während die andere Veränderliche x bey der Bestimmung der Anzahl der Dimensionen nicht in Rechnung kommt. Setzt man demnach $p = uy$ und $q = vy$, so wird in allen Gliedern dieselbe Potenz von y erscheinen, und hat man diese durch Division weggeschafft, so erhält man eine Gleichung bloß zwischen den drey Veränderlichen x, u und v, aus welcher sich die eine Variable durch die beyden andern wird bestimmen lassen, so daß

v irgend einer Function von x und u gleich wird. Weil nun $p = uy$ iſt, ſo wird $dy = u y dx$, und wegen $dp = q dx$ wird

$$u dy + y du = v y dx$$

werden, woraus ſich dann ergibt:

$$\frac{dy}{y} = u dx \quad \text{und} \quad \frac{dy}{y} = \frac{v dx - du}{u},$$

alſo $du + u^2 dx = v dx$, welche Differenzialgleichung nur zwey Veränderliche x und u enthält. Kann man nun dieſe Gleichung integriren, ſo daß die zwiſchen x und u beſtehende Beziehung daraus erhellen würde, ſo hat man nur noch das Integrale der Formel $u dx$ zu beſtimmen, und iſt dieſes gefunden, ſo wird $ly = \int u dx$, und auf dieſe Art wird man eine Integralgleichung zwiſchen x und y finden, welche wegen der zweymahl ausgeführten Integration zwey willkürliche Conſtanten enthalten, und demnach das vollſtändige Integrale darſtellen wird.

Zuſatz 1.

§. 823. Es wird alſo die Integration ſolcher Gleichungen zurückgeführt auf die Integration einer Differenzialgleichung von der Form $du + u^2 dx = v dx$, und gelingt die Auflöſung derſelben, ſo erhält man zugleich die Integralien jener vorgelegten Differenzialgleichungen, da die Integration der Formel $u dx$ ohne Schwierigkeit ausgeführt werden kann.

Zuſatz 2.

§. 824. Da $\frac{dy}{y} = u dx$ iſt, ſo wird $y = e^{\int u dx}$, und durch Subſtitution dieſes Werthes wird die vorgelegte Differenzialgleichung des zweyten Grades ſogleich auf eine Differenzialgleichung des erſten Grades zurückgeleitet, denn man erhält

$$\frac{dy}{dx} = p = e^{\int u dx} u \quad \text{und} \quad \frac{dp}{dx} = q = e^{\int u dx} \cdot \frac{(du + u^2 dx)}{dx},$$

und dann fällt die Exponentialgröße von ſelbſt aus der Gleichung weg.

Zuſatz 3.

§. 825. Iſt umgekehrt eine Differenzialgleichung des erſten Grades $du + u^2 dx = v dx$ gegeben, in welcher v irgend eine Function von x und u bezeichnet, ſo wird dieſelbe durch die Subſtitution $u = \frac{dy}{y dx}$ in eine ſolche Differenzialgleichung des zweyten Grades

verwandelt, in welcher die Veränderliche y mit ihren Differenzialien dy und d^2y überall die nämliche Anzahl von Dimensionen bildet.

Anmerkung 1.

§. 826. Diese Reduction der Differenzialgleichungen des ersten Grades auf den zweyten Grad scheint den Gesetzen der Analysis zuwider zu seyn, indessen findet sie dennoch bisweilen ihre Anwendung, denn kann man solche Differenzialgleichungen des zweyten Grades nach irgend einer andern Methode behandeln, so erscheinen ihre Integralien entweder in der Form unendlicher Reihen, oder in endlichen Ausdrücken, und zugleich sind die Integralien der Differenzialgleichungen des ersten Grades bekannt, deren Beziehung gewöhnlich wohl schwerlich aus einer andern Quelle erkannt wird. In den folgenden Untersuchungen aber werden wir sehen, daß solche Differenzialgleichungen des zweyten Grades, in welchen die eine Veränderliche y den ersten Grad nicht übersteigt, sich bequem durch Reihen integriren lassen, und daß sogar diese Reihen bisweilen abbrechen, so daß sich das Integrale in einem endlichen Ausdrucke darstellt. Ist übrigens eine solche Differenzialgleichung des ersten Grades $du + u^2dx = vdx$ gegeben, so ist die Substitution $u = \frac{dy}{ydx}$ um so merkwürdiger, weil man, so bald das Element dx constant gesetzt wird, $du = \frac{d^2y}{ydx} - \frac{dy^2}{y^2dx}$, und demnach $du + u^2dx = \frac{d^2y}{ydx}$ wird, so daß auf diese Art zwey Glieder in eines zusammenschmelzen.

Anmerkung 2.

§. 827. Es wird besonders gut seyn, hier jene Fälle zu bemerken, in welchen die Gleichung $du + u^2dx = vdx$ die Integration zuläßt. Zu diesem Zwecke sey $du = Vdx$ die allgemeine Form der auflösbaren Gleichungen, und V irgend eine Function von x und u, so ist klar, daß die Integration gelinge, wenn $v = u^2 + V$ ist. Dieß wird also erstens der Fall seyn, wenn $V = \frac{X}{U}$ ist, wobey X eine Function von x, und U eine Function von u bezeichnet; zweytens, wenn V eine homogene Function von x und u ist, und keine Dimension hat; drittens, wenn $V = Xu + \Xi u^n$ ist, und X und Ξ beliebige Functionen von x bezeichnen, und endlich viertens, wenn

$V = \frac{1}{Px + Qx^n}$ ist, wobey P und Q beliebige Functionen von u bedeuten. Auf ähnliche Art wird man aus andern integrabeln Formen andere Fälle erschließen.

Beyspiel 1.

§. 828. Man bestimme das Integrale der Gleichung

$$\alpha y d^2y + \beta dy^2 = \frac{y\,dx\,dy}{\sqrt{a^2 + x^2}},$$

wobey das Element dx constant genommen ist.

Wird $dy = p\,dx$ und $dp = q\,dx$ gesetzt, so erhält man

$$\alpha y q + \beta p^2 = \frac{yp}{\sqrt{a^2 + x^2}},$$

welche Gleichung, wenn $p = uy$ und $q = vy$ gesetzt wird, übergeht in folgende:

$$\alpha v + \beta u^2 = \frac{u}{\sqrt{a^2 + x^2}} \quad \text{oder} \quad v = \frac{u}{\alpha\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{\beta u^2}{\alpha};$$

man muß daher folgende Gleichung auflösen:

$$du + u^2 dx = \frac{u\,dx}{\alpha\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{\beta u^2 dx}{\alpha}.$$

Es sey $u = \frac{1}{s}$, so wird

$$+ ds + \frac{s\,dx}{\alpha\sqrt{a^2 + x^2}} = \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) dx,$$

und wird diese Gleichung mit $[x + \sqrt{a^2 + x^2}]^{\frac{1}{\alpha}}$ multiplicirt und dann integrirt, so findet man

$$s\,[x + \sqrt{a^2 + x^2}]^{\frac{1}{\alpha}} = \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) \int dx\,[x + \sqrt{a^2 + x^2}]^{\frac{1}{\alpha}};$$

für $x + \sqrt{a^2 + x^2} = t^\alpha$ aber erhält man $a^2 = t^{2\alpha} - 2t^\alpha x$, und daher

$$x = \frac{t^{2\alpha} - a^2}{2t^\alpha} = \tfrac{1}{2}t^\alpha - \tfrac{1}{2}a^2 t^{-\alpha} \quad \text{und}$$

$$dx = \frac{\alpha}{2} dt\,(t^{\alpha-1} + a^2 t^{-\alpha-1}),$$

so daß

$$st = \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) \int \frac{\alpha}{2} dt \, (t^{\alpha} + a^2 t^{-\alpha}), \text{ oder}$$

$$st = C + \frac{\alpha + \beta}{2} \left[\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{a^2 t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right].$$

Ferner ist $\frac{dy}{y} = u\,dx = \frac{dx}{s}$; aus der Differenzialgleichung aber hat man

$$\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) \frac{dx}{s} = \frac{ds}{s} + \frac{dx}{\alpha \sqrt{a^2 + x^2}}, \text{ und daher}$$

$$\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) ly = ls + \frac{1}{\alpha} l\left[x + \sqrt{a^2 + x^2}\right] = l \,.\, st + D,$$

also $y = B\,(st)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}$. Wird $C = \frac{\alpha + \beta}{2} \,.\, A$ gesetzt, so findet man daher

$$y = B \left[A + \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{a^2 t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}},$$

und hiebey ist

$$x = \frac{1}{2}(t^{\alpha} - a^2 t^{-\alpha}) \text{ oder } t = \left[x + \sqrt{a^2 + x^2}\right]^{\frac{1}{\alpha}};$$

folglich ist die Integralgleichung zwischen x und y

$$Cy^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha}} = A + \frac{1}{\alpha+1}\left[x + \sqrt{a^2 + x^2}\right]^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} + \frac{a^2}{1-\alpha}\left[x + \sqrt{a^2 + x^2}\right]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}.$$

Anmerkung.

§. 829. Eben dieses Beyspiel ist von der Art, daß es auf eine andere Weise äußerst leicht aufgelöst werden kann; denn multiplicirt man die Gleichung $\alpha y q + \beta p^2 = \frac{yp}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ durch $\frac{dx}{yp}$, so geht sie, weil $q\,dx = dp$ und $p\,dx = dy$ ist, über in

$$\frac{\alpha\,dp}{p} + \frac{\beta\,dy}{y} = \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}},$$

wo die einzelnen Glieder integrabel sind. Es ergibt sich also

$$p^{\alpha} y^{\beta} = C^{\alpha}\left[x + \sqrt{a^2 + x^2}\right], \text{ und daher}$$

$$y^{\frac{\beta}{\alpha}} dy = C\,dx\left[x + \sqrt{a^2 + x^2}\right]^{\frac{1}{\alpha}},$$

welche Gleichung von neuem integrirt, das vorhin gefundene Integrale gibt. Es ist also die allgemeine Form, der auf diese Art auflösbaren Gleichungen $Pdp + Ydy + Xdx = o$, wobey P eine Function von p, Y von y und X von x bezeichnet, und diese Form ist nach unserer Bezeichnungsart $Pq + Yp + X = o$. Man sieht daher ein, wie auch die Differenzialgleichungen des zweyten Grades, mit Hülfe eines schicklichen Multiplicators, den Charakter der Integrabilität erlangen können, und diese Methode verdient, da sie schon bey den Differenzialgleichungen des ersten Grades so vortreffliche Dienste geleistet hat, um so mehr ausgebildet zu werden, weil sie sich auch auf die Differenzialgleichungen höherer Grade erstreckt. Diese Materie werden wir unten ausführlicher zu behandeln suchen.

Beyspiel 2.

§. 830. Man bestimme das Integrale der Differenzialgleichung

$$xyd^2y = ydxdy + xdy^2 + \frac{bxdy^2}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

wobey das Element dx constant genommen ist.

Wird $dy = pdx$ und $dp = qdx$ gesetzt, so erhält man

$$xyq = yp + xp^2 + \frac{bxp^2}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

oder wenn $p = uy$ und $q = vy$ gesetzt wird:

$$xv = u + u^2x + \frac{bu^2x}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

woraus sich folgende Differenzialgleichung ergibt:

$$du + u^2dx = \frac{udx}{x} + u^2dx + \frac{bu^2dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \text{ oder}$$

$$\frac{xdu - udx}{u^2} = \frac{bxdx}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

und das Integrale hievon ist

$$C - \frac{x}{u} = -b\sqrt{a^2 - x^2}, \text{ oder}$$

$$u = \frac{x}{C + b\sqrt{a^2 - x^2}}, \text{ also } \frac{dy}{y} = \frac{xdx}{C + b\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Man ſetze $\sqrt{a^2 - x^2} = t$, alſo $x\,dx = -t\,dt$, ſo wird

$$\frac{dy}{y} = \frac{-t\,dt}{C + bt} = -\frac{dt}{b} + \frac{C\,dt}{b(c + bt)} \quad \text{und}$$

$$ly = -\frac{t}{b} + \frac{C}{b^2} l(c + bt) + lc.$$

Es ſey $C = nb^2$, ſo wird man erhalten:

$$l\frac{y}{c} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{b} + n l \frac{nb + \sqrt{a^2 - x^2}}{b},$$

wo c und n willkürliche Conſtanten ſind.

Kapitel IV.

Von den Differenzialgleichungen des zweyten Grades, in welchen die eine der beyden Veränderlichen nur eine Dimenſion hat.

Aufgabe 102.

§. 831. Eine Differenzialgleichung des zweyten Grades, von der Form

$$d^2y + Pdxdy + Qydx^2 = o,$$

bey welcher das Element dx conſtant genommen iſt, und wo P und Q was immer für Functionen von x ſind, auf eine Differenzialgleichung des erſten Grades zurückzuführen.

Auflöſung.

Wird $dy = pdx$ und $dp = qdx$ geſetzt, ſo nimmt die vorgelegte Gleichung die Form an: $q + Pp + Qy = o$, und wenn wir in dieſer Gleichung nach der vorhin erklärten Methode $p = uy$ und $q = vy$ ſetzen, ſo erhalten wir zwiſchen x, u und v die Gleichung $v + Pu + Q = o$ und daher $v = -Pu - Q$. Dann aber wird

$$dy = uydx \quad \text{und} \quad udy + ydu = vydx,$$

es iſt demnach

$$\frac{dy}{y} = udx = \frac{vdx - du}{u}, \quad \text{alſo}$$

$$du + u^2dx + Pudx + Qdx = o,$$

wenn für v der Werth geſetzt wird. Löſt man dieſe Gleichung auf, ſo findet man $ly = \int udx$. Oder wir ſetzen ſogleich, ohne dieſe Subſtitutionen zu machen, in der vorgelegten Gleichung $y = e^{\int udx}$, ſo erhalten wir

$$dy = e^{\int udx}udx \quad \text{und} \quad d^2y = e^{\int udx}(dudx + u^2dx^2),$$

und da nach verrichteter Subſtitution die Exponentialgröße $e^{\int udx}$ aus der Rechnung verſchwindet, ſo werden wir die obige Differenzialgleichung des erſten Grades erhalten, nämlich:

$$du + u^2dx + Pudx + Qdx = o,$$

von deren Auflösung die Integration der vorgelegten Differenzialgleichung des zweyten Grades abhängt.

Zusatz 1.

§. 832. Diese Differenzialgleichung des ersten Grades läßt sich nach mehreren Methoden in andere, sich fast ähnliche Formen verwandeln. Setzen wir z. B. $u = Mz$, so finden wir

$$Mdz + z(dM + PMdx) + M^2z^2dx + Qdx = 0,$$

wo man für M eine solche Function von x nehmen kann, daß das die Größe z als Factor enthaltende Glied verschwindet, und dieß ist der Fall, wenn

$$dM + MPdx = 0 \quad \text{oder} \quad M = C \cdot e^{-\int P dx}$$

gesetzt wird.

Zusatz 2.

§. 833. Eine ähnliche Form erhält man, wenn $u = \frac{x}{z}$ gesetzt wird, denn man findet

$$-\frac{Kdz}{z^2} + \frac{dK}{z} + \frac{K^2dx}{z^2} + \frac{KPdx}{z} + Qdx = 0, \quad \text{oder}$$

$$Kdz - z(dK + KPdx) - Qz^2dx - K^2dx = 0,$$

wo ebenfalls das zweyte Glied verschwindet, so bald $K = Ce^{-\int P dx}$ gesetzt wird.

Zusatz 3.

§. 834. Eine ähnliche Transformation wird noch allgemeiner bewerkstelliget, wenn man $u = K + Mz$ setzt, denn man erhält

$$dK + Mdz + zdM + K^2dx + 2KMzdx + M^2z^2dx^2 + KPdx + MPzdx + Qdx = 0,$$

oder, wenn diese Gleichung geordnet wird:

$$Mdz + z(dM + 2KMdx + MPdx) + M^2z^2dx^2 + dK + K^2dx + KPdx + Qdx = 0,$$

und daher fällt das zweyte Glied weg, wenn

$$M = Ce^{-\int dx(2K+P)}, \quad \text{oder} \quad K = \frac{-dM - MPdx}{2Mdx}$$

gesetzt wird.

Zusatz 4.

§. 835. Noch allgemeiner aber wird eine ähnliche Form erhal-

, wenn man $u = \frac{K + Mz}{L + Nz}$ ſetzt, denn man findet

$$(LM - KN) + L\,dK - K\,dL + z(L\,dM - M\,dL + N\,dK - K\,dN) + z^2(N\,dM - M\,dN) + (K + Mz)^2\,dx + P(K + Mz)(L + Nz)\,dx + Q(L + Nz)^2\,dx = 0,$$

lche Gleichung ſich auf folgende Form bringen läßt:

$$= dz(LM - KN) + z\{L\,dM - M\,dL + N\,dK - K\,dN + 2KM\,dx + P(KN + LM)\,dx + 2LNQ\,dx\} + z^2(N\,dM - M\,dN + M^2\,dx + MNP\,dx + N^2Q\,dx) + L\,dK - K\,dL + K^2\,dx + KLP\,dx + L^2Q\,dx,$$

man für K, L, M und N ſolche Functionen von x nehmen kann, ß die Gleichung in einer Form erſcheint, in welcher ſie ſich am leich- ten behandeln läßt.

Anmerkung.

§. 836. Weil ſolche Differenzialgleichungen des zweyten Grades, welchen die Veränderliche y nur in der erſten Potenz erſcheint, ſehr ufig vorkommen, ſo haben ſich die Geometer mit der Auflöſung der eichung

$$du + u^2\,dx + P\,u\,dx + Q\,dx = 0$$

t Recht ſehr fleißig beſchäftiget. Dieſe Gleichung läßt ſich auch un- folgender allgemeineren Form darſtellen:

$$dz + Pz\,dx + Rz^2\,dx + Q\,dx = 0.$$

Den ſchönen, beſondern Fall $dz + z^2\,dx = a x^n\,dx$ dieſer all- neinen Gleichung, hatte ehemals der Graf Riccati als einen ichen Beytrag zur Analyſis vorgelegt. Unter den Transformatio- dieſes Falles aber verdient vorzüglich bemerkt zu werden, die An-

hme $x = t^{\frac{2}{n+2}}$, denn dieſe gibt

$$dz + \frac{2}{n+2} z^2 t^{\frac{-n}{n+2}}\,dt = \frac{2a}{n+2} t^{\frac{n}{n+2}}\,dt,$$

d daher erhält man, wenn $z = Ct^{\frac{n}{n+2}}v$ geſetzt wird:

$$(n+2)\,Ct^{\frac{n}{n+2}}\,dv + Cnt^{\frac{-2}{n+2}}v\,dt + 2C^2 t^{\frac{n}{n+2}}v^2\,dt = = 2a t^{\frac{n}{n+2}}\,dt, \text{ oder}$$

$$(n+2)Cdv + \frac{nCvdt}{t} + 2C^2v^2dt = 2adt,$$

so daß hier keine unbestimmte Potenz von t mehr erscheint. — Setzt man hier ferner $v = \frac{\alpha}{t} + s$, so erhält man

$$-\frac{(n+2)C\alpha dt}{t^2} + (n+2)Cds + \frac{nCsdt}{t} + 2C^2s^2dt = 2adt$$
$$+\frac{nC\alpha dt}{t^2} \qquad\qquad + \frac{4C^2\alpha sdt}{t}$$
$$+\frac{2C^2\alpha^2dt}{t^2};$$

und wenn $\alpha = \frac{-n}{4C}$ genommen wird, so ergibt sich:

$$(n+2)Cds + 2C^2s^2dt = 2\alpha dt - \frac{n(n+4)dt}{8t^2},$$

welche Form die einfachste zu seyn scheint.

Lehrsatz.

§. 837. Wird das Element dx constant genommen, und es leisten der Differenzialgleichung des zweyten Grades

$$d^2y + Pdxdy + Qydx^2 = o$$

die partikularen Integralien $y = M$ und $y = N$ Genüge, so daß das Verhältniß $M:N$ nicht constant ist, so wird das vollständige Integrale der vorgelegten Gleichung $y = \alpha M + \beta N$ seyn.

Beweis.

Weil die Werthe $y = M$ und $y = N$ der vorgelegten Gleichung Genüge leisten, so wird seyn

$$d^2M + PdxdM + QMdx^2 = o$$
$$\text{und } d^2N + PdxdN + QNdx^2 = o,$$

und daher ist klar, daß unserer Gleichung auch Genüge geschieht, wenn wir $y = \alpha M + \beta N$ setzen, denn es wird:

$$\left.\begin{array}{l} +\alpha(d^2M + PdxdM + QMdx^2) \\ +\beta(d^2N + PdxdN + QNdx^2) \end{array}\right\} = o.$$

Weil aber das Integrale $y = \alpha M + \beta N$ die zwey Constanten α und β enthält, welche man nach Belieben bestimmen kann, so muß dasselbe das vollständige Integrale seyn, wenn nicht zufällig N ein Vielfaches von M ist.

Zuſatz 1.

§. 838. Aus zwey gegebenen partikularen Integralien einer ſol-
n Gleichung läßt ſich alſo ihr vollſtändiges Integrale beſtimmen, ſo-
ld jene zwey Integralien von einander verſchieden ſind.

Zuſatz 2.

§. 839. Wenn $y = e^{\int u dx}$ oder $u = \frac{dy}{ydx}$ geſetzt wird, ſo fin-
t man

$$du + u^2 dx + P dx + Q dx = 0.$$

Leiſten nun dieſer Gleichung die Werthe $u = \frac{dM}{Mdx}$ und $u = \frac{dN}{Ndx}$
enüge, ſo wird ihr auch der Werth $u = \frac{\alpha dM + \beta dN}{(\alpha N + \beta M) dx}$ Genüge
ſten.

Zuſatz 3.

§. 840. Wenn alſo die zwey partikularen Integralien $u = R$ und
$= S$ der Gleichung $du + u^2 dx + P dx + Q dx = 0$ gegeben
d, ſo wird ihr vollſtändiges Integrale wegen $M = e^{\int R dx}$ und
$= e^{\int S dx}$ folgendes ſeyn:

$$u = \frac{\alpha e^{\int R dx} . R + \beta e^{\int S dx} . S}{\alpha e^{\int R dx} + \beta e^{\int S dx}} \quad \text{oder}$$

$$u = R + \frac{\beta e^{\int S dx} (S - R)}{\alpha e^{\int R dx} + \beta e^{\int S dx}}.$$

Anmerkung.

§. 841. Dieſe Bemerkung, daß ſich bey ſolchen Gleichungen aus
ey bekannten partikularen Integralien das vollſtändige Integrale an-
den laſſe, iſt von der größten Wichtigkeit. Wenn aber ein partikula-
Integrale bekannt iſt, ſo erſcheint gewöhnlich in dem Ausdrucke für
ſelbe ein Wurzelzeichen, und dann ſind wegen der Zweydeutigkeit
ſelben zwey partikulare Integralien zugleich bekannt. Wenn z. B.
Gleichung

$$du + u^2 dx + P dx + Q dx = 0$$

Werth $u = T + \sqrt{V}$ Genüge leiſtet, ſo leiſtet ihr auch der Werth
$= T - \sqrt{V}$ Genüge, und demnach iſt das vollſtändige Integrale:

$$u = T + \sqrt{V} - \frac{2\beta\sqrt{V}}{\alpha e^{2\int dx \sqrt{V}} + \beta} \quad \text{oder}$$

$$u = T + \frac{\alpha e^{2\int dx \sqrt{V}} \sqrt{V} - \beta\sqrt{V}}{\alpha e^{2\int dx \sqrt{V}} + \beta}.$$

Sollte aber zufällig $\sqrt{V}$ imaginär seyn, nämlich $\sqrt{V} = X\sqrt{-1}$, so wird, weil $e^{\pm\int dx\sqrt{V}} = \cos.\int X dx \pm \sqrt{-1}\sin.\int X dx$ ist:

$$u = T + \frac{(\alpha-\beta)\cos.\int X dx + (\alpha+\beta)\sin.\int X dx\sqrt{-1}}{(\alpha+\beta)\cos.\int X dx + (\alpha-\beta)\sin.\int X dx\sqrt{-1}} \cdot X\sqrt{-1};$$

oder, wenn $(\alpha-\beta)\sqrt{-1} = \gamma$ und $\alpha+\beta = \delta$ gesetzt wird:

$$u = T + \frac{\gamma\cos.\int X dx - \delta\sin.\int X dx}{\delta\cos.\int X dx + \gamma\sin.\int X dx} \cdot X, \text{ oder auch}$$

$$u = T + X\,\text{tang.}(\int X dx + \varepsilon).$$

Aufgabe 103.

§. 842. Das vollständige Integrale der Differenzialgleichung des zweyten Grades

$$d^2y + A dy dx + B y dx^2 = 0$$

zu bestimmen, wenn dx constant genommen wird.

Auflösung.

Wird $y = e^{\int u dx}$ gesetzt, so erscheint die Gleichung

$$du + u^2 dx + A u dx + B dx = 0 \text{ oder}$$

$$dx = \frac{-du}{u^2 + Au + B},$$

welcher Genüge geschieht, wenn man der Größe u einen solchen constanten Werth beylegt, daß $u^2 + Au + B = 0$ wird; man findet demnach zwey Werthe, nämlich

$$u = -\tfrac{1}{2}A \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}A^2 - B}.$$

Da sich also hieraus zwey partikulare Integralien $y = e^{\int u dx}$ ergeben, so wird, wenn man $\sqrt{\frac{1}{4}A^2 - B} = n$ setzt, das vollständige Integrale folgendes seyn:

$$y = e^{-\frac{1}{2}Ax}(\alpha e^{nx} + \beta e^{-nx});$$

und wenn n imaginär ist, nämlich $n = m\sqrt{-1}$, so wird:

$$y = e^{-\frac{1}{2}Ax}(\alpha\cos. mx + \beta\sin. mx) = Ce^{-\frac{1}{2}Ax}\sin.(mx + \gamma).$$

Ist aber $n = 0$, so findet man

$$y = e^{-\frac{1}{2}Ax}(\alpha + \beta x).$$

Zuſatz 1.

§. 843. Um alſo das Integrale der vorgelegten Gleichung zu finden, muß man die algebraiſche Gleichung $u^2 + Au + B = o$ auflöſen, welche aus der gegebenen Gleichung $d^2y + Ady dx + Bydx^2 = o$ entſteht, wenn man u^0, u^1, u^2 ſtatt der Größen y, dy, d^2y ſetzt, und das Element dx wegläßt, denn dann geben die beyden Wurzeln jener Gleichung das vollſtändige Integrale.

Zuſatz 2.

§. 844. Wenn nämlich $(u+f)$, $(u+g)$ die Factoren der Gleichung $u^2 + Au + B = o$ ſind, ſo erhält man, weil $u = -f$ und $u = -g$ iſt, als vollſtändiges Integrale den Ausdruck

$$y = \alpha e^{-fx} + \beta e^{-gx}.$$

Wenn aber $g = f$ iſt, ſo wird $y = e^{-fx}(\alpha + \beta x)$.

Zuſatz 3.

§. 845. Wenn die Gleichung $u^2 + Au + B = o$ imaginäre Factoren hat, in welchem Falle ſie folgende Form haben wird

$$u^2 + 2fu\cos.\zeta + f^2 = o, \text{ ſo wird}$$

$$u = -f\cos.\zeta \pm f\sqrt{-1}\sin.\zeta,$$

und daher wird das vollſtändige Integrale ſeyn:

$$y = e^{-fx\cos.\zeta}(\alpha\cos.fx\sin.\zeta + \beta\sin.fx\sin.\zeta) \text{ oder}$$

$$y = Ce^{-fx\cos.\zeta}\sin.(fx\sin.\zeta + \gamma).$$

Anmerkung.

§. 846. Dasſelbe vollſtändige Integrale findet man auch auf gewöhnliche Art aus der Gleichung $dx = \frac{-du}{u^2+Au+B}$; denn ſetzt man $u^2 + Au + B = (u+f)(u+g)$, ſo wird

$$(g-f)\,dx = \frac{du}{u+g} - \frac{du}{u+f} \quad \text{und} \quad Ce^{(g-f)x} = \frac{u+g}{u+f},$$

und hieraus ergibt ſich

$$u = \frac{g - Cfe^{(g-f)x}}{Ce^{(g-f)x} - 1} \text{ oder}$$

$$u = \frac{-\alpha fe^{gx} + \beta ge^{fx}}{\alpha e^{gx} - \beta e^{fx}}.$$

Dann aber wird

$$\int u\,dx = -\int \frac{\alpha f e^{(g-f)x} - \beta g}{\alpha e^{(g-f)x} - \beta}\,dx = -\int \frac{u\,du}{(u+f)(u+g)},$$

und daher $\int u\,dx = \frac{f}{g-f}\,l(u+f) - \frac{g}{g-f}\,l(u+g)$,

also $y = e^{\int u\,dx} = C(u+f)^{\frac{f}{g-f}}(u+g)^{\frac{-g}{g-f}}$.

Es ist aber

$$u + f = \frac{\beta(g-f)e^{fx}}{\alpha e^{gx} - \beta e^{fx}} \quad \text{und} \quad u + g = \frac{\alpha(g-f)e^{gx}}{\alpha e^{gx} - \beta e^{fx}},$$

und hieraus erhält man durch Änderung der Constanten C

$$y = \frac{C e^{\frac{fx}{g-f}} e^{\frac{-gx}{g-f}}}{(\alpha e^{gx} - \beta e^{fx})^{\frac{f-g}{g-f}}} = C e^{-(f+g)x}(\alpha e^{gx} - \beta e^{fx})$$

oder $y = \alpha e^{-fx} + \beta e^{-gx}$ wie vorhin.

Hieraus erhellt demnach, wie nützlich es sey, aus zwey partikularen Integralien das vollständige zu bilden.

Aufgabe 104.

§. 847. Man bestimme das vollständige Integral der Differenzialgleichung des zweyten Grades

$$d^2y + \frac{A\,dy\,dx}{x} + \frac{B\,y\,dx^2}{x^2} = 0,$$

wobey das Element dx constant genommen ist.

Auflösung.

Man setze $dy = p\,dx$ und $dp = q\,dx$, so wird

$$q + \frac{Ap}{x} + \frac{By}{x^2} = 0 \quad \text{oder} \quad q = \frac{-Ap}{x} - \frac{By}{x^2}.$$

Sey nun $p = \frac{uy}{x}$, so wird $dy = \frac{uy\,dx}{x}$ und

$$dp = \frac{u\,dy + y\,du}{x} - \frac{uy\,dx}{x^2} = -\frac{A\,dy}{x} - \frac{B\,y\,dx}{x^2},$$

und hieraus folgern wir

$$\frac{dy}{y} = \frac{u\,dx}{x} = \frac{u\,dx - B\,dx - x\,du}{xu + Ax} \quad \text{oder}$$

$$x\,du + B\,dx + u^2\,dx + (A-1)\,u\,dx = 0,$$

$$\text{alſo } \frac{dx}{x} = \frac{-du}{u^2 + (A-1)u + B},$$

für welche Gleichung ein partikulares Integrale erhalten wird, wenn man $u^2 + (A-1)u + B = 0$ ſetzt.

Sey nun zuerſt $u^2 + (A-1)u + B = (u+f)(u+g)$, ſo erhält man die partikulare Auflöſung $ly = -flx$ und $y = x^{-f}$, und auf ähnliche Art $y = x^{-g}$, woraus ſich das vollſtändige Integrale ergibt

$$y = \alpha x^{-f} + \beta x^{-g}.$$

Wenn $g = f$ iſt, ſo ſetze man $g = f - \omega$, und man erhält bey dem Verſchwinden von ω

$$x^{-g} = x^{-f} x^{\omega} = x^{-f}(1 + \omega lx),$$

alſo wird in dieſem Falle

$$y = x^{-f}(\alpha + \beta lx).$$

Endlich ſey

$$u^2 + (A-1)u + B = u^2 + 2fu\cos.\zeta + f^2,$$

ſo wird $u = -f(\cos.\zeta \pm \sqrt{-1}\sin.\zeta)$,

und demnach findet man als partikularen Werth

$$y = x^{-f\cos.\zeta} \cdot x^{\pm f\sqrt{-1}\sin.\zeta}$$
$$= x^{-f\cos.\zeta}[\cos.(f\sin.\zeta lx) \pm \sqrt{-1}\sin.(f\sin.\zeta lx)],$$

und daher iſt das vollſtändige Integrale

$$y = Cx^{-f\cos.\zeta}\sin.(f\sin.\zeta . lx + \gamma).$$

Zuſatz 1.

§. 848. Es entſpricht alſo der Gleichung

$$d^2y + (f+g+1)\frac{dydx}{x} + \frac{fgydx^2}{x^2} = 0$$

das vollſtändige Integrale

$$y = \alpha x^{-f} + \beta x^{-g}.$$

Die Gleichung

$$d^2y + (2f+1)\frac{dydx}{x} + \frac{f^2ydx^2}{x^2} = 0$$

hat zum vollſtändigen Integrale den Ausdruck

$$y = x^{-f}(\alpha + \beta lx).$$

Zuſatz 2.

§. 849. Hätte die vorgelegte Gleichung die Form

$$d^2y + (1 + 2f\cos.\zeta)\frac{dydx}{x} + \frac{f^2ydx}{x^2} = 0,$$

so wäre dann das vollständige Integrale

$$y = Cx^{-f\cos.\zeta}\sin.(f\sin.\zeta.lx + \gamma).$$

Anmerkung.

§. 850. Eine ähnliche Auflösung gestattet auch folgende Differenzialgleichung des zweyten Grades:

$$d^2y - \frac{n\,dy\,dx}{x} + Ax^n\,dy\,dx + Bx^{2n}y\,dx^2 = 0.$$

Denn, man setze $dy = x^n y u dx$, so wird man, weil

$$d^2y = x^n y\,dx\,du + nx^{n-1}yu\,dx^2 + x^{2n}yu^2dx^2$$

ist, nach der Division durch y erhalten

$$x^n\,dx\,du + nx^{n-1}u\,dx^2 + x^{2n}u^2dx^2 - nx^{n-1}u\,dx^2 + Ax^{2n}u\,dx^2 + Bx^{2n}dx^2 =$$

und daher

$$du + x^n u^2 dx + Ax^n u\,dx + Bx^n\,dx = 0,$$

$$\text{also } x^n\,dx = \frac{-du}{u^2 + Au + B},$$

und hievon erhält man eine partikulare Auflösung, wenn man

$$u^2 + Au + B = 0$$

setzt, woraus u einen doppelten constanten Werth erhält, deren ei $u = -f$, und der andere $u = -g$ seyn soll. Deßhalb werden partikularen Integralien seyn

$$y = e^{\frac{-fx^{n+1}}{n+1}} \quad \text{und} \quad y = e^{\frac{-gx^{n+1}}{n+1}};$$

wird Kürze halber $\frac{x^{n+1}}{n+1} = t$ gesetzt, so ergibt sich das vollstän Integrale

$$y = \alpha e^{-ft} + \beta e^{-gt},$$

für den Fall nämlich, wo

$$u^2 + Au + B = (u+f)(u+g)$$

ist. Allein für den Fall

$$u^2 + Au + B = (u+f)^2 \text{ erhält man}$$

$$y = e^{-ft}(\alpha + \beta t).$$

Für den Fall aber, in welchem

$$u^2 + Au + B = u^2 + 2fu\cos.\zeta + f^2,$$

findet man

$$y = Ce^{-ft\cos.\zeta}\sin.(ft\sin.\zeta + \gamma).$$

Diese Integration kann sogar ausgedehnt werden auf die Form

$$d^2y - \frac{dXdy}{X} + AXdydx + BX^2ydx^2 = 0,$$

wobey für X jede Function von x genommen werden kann; denn wird $dy = Xuydx$ oder $\frac{dy}{y} = Xudx$ gesetzt, so erhält man

$$Xdx = \frac{-du}{u^2 + Au + B}.$$

Setzt man demnach $\int Xdx = t$, so erhält man das vollständige Integrale, wie vorhin. Nämlich:

1) Wenn $A = f + g$ und $B = fg$, so ist das Integrale
$y = \alpha e^{-ft} + \beta e^{-gt}$.

2) Wenn $A = 2f$ und $B = f^2$, so wird das Integrale
$y = e^{-ft}(\alpha + \beta t)$.

3) Wenn $A = 2f\cos.\zeta$ und $B = f^2$, so wird das Integrale
$y = Ce^{-ft\cos.\zeta}\sin.(ft\sin.\zeta + \gamma)$.

Aufgabe 105.

§. 851. Die Integration folgender Differenzialgleichung des zweyten Grades

$$d^2y + Pdydx + Qydx^2 = Xdx^2$$

auf eine Differenzialgleichung des ersten Grades zurück zu führen, wenn das Element dx constant genommen wird, und die Größen P, Q und X was immer für Functionen von x bezeichnen.

Auflösung.

Wir wollen hier einen ganz eigenen Weg einschlagen, indem wir für y zwey neue Unbekannte einführen; man setze nämlich $y = uv$, so wird, weil

$dy = udv + vdu$ und $d^2y = ud^2v + 2dudv + vd^2u$

ist, unsere Gleichung folgende Form annehmen:

$$ud^2v + 2dudv + vd^2u + Pudxdv + Pvdxdu + Quvdx^2 = Xdx^2.$$

Nun bestimme man die eine Größe v, so daß die den Factor u

enthaltenden Glieder wegfallen, welches geſchieht, wenn

$$d^2v + Pdxdv + Qvdx^2 = o,$$

geſetzt wird. Man beſtimme alſo nach dem Obigen v durch x, ſo bleibt uns dann die Gleichung

$$2dudv + vd^2u + Pvdxdu = Xdx^2;$$

und weil nun v durch x gegeben wird, ſo muß die Größe u beſtimmt werden.

Man ſetze $du = sdx$, ſo wird

$$vds + 2sdv + Psvdx = Xdx,$$

welche Gleichung durch die Multiplication mit $ve^{\int Pdx}$ integrabel gemacht wird, denn man erhält

$$v^2se^{\int Pdx} = \int e^{\int Pdx} Xvdx, \text{ und daher}$$

$$s = \frac{e^{-\int Pdx}}{v^2} \int e^{\int Pdx} Xvdx \text{ und}$$

$$u = \int \frac{e^{-\int Pdx} dx}{v^2} \int e^{\int Pdx} Xvdx.$$

Da wir alſo die Unbekannte v aus der Gleichung

$$d^2v + Pdxdv + Qvdx^2 = o$$

beſtimmt haben, ſo iſt das Integrale der vorgelegten Gleichung

$$y = v\int \frac{e^{-\int Pdx} dx}{v^2} \int e^{\int Pdx} Xvdx.$$

Zuſatz 1.

§. 852. Um die Integration auf eine Differenzialgleichung des erſten Grades zurück zu führen, ſetze man $v = e^{\int tdx}$, ſo wird ſich die Größe t aus der Gleichung

$$dt + t^2dx + Ptdx + Qdx = o$$

beſtimmen laſſen, und hierauf erhält man das geſuchte Integrale

$$y = e^{\int tdx} \int e^{-\int (P+t)dx} dx \int e^{\int (P+t)dx} Xdx.$$

Zuſatz 2.

§. 853. Weil $(P + t)\,dx = -\frac{dt}{t} - \frac{Qdx}{t}$ iſt, ſo wird

$$e^{\int (P+t)dx} = \frac{1}{t} e^{-\int \frac{Qdx}{t}}, \text{ und daher}$$

$$y = e^{\int t\,dx} \int e^{\int \frac{Q\,dx}{t} - \int t\,dx} t\,dx \int e^{-\int \frac{Q\,dx}{t}} X \frac{dx}{t},$$

wo die doppelte Integration auf das vollständige Integrale führt.

Anmerkung 1.

§. 854. Dieselbe Integration läßt sich auch noch nach einer andern Methode ausführen, welche der oben gebrauchten näher kömmt. Man setze nämlich für die vorgelegte Gleichung $dy = tydx + vdx$, wo v eine gewisse Function von x bezeichnet, welche aus der Function X bestimmt werden muß. Da nun also

$$d^2y = ydtdx + tdx(tydx + vdx) + dvdx$$

ist, so erhält man nach gemachter Substitution

$$\left.\begin{array}{l} ydtdx + t^2ydx^2 + Ptydx^2 + Qydx^2 \\ + tvdx^2 + dvdx + Pvdx^2 - Xdx^2 \end{array}\right\} = 0,$$

bey welcher Gleichung jeder Theil, sowohl der, welcher den Factor y enthält, als auch der andere von y freye Theil für sich genommen verschwindet, wodurch wir folgende zwey Gleichungen erhalten:

$$dt + t^2dx + Ptdx + Qdx = 0 \quad \text{und}$$
$$dv + tvdx + Pvdx = Xdx,$$

aus deren ersten t durch x wie oben bestimmt werden muß; dann aber erhält man aus der letztern:

$$e^{\int (P+t)\,dx} v = \int e^{\int (P+t)\,dx} X\,dx;$$

aus der angenommenen Gleichung $dy - tydx = vdx$ folgt aber nun

$$e^{-\int t\,dx} y = \int e^{-\int t\,dx} v\,dx;$$

und wenn man statt v den eben gefundenen Werth substituirt, so kömmt die vorhergehende Integralformel zum Vorscheine.

Anmerkung 2.

§. 855. Aus dieser Operation scheint zu folgen, daß die Integration der vorgelegten Gleichung

$$d^2y + Pdydx + Qydx^2 = Xdx^2$$

nothwendig von der Integration der Gleichung

$$d^2v + Pdvdx + Qvdx^2 = 0$$

abhänge, weil, wenn diese bekannt ist, jene dargestellt werden kann. Es läßt sich jedoch nicht umgekehrt schließen, daß, wenn die Auflösung

der letztern unsere Kräfte übersteigt, auch die erstere durchaus nicht integrirt werden könne; ja es ist vielmehr sehr leicht, unzählige Fälle aufzustellen, in welchen die erstere Gleichung die Integration zuläßt, während die letztere doch unauflösbar bleibt. Denn es sey $P = 0$ und $Q = \alpha x$, so ist so viel gewiß, daß die letztere Gleichung

$$d^2v + \alpha x v dx^2 = 0$$

nach keiner Methode aufgelöst werden könne, weil sie, wenn $v = e^{\int t dx}$ gesetzt wird, übergeht in $dt + t^2 dx + \alpha x dx = 0$; und demnach folgt hieraus nicht, daß die erstere Gleichung

$$d^2y + \alpha x y dx^2 = X dx^2$$

immer unauflösbar sey, denn es lassen sich unendlich viele Fälle für X angeben, in welchen die Integration gelingt. Denn wird für y irgend eine Function von x gesetzt, so erhält man für X eine solche Function, daß der für y genommene Werth der Gleichung Genüge leistet. Wenn man z. B. $y = \frac{\beta x}{\alpha}$ setzt, so wird $X = \beta x^2$, weil $d^2y = 0$ ist, und der Gleichung $d^2y + \alpha x y dx^2 = \beta x^2 dx^2$ leistet auch das Integrale $y = \frac{\beta x}{\alpha}$ Genüge. Indessen ist dieses Integrale doch nur ein partikulares, und es läßt sich immer noch der Zweifel erheben, ob auch das vollständige Integrale dargestellt werden könne. Allein wird $y = \frac{\beta x}{\alpha} + z$ gesetzt, so erhält man für die Bestimmung des vollständigen Integrales die Gleichung $d^2z + \alpha x z dx^2 = 0$, und da diese nicht auflösbar ist, so ist einleuchtend, daß auch das vollständige Integrale im Allgemeinen nicht dargestellt werden könne, wenn nicht auch zugleich die andere Gleichung die Integration zuläßt.

Aufgabe 106.

§. 856. Man bestimme, wenn das Element dx constant genommen wird, das vollständige Integrale der Differenzialgleichung des zweiten Grades

$$d^2y + A y dx dx + B y dx^2 = X dx^2,$$

wobey X irgend eine Function von x bezeichnet.

Auflösung.

Wird $y = uv$ gesetzt, so löst sich unsere Gleichung in die zwey folgenden auf:

$$d^2v + A v dx dx + B v dx^2 = 0 \text{ und}$$
$$v d^2u + 2 dv du + A v dx du = X dx^2.$$

Drückt man alſo aus der erſtern Gleichung den Werth von v durch x aus, ſo erhält man aus der letztern das vollſtändige Integrale, welches, weil P = A iſt, ſich unter folgender Form darſtellt:

$$y = v \int \frac{e^{-Ax}\,dx}{v^2} \int e^{Ax} X v\,dx;$$

und da das vollſtändige Integrale hier durch eine zweyfache Integration erhalten wird, ſo wird es hinreichend ſeyn, für v ein partikulares Integrale aus der erſten Gleichung anzunehmen, was auch aus der allgemeinen Auflöſung erhellen wird.

Da man ſich alſo zur Auflöſung der erſtern Gleichung die quadratiſche Gleichung $t^2 + At + B = o$ bilden muß, ſo hat man der Natur derſelben gemäß drey Fälle zu entwickeln.

I. Iſt $t^2 + At + B = (t+f)(t+g)$, alſo $A = f+g$ und $B = fg$, ſo erhält man

$$v = \alpha e^{-fx} + \beta \cdot e^{-gx}.$$

Man nehme zuerſt nur das partikulare Integrale $v = e^{-fx}$, ſo wird, weil $A = f + g$ iſt:

$$y = e^{-fx} \int e^{(f-g)x}\,dx \int e^{gx} X\,dx.$$

Es ſey $e^{(f-g)x}\,dx = dR$ und $\int e^{gx} X\,dx = S$, ſo wird

$$y = e^{-fx} \int S\,dR = e^{-fx}(RS - \int R\,dS);$$

es iſt aber $R = \frac{1}{f-g} e^{(f-g)x}$, und daher ergibt ſich

$$y = \frac{1}{f-g} e^{-gx} S - \frac{1}{f-g} e^{-fx} \int e^{fx} X\,dx \text{ oder}$$

$$(f-g)\,y = e^{-gx} \int e^{gx} X\,dx - e^{-fx} \int e^{fx} X\,dx;$$

und eben dieſes Integrale würde zum Vorſchein gekommen ſeyn, wenn wir uns des andern partikularen Integrales $v = e^{-gx}$ bedienet hätten.

Im Allgemeinen aber ſetze man, wenn $v = \alpha \cdot e^{-fx} + \beta \cdot e^{-gx}$ genommen wird, wie vorhin

$$\frac{e^{-(f+g)x}\,dx}{v^2} = dR \quad \text{und} \quad \int e^{(f+g)x} X v\,dx = S,$$

ſo wird auf gleiche Weiſe

$$y = v \int S\,dR = v(RS - \int R\,dS).$$

Nehmen wir an, es ſey

$$R = \frac{C e^{\lambda x}}{v},$$

so wird, weil $dv = -dx(\alpha f e^{-fx} + \beta g e^{-gx})$ ist:

$$dR = \frac{C e^{\lambda x} dx(\alpha\lambda e^{-fx} + \beta\lambda e^{-gx} + \alpha f e^{-fx} + \beta g e^{-gx})}{v^2}.$$

Nun sey $\lambda = -g$ und $C\alpha(f-g) = 1$, damit dR einen bestimmten Werth erhalte, so wird, weil $C = \frac{1}{\alpha(f-g)}$ ist:

$$R = \frac{e^{-gx}}{\alpha(f-g)v} \quad \text{und} \quad RdS = \frac{1}{\alpha(f-g)} e^{fx} X dx;$$

dann aber ist

$$S = \alpha \int e^{gx} X dx + \beta \int e^{fx} X dx,$$

und hieraus findet man endlich

$$y = v\left[\frac{e^{-gx}}{(f-g)v}\int e^{gx} X dx + \frac{\beta e^{-gx}}{\alpha(f-g)v}\int e^{fx} X dx - \frac{1}{\alpha(f-g)}\int e^{fx} X dx\right],$$

oder ganz so, wie oben

$$(f-g)\,y = e^{-gx}\int e^{gx} X dx - e^{-fx}\int e^{fx} X dx.$$

II. Ist $t^2 + At + B = (t+f)^2$, oder $A = 2f$ und $B = f^2$, so folgt aus der erstern Gleichung $v = e^{-fx}(\alpha + \beta x)$. Man setze, wie vorhin,

$$\frac{e^{-2fx} dx}{v^2} = dR \quad \text{und} \quad \int e^{2fx} X v dx = S,$$

damit $y = v(RS - \int R dS)$ erhalten werde. Da nun

$dR = \frac{dx}{(\alpha+\beta x)^2}$ ist, so wird $R = -\frac{1}{\beta(\alpha+\beta x)} = -\frac{e^{-fx}}{\beta v}$ und

$$S = \alpha \int e^{fx} X dx + \beta \int e^{fx} X x dx = \int e^{fx} X dx(\alpha + \beta x),$$

daher $vRS = -\frac{\alpha}{\beta} e^{-fx}\int e^{fx} X dx - e^{-fx}\int e^{fx} X x dx$ und

$$\int R dS = -\frac{1}{\beta}\int e^{fx} X dx,$$

woraus sich ergibt

$$y = e^{-fx} x \int e^{fx} X dx - e^{-fx}\int e^{fx} X x dx;$$

oder, weil

$$d \,.\, e^{fx} y = dx \int e^{fx} X dx$$

ist, kürzer

$$y = e^{-fx}\int dx \int e^{fx} X dx.$$

III. Ist endlich $t^2 + At + B = t^2 + 2ft\cos.\varepsilon + f^2$, oder $A = 2f\cos.\varepsilon$ und $B = f^2$, so findet man

$$v = e^{-fx\cos.\zeta}\sin.[fx\sin.\varepsilon + \gamma].$$

Nun ſetze man

$$\frac{e^{-2fx\cos.\zeta}dx}{v^2} = \frac{dx}{\sin.^2(fx\sin.\zeta+\gamma)} = dR \text{ und}$$

$e^{2fx\cos.\zeta} X v dx = e^{fx\cos.\zeta} X dx \sin.(fx\sin.\zeta+\gamma) = dS$,
damit $y = vRS - v\int R dS$ zum Vorſchein komme. Es iſt aber

$$R = -\frac{1}{f\sin.\zeta}\cdot\frac{\cos.(fx\sin.\zeta+\gamma)}{\sin.(fx\sin.\zeta+\gamma)}; \text{ und daher}$$

$$vRS =$$

$$= -\frac{1}{f\sin.\zeta} e^{-fx\cos.\zeta}\cos.(fx\sin.\zeta+\gamma)\int e^{fx\cos.\zeta} X dx \sin.(fx\sin.\zeta+\gamma)$$

und

$$\int R dS = -\frac{1}{f\sin.\zeta}\int e^{fx\cos.\zeta} X dx \cos.(fx\sin.\zeta+\gamma);$$

mithin ergibt ſich

$$\begin{aligned} y\sin.\zeta = &+ e^{-fx\cos.\zeta}\sin.(fx\sin.\zeta+\gamma)\int e^{fx\cos.\zeta} X dx \cos.(fx\sin.\zeta+\gamma) \\ &- e^{-fx\cos.\zeta}\cos.(fx\sin.\zeta+\gamma)\int e^{fx\cos.\zeta} X dx \sin.(fx\sin.\zeta+\gamma). \end{aligned}$$

Zuſatz 1.

§. 857. Setzen wir in dieſem letzten Integrale $fx\sin.\zeta = \varphi$, ſo erhalten wir

$$fe^{fx\cos.\zeta} y\sin.\zeta =$$

$$\begin{aligned} = &(\sin.\gamma\cos.\varphi + \cos.\gamma\sin.\varphi)\int e^{fx\cos.\zeta} X dx(\cos.\gamma\cos.\varphi - \sin.\gamma\sin.\varphi) \\ &+ (\sin.\gamma\sin.\varphi - \cos.\gamma\cos.\varphi)\int e^{fx\cos.\zeta} X dx(\sin.\gamma\cos.\varphi + \cos.\gamma\sin.\varphi) \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} fe^{fx\cos.\zeta} y\sin.\zeta = &+ \sin.\gamma\cos.\gamma\cos.\varphi\int e^{fx\cos.\zeta} X dx\cos.\varphi \\ &- \sin.^2\gamma\cos.\varphi\int e^{fx\cos.\zeta} X dx\sin.\varphi \\ &+ \cos.^2\gamma\sin.\varphi\int e^{fx\cos\zeta} X dx\cos.\varphi \\ &- \sin.\gamma\cos.\gamma\sin.\varphi\int e^{fx\cos.\zeta} X dx\sin.\varphi \\ &+ \sin.^2\gamma\sin.\varphi\int e^{fx\cos.\zeta} X dx\cos.\varphi \\ &+ \sin.\gamma\cos.\gamma\sin.\varphi\int e^{fx\cos.\zeta} X dx\sin.\varphi \\ &- \sin.\gamma\cos.\gamma\cos.\varphi\int e^{fx\cos.\zeta} X dx\cos.\varphi \\ &- \cos.^2\gamma\cos.\varphi\int e^{fx\cos.\zeta} X dx\sin.\varphi, \end{aligned}$$

und hieraus geht hervor, daß der Winkel γ ganz aus der Rechnung wegfällt; denn man findet

$$\begin{aligned} fe^{fx\cos.\zeta} y\sin.\zeta = &\sin.\varphi\int e^{fx\cos.\zeta} X dx\cos.\varphi \\ &- \cos.\varphi\int e^{fx\cos.\zeta} X dx\sin.\varphi. \end{aligned}$$

Zusatz 2.

§. 858. Da wir uns also statt einer Gleichung zwey zu integrirende Gleichungen gebildet haben, so sehen wir ein, daß es hinreichend sey, wenn nur ein partikulares Integrale der einen Gleichung bekannt ist; denn in den beiden vorhergehenden Fällen sind die im vollständigen Integrale erscheinenden Constanten α und β von selbst aus der Rechnung weggefallen, und eben so ist im dritten Falle die beständige Größe γ verschwunden.

Beyspiel I.

§. 859. Man bestimme das Integrale der Gleichung $d^2y + A\,dy\,dx + By\,dx^2 = dx^2\,[n(n-1)x^{n-2} + nAx^{n-1} + Bx^n]$, wobey das Element dx constant genommen ist.

Dieses Beyspiel ist so beschaffen, daß ihm der Werth $y = x^n$ offenbar Genüge leistet, und demnach ein partikulares Integrale der gegebenen Gleichung ist. Um nun das vollständige Integrale zu bestimmen, sey $A = f + g$ und $B = fg$, so wird, weil

$$X = fgx^n + n(f+g)x^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} \text{ ist:}$$

$$\int e^{gx} X\,dx = fe^{gx}x^n + ne^{gx}x^{n-1} + \alpha \text{ und}$$

$$\int e^{fx} X\,dx = ge^{fx}x^n + ne^{fx}x^{n-1} + \beta,$$

also ergibt sich aus der gefundenen Form das vollständige Integrale

$$(f-g)y = fx^n + nx^{n-1} + \alpha e^{-gx} - gx^n - nx^{n-1} - \beta e^{-fx}$$

$$\text{oder } y = x^n + \frac{\alpha}{f-g}e^{-gx} - \frac{\beta}{f-g}e^{-fx};$$

oder, wenn man die Form der Constanten ändert:

$$y = x^n + \alpha e^{-fx} + \beta e^{-gx}.$$

Wenn $g = f$ ist, so setze man $g = f + \omega$, wobey $\omega = 0$ ist; also wird, weil $e^{-gx} = e^{-fx} \cdot e^{-\omega x} = e^{-fx}(1 - \omega x)$ ist, wenn man α und β für $\alpha + \beta$ und $-\beta\omega$ schreibt:

$$y = x^n + e^{-fx}(\alpha + \beta x).$$

Wenn aber

$$f = a + b\sqrt{-1} \text{ und } g = a - b\sqrt{-1}, \text{ also}$$

$$y = x^n + e^{-ax}(\alpha e^{-bx\sqrt{-1}} + \beta e^{bx\sqrt{-1}}),$$

so werden wir, weil

$$e^{\pm bx\sqrt{-1}} = \cos.bx \pm \sqrt{-1}\sin.bx$$

ist, nach Veränderung der Form der Constanten erhalten:

$$y = x^n + e^{-ax} (\alpha \cos. bx + \beta \sin. bx).$$

Anmerkung.

§. 860. Kennt man aber im Allgemeinen von einer Gleichung unter der Form

$$d^2y + Ady dx + Bydx^2 = Xdx^2$$

ein particuläres Integrale, oder einen dieser Gleichung Genüge leistenden Werth $y = t$, so wird das vollständige Integrale leicht gefunden, wenn man $y = t + z$ setzt. Denn da der Voraussetzung gemäß

$$d^2t + Adtdx + Btdx^2 = Xdx^2$$

ist, so wird man durch diese Substitution erhalten:

$$d^2z + Adzdx + Bzdx^2 = 0,$$

woraus sich, wenn $A = f + g$ und $B = fg$ ist, ergibt:

$$z = \alpha e^{-fx} + \beta e^{-gx},$$

und so wird das vollständige Integrale seyn:

$$y = t + \alpha e^{-fx} + \beta e^{-gx},$$

wie wir auch in dem angeführten Beyspiele gefunden haben.

Aufgabe 107.

§. 861. Man bestimme das vollständige Integrale folgender Differenzialgleichung des zweyten Grades:

$$d^2y - \frac{ndydx}{x} + Ax^n dxdy + Bx^{2n}ydx^2 = Xdx^2,$$

bey welcher das Element dx constant gesetzt ist, und X irgend eine Function von x bezeichnet.

Auflösung.

Die Auflösung dieser Aufgabe könnte, wie oben, aus der Annahme $y = uv$ abgeleitet werden, allein indem wir uns hier einer andern Methode bedienen, wollen wir dieselbe durch eine leichte Substitution auf die Form der vorhergehenden Aufgabe zurückführen. Wir setzen nämlich $x^n dx = dt$, damit $x^{n+1} = (n+1)t$ werde, und durch diese Substitution die Function X in irgend eine Function T von t übergehe. Damit aber die Annahme der Unveränderlichkeit des Elementes dx keine Störung verursache, so wollen wir diese Bedingung

aufheben, indem wir $dy = pdx$ und $dp = qdx$ ſetzen, und dann werden wir erhalten:

$$q - \frac{np}{x} + Ax^n p + Bx^{2n} y = X.$$

Da nun $dx = \frac{dt}{x^n}$ iſt, ſo wird $p = \frac{x^n dy}{dt}$, und wenn man nun das Element dx conſtant nimmt:

$$dp = \frac{nx^{n-1} dx dy}{dt} + \frac{x^n d^2 y}{dt} = qdx = \frac{qdt}{x^n}, \text{ alſo}$$

$$q = \frac{nx^{n-1} dy}{dt} + \frac{x^{2n} d^2 y}{dt^2},$$

und ſo wird unſere Gleichung ſeyn:

$$\frac{x^{2n} d^2 y}{dt^2} + \frac{nx^{n-1} dy}{dt} - \frac{nx^{n-1} dy}{dt} + \frac{Ax^{2n} dy}{dt} + Bx^{2n} y = X.$$

Wird $Xx^{-2n} = \Theta$ geſetzt, welche Größe für $x^{n+1} = (n+1)t$ als eine Function von t betrachtet werden kann, ſo erhält man:

$$d^2 y + Ady dt + Bydt^2 = \Theta dt^2,$$

in welcher Gleichung das Element dt conſtant genommen, und deren Integrale alſo durch die obigen gegeben iſt.

I. Wenn $A = f + g$ und $B = fg$, ſo wird das Integrale ſeyn

$$(f - g) y = e^{-gt} \int e^{gt} \Theta dt - e^{-ft} \int e^{ft} \Theta dt,$$

wo, wenn die Werthe $dt = x^n dx$ und $\Theta = Xx^{-2n}$ wieder geſetzt, und Kürze halber $t = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$ beybehalten wird, der Werth von y durch x ausgedrückt, ſich auf folgende Art darſtellt:

$$(f - g) y = e^{-gt} \int e^{gt} x^{-n} X dx - e^{-ft} \int e^{ft} x^{-n} X dx.$$

II. Iſt $A = 2f$ und $B = f^2$, ſo wird das Integrale

$$y = e^{-ft} t \int e^{ft} \Theta dt - e^{-ft} \int e^{ft} \Theta t dt, \text{ oder}$$

$$y = e^{-ft} \int dt \int e^{ft} \Theta dt,$$

welches alſo durch x ausgedrückt die Form erhält:

$$y = e^{-ft} \int x^n dx \int e^{ft} x^{-n} X dx.$$

III. Iſt endlich $A = 2f \cos. \zeta$ und $B = f^2$, ſo wird das Integrale ſeyn:

$$fe^{ft \cos. \zeta} y \sin. \zeta = \sin. \varphi \int e^{ft \cos. \zeta} \Theta dt \cos. \varphi -$$

$$- \cos. \varphi \int e^{ft \cos. \zeta} \Theta dt \sin. \varphi,$$

bey $\varphi = ft \sin.\zeta$ oder $\varphi = \frac{f \sin.\zeta}{n+1} x^{n+1}$, weil $t = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$

Das Integrale der vorgelegten Gleichung wird demnach seyn:

$$\int t \cos.\zeta\, y \sin.\zeta = \sin.\varphi \int e^{ft\cos.\zeta} x^{-n} X dx \cos.\varphi - \cos.\varphi \int e^{ft\cos.\zeta} x^{-n} X dx \sin.\varphi.$$

Zusatz 1.

§. 862. Wenn $n = 0$ ist, so geht die vorgelegte Gleichung über jene, welche wir im vorhergehenden Probleme behandelt haben, und wird $t = x$, also wird auch das Integrale dasselbe seyn.

Zusatz 2.

§. 863. Ist aber $n = -1$, so erhalten wir die Gleichung

$$d^2y + (A+1)\frac{dydx}{x} + \frac{Bydx^2}{x^2} = Xdx^2,$$

also $t = lx$ und $e^{\lambda t} = x^{\lambda}$; dann aber wird im dritten Falle der Winkel $\varphi = f \sin.\zeta lx$.

Anmerkung.

§. 864. Die Methode, deren wir uns hier zur Integration der Differenzialgleichungen des zweyten Grades bedienten, scheint nicht natürlich genug zu seyn, da sie sich gleichsam auf diese Formen allein erstreckt. Weil also bey den Differenzialgleichungen des ersten Grades Auffindung von Factoren, durch welche jene Gleichungen integrabel gemacht werden, so ausgezeichneten Nutzen zu versprechen schien, so wollen wir auch versuchen, ihre Anwendung bey den Differenzialgleichungen des zweyten Grades zu zeigen. Zwar lassen sich hier keine so absolute Vorschriften erwarten, die auf alle Formen der Gleichungen anwendbar seyen; allein so wenig wir auch hierin zu leisten vermögen, so wird man es denn doch als einen schätzbaren Beytrag zur Analysis betrachten müssen. Nach dieser Methode kann man besonders die Differenzialgleichungen des zweyten Grades, bey welchen die eine veränderliche y mit ihren Differenzialien stets nicht mehr als eine Dimension hat, mit Leichtigkeit behandeln, und dann wird man auch einsehen, auf welchem Wege man diese Methode noch zu einer größern Vollkommenheit empor heben müsse.

Kapitel V.

Von der Integration der Differenzialgleichungen des zweyten Grades, bey welchen die eine Veränderliche den ersten Grad nicht übersteigt, mittelst Factoren.

Aufgabe 108.

§. 865. Die Gleichung

$$d^2y + Adxdy + Bydx^2 = Xdx^2,$$

bey welcher das Element dx constant genommen ist, und wo die Größe X eine beliebige Function von x bezeichnet, sey gegeben; man soll eine solche Function von x auffinden, daß jene Gleichung, mit ihr multiplizirt, integrabel werde.

Auflösung.

Man setze $dy = pdx$, damit man eine Differenzialgleichung des ersten Grades erhalte, nämlich:

$$dp + Apdx + Bydx = Xdx,$$

welche mit irgend einer Function V von x multiplizirt, integrabel werde, nämlich:

$$Vdp + AVpdx + BVydx = VXdx,$$

und da hier das letzte Glied VXdx integrabel ist, so muß auch bey dem ersten Gliede die Integrabilität Statt finden. Es ist aber zuerst einleuchtend, daß Vp ein Theil des Integrales seyn werde, daher setze man dieses $= Vp + S$, so daß $Vp + S = \int VXdx$ werde, so erhält man

$$dS = -pdV + AVpdx + BVydx, \text{ oder}$$

$$dS = dy\left(AV - \frac{dV}{dx}\right) + BVydx,$$

welche Formel integrabel gemacht werden kann, wenn man $V = e^{\lambda x}$ setzt, denn dann wird

$dS = e^{\lambda x}[(A - \lambda)\,dy + Bydx]$ und $S = (A - \lambda)\,e^{\lambda x}y$,

wo die Größe λ so genommen werden muß, daß

$$A\lambda - \lambda^2 = B \quad \text{oder} \quad \lambda^2 - A\lambda + B = 0$$

werde. Dann wird man alſo finden:

$$e^{\lambda x} p + (A - \lambda)\, e^{\lambda x} y = \int e^{\lambda x} X dx, \quad \text{oder}$$

$$dy + (A - \lambda)\, y dx = e^{-\lambda x} dx \int e^{\lambda x} X dx,$$

welche Gleichung, mit $e^{(A-\lambda)x}$ multiplizirt, ebenfalls integrabel wird, und man erhält

$$e^{(A-\lambda)x} y = \int e^{(A-2\lambda)x} dx \int e^{\lambda x} X dx.$$

Weil λ eine Wurzel der Gleichung $\lambda^2 - A\lambda + B = 0$ iſt, ſo wird, wenn wir die beyden Wurzeln jener Gleichung mit f und g bezeichnen, ſo daß $\lambda = f$ iſt, $A - \lambda = g$, und dann iſt die Integralgleichung

$$e^{gx} y = \int e^{(g-f)x} dx \int e^{fx} X dx, \quad \text{oder}$$

$$e^{gx} y = \frac{1}{g-f} e^{(g-f)x} \int e^{fx} X dx - \frac{1}{g-f} \int e^{gx} X dx,$$

welche ſich in die oben gefundene Form verwandelt, nämlich in

$$y = \frac{1}{g-f} e^{-fx} \int e^{fx} X dx - \frac{1}{g-f} e^{-gx} \int e^{gx} X dx.$$

Zuſatz 1.

§. 866. Die vorgelegte Gleichung, oder die aus ihr entſtandene

$$dp + Apdx + Bydx = Xdx,$$

wird integrabel, wenn man hiermit $e^{\lambda x}$ multiplizirt, wobey

$$\lambda^2 - A\lambda + B = 0$$

iſt, und ſo erhält man einen doppelten Factor, nämlich entweder e^{fx} oder e^{gx}.

Zuſatz 2.

§. 867. Multiplizirt man aber jene Gleichung mit dem Factor e^{fx}, ſo erhält man das Integrale

$$dy + gydx = e^{-fx} dx \int e^{fx} X dx,$$

und ſo wird ſie auf die Integration einer Differenzialgleichung des erſten Grades zurückgeführt, welche endlich durch die Multiplication mit e^{gx} zum zweytenmahl integrabel wird.

Anmerkung.

§. 868. Den Multiplicator V mußte man ſo beſtimmen, daß

der Ausdruck $dy\left(AV - \frac{dV}{dx}\right) + BVydx$ für sich integrabel wurde. Dann aber wird, weil V eine Function von x bezeichnet, der Ausdruck $y\left(AV - \frac{dV}{dx}\right)$ das Integrale seyn, daher muß nothwendig $AdV - \frac{d^2V}{dx} = BVdx$ oder $d^2V - AdxdV + BVdx^2 = 0$ werden, und von der Integration dieser Gleichung hängt die Auffindung des gesuchten Factor V ab.

Es ist aber hinreichend, von jener Gleichung nur ein particuläres Integrale zu nehmen; denn wenn die vorgelegte Gleichung integrabel gemacht werden soll, so wird dann durch die Integration selbst eine willkürliche Constante eingeführt, um das Resultat zum vollständigen Integrale zu erheben.

Aufgabe 109.

§. 869. Die Gleichung

$$d^2y + Pdydx + Qydx^2 = Xdx^2,$$

bey welcher das Element dx constant genommen ist, und wo P, Q und X beliebige Functionen von x bezeichnen, sey gegeben, man soll einen Multiplicator V finden, der eine Function von x ist, und durch welchen jene Gleichung integrabel gemacht wird.

Auflösung.

Weil die durch V multiplizirte Gleichung

$$Vd^2y + VPdydx + VQydx^2 = VXdx^2$$

integrabel ist, so setze man das Integrale des ersten Theiles gleich $Vdy + Sydx$, denn eine andere Form kann es nicht haben, und es muß folgende Gleichung zum Vorschein kommen:

$$VPdydx + VQydx^2 = dydV + Sdydx + ydSdx,$$

weil aber hier S nothwendig eine Function von x ist, so wird

$$VPdx = dV + Sdx \quad \text{und} \quad VQdx = dS.$$

Hieraus ergibt sich $S = VP - \frac{dV}{dx}$, und demnach muß der Multiplicator V aus der Gleichung

$$VQdx = VdP + PdV - \frac{d^2V}{dx}, \text{ oder}$$

$$d^2V - PdVdx + Vdx(Qdx - dP) = 0$$

bestimmt werden; läßt sich also diese Gleichung auflösen, oder kann man doch wenigstens ein particuläres Integrale derselben angeben, um den Multiplicator V zu erhalten, so wird das Integrale der vorgelegten Gleichung seyn:

$$Vdy + y(VPdx - dV) = dx\int VXdx,$$

welche ferner integrabel gemacht wird, wenn man sie mit $\frac{1}{V^2}\, e^{\int Pdx}$ multiplizirt, denn man findet das Integrale

$$\frac{y}{V}\, e^{\int Pdx} = \int \frac{dx}{V^2}\, e^{\int Pdx} \int VXdx, \text{ oder}$$

$$y = e^{-\int Pdx} V \int e^{\int Pdx} \frac{dx}{V^2} \int VXdx,$$

wo durch das doppelte Integralzeichen zwey willkürliche Constanten eingeführt werden, wodurch das Integrale vollständig angegeben wird.

Zusatz 1.

§. 870. Die Auffindung des Multiplicators V hängt also auch von der Auflösung einer Differenzialgleichung des zweyten Grades ab, allein diese ist einfacher als die vorgelegte Gleichung, weil sie die Function X nicht enthält, und die Größe V mit ihren Differenzialien dV und d^2V durchaus nur eine Dimension hat.

Zusatz 2.

§. 871. Wird demnach $V = e^{\int vdx}$ gesetzt, so wird die Größe v durch folgende Differenzialgleichung des ersten Grades bestimmt werden:

$$dv + v^2dx - Pvdx + Qdx - dP = 0,$$

und kennt man von dieser wenigstens ein particuläres Integrale, so wird man auch die vorgelegte Gleichung integriren können.

Zusatz 3.

§. 872. Ist aber der Multiplicator V gegeben, so wird umgekehrt die Beziehung der vorgelegten Gleichung so fest gesetzt, daß sie auf diese Art integrabel wird; denn man wird erhalten, entweder

$$Q = \frac{dP}{dx} + \frac{PdV}{Vdx} - \frac{d^2V}{Vdx^2}, \text{ oder}$$

$$dP + \frac{PdV}{V} = Qdx + \frac{d^2V}{Vdx},$$

oder durch Integration:

$$PV = \frac{dV}{dx} + \int QV dx \quad \text{oder} \quad P = \frac{dV}{Vdx} + \frac{\int QV dx}{V}.$$

Beyspiel 1.

§. 873. Die Form der Differenzialgleichung des zweyten Grades

$$d^2y + Pdydx + Qydx^2 = Xdx^2$$

so zu bestimmen, daß sie durch die Multiplication mit $e^{\lambda x}$ integrabel werde.

Nimmt man den Multiplicator $V = e^{\int v dx} = e^{\lambda x}$, so wird $v = \lambda$, und es muß der Gleichung

$$\lambda^2 dx - \lambda P dx + Q dx - dP = 0$$

Genüge geleistet werden, und daher wird

$$Q = \lambda P - \lambda^2 + \frac{dP}{dx}.$$

Dieß wird aber erstlich der Fall seyn, wenn P und Q constant sind, nämlich $P = A$ und $Q = B$, und dann muß man λ aus der Gleichung $\lambda^2 - A\lambda + B = 0$ bestimmen, welchen Fall wir schon oben behandelt haben. Was aber auch übrigens P für eine Function von x seyn mag, so wird, so bald nur $Q = \lambda P - \lambda^2 + \frac{dP}{dx}$ ist, die Gleichung mit $e^{\lambda x}$ multiplicirt, integrabel werden; denn das Integrale wird seyn:

$$e^{\lambda x}[dy + ydx(P - \lambda)] = dx \int e^{\lambda x} X dx, \quad \text{oder}$$
$$dy + (P - \lambda) ydx = e^{-\lambda x} dx \int e^{\lambda x} X dx,$$

und wenn diese ferner mit $e^{\int P dx - \lambda x}$ multiplicirt wird, so gibt die Integration

$$y = e^{-\int P dx + \lambda x} \int e^{\int P dx - 2\lambda x} dx \int e^{\lambda x} X dx.$$

Zusatz.

§. 874. Es sey $P = A + \alpha x$ und $Q = B + \beta x$, so wird

$$B + \beta x = A\lambda + \alpha\lambda x - \lambda^2 + \alpha, \quad \text{also}$$
$$B = A\lambda - \lambda^2 + \alpha \quad \text{und} \quad \beta = \alpha\lambda,$$

und daher müssen, weil $\lambda = \frac{\beta}{\alpha}$ ist, die Coefficienten A, B, α, β so gebildet seyn, daß man erhält

$$B\alpha^2 = A\alpha\beta - \beta^2 + \alpha^3 \quad \text{oder} \quad B\alpha^2 + \beta^2 = \alpha(A\beta + \alpha^2).$$

Beyſpiel 2.

§. 875. Man beſtimme die Form der Differenzialgleichung des zweyten Grades

$$d^2y + Pdydx + Qydx^2 = Xdx^2$$

daß ſie, multiplicirt mit $e^{\int vdx}$, wobey

$$v = \frac{\lambda}{x} + \mu x^n$$

, integrabel werde.

Da

$$dv + v^2dx - Pvdx + Qdx - dP = 0$$

n muß, ſo erhält man

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{\lambda}{x^2} + \mu n x^{n-1} - \frac{\lambda P}{x} - \mu P x^n \\ &+\frac{\lambda^2}{x^2} + 2\lambda\mu x^{n-1} + \mu^2 x^{2n} + Q - \frac{dP}{dx} \end{aligned}\right\} = 0, \text{ alſo}$$

$$= \frac{\lambda(1-\lambda)}{x^2} - (2\lambda + n)\mu x^{n-1} - \mu^2 x^{2n} + \frac{\lambda P}{x} + \mu P x^n + \frac{dP}{dx},$$

) wenn wir $P = \frac{\alpha}{x} + \beta x^n$ ſetzen, ſo finden wir

$$Q = \frac{1}{x^2}(\lambda - \lambda^2 + \alpha\lambda - \alpha) +$$

$$+ x^{n-1}(\beta\lambda + \alpha\mu + \beta n - 2\lambda\mu - n\mu) + x^{2n}(\beta\mu - \mu^2).$$

Nun ſey $Q = \frac{\gamma}{x^2} + \delta x^{n-1} + \varepsilon x^{2n}$, ſo muß

$$-(\alpha+1)\lambda + \alpha + \gamma = 0,\ \beta(\lambda+n) + \mu(\alpha - 2\lambda - n) = \delta$$
$$\text{und}\quad \mu(\beta - \mu) = \varepsilon$$

n, und hieraus ergeben ſich nicht allein für den Multiplicator die erthe von λ und μ, ſondern auch eine beſtimmte Relation zwiſchen i Größen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$.

Wäre z. B. $\gamma = 0$ und $\delta = 0$, ſo wird $(\lambda - \alpha)(\lambda - 1) = 0$, o $\lambda = \alpha$; ferner $(\beta - \mu)(\alpha + n) = 0$, alſo $\alpha = \lambda = -n$ b $\mu^2 - \beta\mu + \varepsilon = 0$; es erhält nämlich die Gleichung

$$d^2y + dxdy\left(\beta x^n - \frac{n}{x}\right) + \varepsilon x^{2n} y dx^2 = X dx^2,$$

i Ausdruck $e^{\int vdx}$ als Multiplicator, wobey $v = -\frac{n}{x} + \mu x^n$ iſt, nn μ ſo genommen wird, daß $\mu^2 - \beta\mu + \varepsilon = 0$ wird. Man erit alſo den Multiplicator

$$V = \frac{1}{x^n} e^{\frac{\mu}{n+1} x^{n+1}} \quad \text{und} \quad e^{\int P dx} = \frac{1}{x^n} e^{\frac{\beta}{n+1} x^{n+1}},$$

folglich, wenn $\frac{1}{n+1} x^{n+1} = t$ gesetzt wird:

$$y = x^n e^{-\beta t} \cdot \frac{1}{x^n} e^{\mu t} \int e^{\beta t - 2\mu t} x^n dx \int \frac{e^{\mu t} X dx}{x^n}, \text{ oder}$$

$$y = e^{(\mu-\beta)t} \int e^{(\beta-2\mu)t} x^n dt \int \frac{e^{\mu t} X dx}{x^n}.$$

Zusatz 1.

§. 876. Wenn $\gamma = 0$ und $\varepsilon = 0$ gesetzt wird, so wird $\mu = \beta$, $\beta(\alpha - \lambda) = \delta$ und $(\lambda - \alpha)(\lambda - 1) = 0$, also $\lambda = 1$ und $\delta = (\alpha - 1)\beta$ und demnach $P = \frac{\alpha}{x} + \beta x^n$, $Q = (\alpha - 1)\beta x^{n-1}$, und der Multiplicator der Gleichung

$$d^2y + \left(\frac{\alpha}{x} + \beta x^n\right) dx dy + (\alpha - 1)\beta x^{n-1} y dx^2 = X dx^2$$

ist $V = e^{\int v dx}$, wobey $v = \frac{1}{x} + \beta x^n$, so daß man erhält:

$$V = x \cdot e^{\frac{\beta}{n+1} x^{n+1}} \quad \text{und} \quad e^{\int P dx} = x^\alpha e^{\frac{\beta}{n+1} x^{n+1}}.$$

Zusatz 2.

§. 877. In diesem Falle erhält man also, wenn $\frac{1}{n+1} x^{n+1} = t$ gesetzt wird, folgendes Integrale:

$$y = x^{1-\alpha} \int x^{\alpha-2} e^{-\beta t} dx \int e^{\beta t} X x dx,$$

welche Formel sich nicht einfacher ausdrücken läßt, weil im Allgemeinen die Formel $e^{-\beta t} x^{\alpha-2} dx$ die Integration nicht zuläßt.

Anmerkung.

§. 878. Da also die Auffindung der Multiplicatoren, welche die Gleichungen von der Form

$$d^2y + P dx dy + Q y dx^2 = X dx^2$$

integrabel machen, die Auflösung der Gleichung

$$d^2V - P dV dx + V dx (Q dx - dP) = 0$$

erfordert, diese aber enthalten ist in der Form

$$d^2y + P dx dy + Q y dx^2 = 0,$$

so muß man sehen, wie man auch diese Gleichung mittels Factoren behandeln müsse. Wenn nun der Multiplicator V dieser Gleichung, welchen man sich als irgend eine Function von x zu denken hat, wieder die vorige Form

$$d^2V - PdVdx + Vdx(Qdx - dP) = 0$$

erhält, und man setzt den Multiplicator dieser letztern $= U =$ einer Function von x, so wird sich dieser aus der Gleichung

$$d^2U + PdUdx + QUdx^2 = 0$$

bestimmen lassen, so daß es hinreichend ist, eine von diesen beyden Gleichungen aufzulösen. Wir sind zwar auch oben, wo wir $y = uv$ gesetzt haben, auf diese letztere Gleichung gekommen, allein man darf sich nicht wundern, daß eine dieser beyden Gleichungen von der andern abhängt, weil die erstere aus der letztern entsteht, wenn man $U = e^{-\int P dx} V$ setzt, die letztere aber aus der erstern, wenn man $V = e^{\int P dx} U$ nimmt, wovon man sich durch den Versuch leicht überzeugen wird. Weil man nun auf diese Art die sich etwa darbiethende Schwierigkeit nicht beseitigen kann, so muß man untersuchen, ob man vielleicht durch einen solchen Multiplicator, welcher beyde Veränderliche x und y mit ihren Differenzialien dx und dy, oder $p = \frac{dy}{dx}$ enthält, seinen Zweck erreicht. Allein es ist leicht einzusehen, daß, wenn die Differenzialien ausgeschlossen werden, dieß nicht möglich sey, denn wäre der Multiplicator V eine Function von x und y, so würde man aus dem ersten Gliede d^2y den Theil Vdy des Integrales erhalten, welcher aber nach der Differenziation, wenn $dV = Mdx + Ndy$ gesetzt wird, den Theil Ndy^2 enthalten würde, der in der Gleichung nicht erscheint, und auch durch die übrigen Theile des Integrales nicht aufgehoben werden könnte. Wir müssen demnach versuchen, unser Ziel durch solche Multiplicatoren zu erreichen, welche auch den Differenzialquotienten $p = \frac{dy}{dx}$ enthalten, und weil y mit seinen Differenzialien durchaus dieselbe Anzahl von Dimensionen hat, so muß diese Eigenschaft nothwendig auch im Multiplicator vorhanden seyn; denn kämen sie von einander verschieden vor, so würden sie, einzeln genommen, für sich zum Ziele führen.

Aufgabe 110.

§. 879. Die Bedingungen zu bestimmen, daß, wenn das Element dx constant genommen wird, ein

Multiplicator von der Form $Mp + Ny$, wo $p = \frac{dy}{dx}$, und M und N Functionen von x ſind, die Gleichung

$$d^2y + Pdxdy + Qydx^2 = o,$$

wo P und Q Functionen von x bezeichnen, integrabel mache.

Auflöſung.

Weil $dy = pdx$ iſt, ſo iſt unſere Gleichung

$$dp + Ppdx + Qydx = o,$$

und durch die Multiplication mit $Mp + Ny$ geht ſie über in

$$Mpdp + Nydp + MPpdy + NPydy + NQy^2dx = o,$$
$$+ MQydy,$$

welche Gleichung integrabel ſeyn muß. Wegen der Glieder, die das Differenziale dp enthalten, wird $\frac{1}{2}Mp^2 + Nyp$ ein integrabler Theil ſeyn, und daher ſetze man das Integrale $= \frac{1}{2}Mp^2 + Nyp + S$. Da nun das Differenziale dieſes Ausdrucks jene Gleichung ſelbſt geben muß, ſo erhalten wir:

$$dS = MPpdy + NPydy + NQy^2dx$$
$$+ MQydy$$
$$- \frac{1}{2}p^2dM - ypdN$$
$$- Npdy,$$

welche Formel alſo integrabel ſeyn muß, und da ſie bloß die Differenzialien der erſten Ordnung dx und dy enthält, ſo verſchwindet die Größe p nothwendig aus der Rechnung. Wird alſo $dM = M'dx$ und $dN = N'dx$ geſetzt, ſo muß, weil $pdx = dy$ iſt, das erſte, den Factor p enthaltende Glied gleich Null werden, damit man erhält

$$MPpdy - \frac{1}{2}M'pdy - Npdy = o, \text{ oder}$$

$$MP - \frac{1}{2}M' - N = o, \text{ oder } N = MP - \frac{dM}{2dx}.$$

Dann aber wird

$$dS = ydy(NP + MQ - N') + NQy^2dx,$$

und das Integrale dieſer Formel iſt:

$$S = \frac{1}{2}y^2(NP + MQ - N'), \text{ oder } S = y^2 \int NQdx,$$

welche beyden Ausdrücke übereinſtimmen müſſen, und daher wird

$$NP + MQ - \frac{dN}{dx} = 2\int NQdx, \text{ oder}$$

$$dP + PdN + MdQ + QdM - \frac{d^2N}{dx} - 2NQdx = 0,$$

d dieſe Gleichung, verbunden mit $N = MP - \frac{dM}{2dx}$, beſtimmt die rlangten Bedingungen; daher ergibt ſich dann die Integralgleichung

$$\tfrac{1}{2}Mp^2 + Nyp + \tfrac{1}{2}y^2\left(NP + MQ - \frac{dN}{dx}\right) = C.$$

Zuſatz 1.

§. 880. Wenn die Functionen P und Q gegeben ſind, und man l daraus die Größen M und N beſtimmen, ſo erhält man, weil $= MP - \frac{dM}{2dx}$ iſt:

$$dN = MdP + PdM - \frac{d^2M}{2dx},$$

d die Function M wird ſich aus folgender Gleichung ergeben:

$$\frac{M}{x^2} - \frac{3Pd^2M}{2dx} + \left(P^2 - \frac{5dP}{2dx} + 2Q\right)dM + M\left(2PdP - \frac{d^2P}{dx} - 2PQdx + dQ\right) = 0,$$

lche Gleichung wenig nützt, weil ſie Differenzialien der dritten Ordng enthält.

Zuſatz 2.

§. 881. Iſt aber der Multiplicator $Mp + Ny$ gegeben, ſo wird Gleichung ſelbſt ſo beſtimmt, daß zuerſt $P = \frac{N}{M} + \frac{dM}{2Mdx}$ wird, d dann ergibt ſich:

$$dQ + \frac{QdM}{M} - 2 \cdot \frac{NQdx}{M} = \frac{d^2N}{Mdx} - \frac{d \cdot PN}{M}.$$

Wird dieſe Gleichung mit $Me^{-2\int\frac{Ndx}{M}}$ multiplicirt, ſo gibt ſie in das Integrale

$$MQe^{-2\int\frac{Ndx}{M}} = \int e^{-2\int\frac{Ndx}{M}}\left(\frac{d^2N}{dx} - d \cdot PN\right).$$

Zuſatz 3.

§. 882. Es ſey dieſes Integrale $= Z$, ſo wird

$$= e^{-2\int\frac{Ndx}{M}}\left(\frac{dN}{dx} - PN\right) + \int e^{-2\int\frac{Ndx}{M}}\left(\frac{2NdN}{M} - \frac{2PN^2dx}{M}\right),$$

wo das letztere Glied, wenn für P der Werth gesetzt wird, übergeht in

$$\int e^{-2\int\frac{N\,dx}{M}}\left(\frac{2N\,dN}{M}-\frac{2N^3\,dx}{M^2}-\frac{N^2\,dM}{M^2}\right),$$

dessen Integrale offenbar $e^{-2\int\frac{N\,dx}{M}}\cdot\frac{N^2}{M}$ ist, so daß man erhält:

$$z=e^{-2\int\frac{N\,dx}{M}}\left(\frac{dN}{dx}-\frac{N\,dM}{2M\,dx}\right)+C, \text{ folglich}$$

$$Q=\frac{C}{M}e^{2\int\frac{N\,dx}{M}}+\frac{dN}{M\,dx}-\frac{N\,dM}{2M^2\,dx}.$$

Zusatz 4.

§. 883. Wenn die Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx}+\left[\frac{N}{M}+\frac{dM}{2M\,dx}\right]dy+y\left[\frac{C\,dx}{M}e^{2\int\frac{N\,dx}{M}}+\frac{dN}{M}-\frac{N\,dM}{2M^2}\right]=0$$

gegeben ist, so wird, nachdem dieselbe mit $\frac{M\,dy}{dx}+Ny$ multiplicirt worden ist, das Integrale

$$\frac{M\,dy^2}{2\,dx^2}+\frac{N\,y\,dy}{dx}+\tfrac{1}{2}y^2\left(Ce^{2\int\frac{N\,dx}{M}}+\frac{N^2}{M}\right)=\text{Const.}$$

Anmerkung.

§. 884. Da man also für M und N beliebige Functionen von x nehmen kann, so haben wir dadurch unzählige Formen von Differenzialgleichungen des zweyten Grades erhalten, welche wir mit Hülfe des Multiplicators $\frac{M\,dy}{dx}+Ny$ integriren können. Die allgemeine Form, der dieser Factor den Charakter der Integrabilität verleiht, ist, wie wir gesehen haben:

$$\frac{d^2y}{dx}+\frac{dy}{2M\,dx}(dM+2N\,dx)$$
$$+\frac{y}{2M^2}(2M\,dN-N\,dM+2CMe^{2\int\frac{N\,dx}{M}}dx),$$

und das Integrale selbst ist:

$$\frac{M\,dy^2}{2\,dx^2}+\frac{N\,y\,dy}{dx}+\tfrac{1}{2}y^2\left(\frac{N^2}{M}+Ce^{2\int\frac{N\,dx}{M}}\right).$$

Man sieht leicht ein, daß die Exponentialgröße, die mit der Constanten C multiplicirt ist, beyderseits weggelassen werden könne, weil sie allein jene Eigenschaft besitzt. Wenn wir die Exponentialgröße auf einen algebraischen Ausdruck zurückführen, indem wir $e^{2\int\frac{N\,dx}{M}}=L$

ſetzen, ſo erhalten wir

$$\frac{2Ndx}{M} = \frac{dL}{L} \text{ und } N = \frac{MdL}{2Ldx}, \text{ alſo}$$

$$dN = \frac{Md^2L}{2Ldx} + \frac{dLdM}{2Ldx} - \frac{MdL^2}{2L^2dx},$$

und daher gibt die Formel

$$\frac{d^2y}{dx} + \frac{dy}{2dx}\left(\frac{dM}{M} + \frac{dL}{L}\right) + \tfrac{1}{2}y\left(\frac{d^2L}{Ldx} + \frac{dLdM}{2LMdx} - \frac{dL^2}{L^2dx} + \frac{2CLdx}{M}\right),$$

wenn ſie mit $\frac{Mdy}{dx} + \frac{MydL}{2Ldx}$ multiplicirt wird, das Integrale

$$\frac{Mdy^2}{2dx^2} + \frac{MydLdy}{2Ldx^2} + \tfrac{1}{2}y^2\left(\frac{MdL^2}{4L^2dx^2} + CL\right).$$

Wenn wir aber $\frac{dM}{M} + \frac{dL}{L} = \frac{2dK}{K}$ ſetzen, ſo daß $M = \frac{K^2}{L}$ wird, ſo erhalten wir folgende Differenzialgleichung des zweyten Grades:

$$\frac{d^2y}{dx} + \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dK}{K} + \tfrac{1}{2}y\left(d\cdot\frac{dL}{L.dx} - \frac{dL^2}{2L^2dx} + \frac{dKdL}{KLdx} + \frac{2CL^2dx}{K^2}\right) = 0,$$

und wenn wir dieſe mit $\frac{K^2}{L}\left(\frac{dy}{dx} + \frac{ydL}{2Ldx}\right)$ multipliciren, ſo erhalten wir dann das Integrale

$$\frac{K^2}{2L}\left[\frac{dy^2}{dx^2} + \frac{ydLdy}{Ldx^2} + y^2\left(\frac{dL^2}{4L^2dx^2} + \frac{CL^2}{K^2}\right)\right] = \text{Const.}$$

Beyſpiel 1.

§. 885. Sey $K = x^m(a+x)^n$ und $L = x^\mu(a+x)^\nu$, ſo wird

$$\frac{dK}{Kdx} = \frac{m}{x} + \frac{n}{a+x} = \frac{ma+(m+n)x}{x(a+x)}, \quad \frac{dL}{Ldx} = \frac{\mu}{x} + \frac{\nu}{a+x},$$

alſo wird der Coefficient von $\frac{1}{2}ydx$ ſeyn:

$$-\frac{\mu}{x^2} - \frac{\nu}{(a+x)^2} - \frac{\mu^2}{2x^2} - \frac{\mu\nu}{x(a+x)} - \frac{\nu^2}{2(a+x)^2} + \frac{m\mu}{x^2} + \frac{m\nu+n\mu}{x(a+x)} + \frac{n\nu}{(a+x)^2} + 2Cx^{2\mu-2m}(a+x)^{2\nu-2n},$$

oder

$$\frac{\mu(2m-\mu-2)}{2x^2}+\frac{m\nu+n\mu-\mu\nu}{x(a+x)}+\frac{\nu(2n-\nu-2)}{2(a+x)^2}$$
$$+2Cx^{2\mu-2m}(a+x)^{2\nu-2n},$$

wobey es gut seyn wird, folgende Fälle zu bemerken:

I. Sey $m=\mu+1$ und $n=\nu$, so erhält $-\frac{1}{2}ydx$ den Coefficienten

$$\frac{\mu^2+4C}{2x^2}+\frac{\nu(\mu+1)}{x(a+x)}+\frac{\nu(\nu-2)}{2(a+x)^2};$$

hieraus ergibt sich die Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx}+dy\left(\frac{\mu+1}{x}+\frac{\nu}{a+x}\right)$$
$$+\tfrac{1}{4}ydx\left(\frac{\mu^2+4C}{x^2}+\frac{2\nu(\mu+1)}{x(a+x)}+\frac{\nu(\nu-2)}{(a+x)^2}\right)=0,$$

und wenn diese mit

$$x^{\mu+2}(a+x)^{\nu}\left[\frac{dy}{dx}+\left(\frac{\mu}{x}+\frac{\nu}{a+x}\right)\frac{y}{2}\right]$$

multiplicirt wird, so erhält man das Integrale

$$\tfrac{1}{6}x^{\mu+2}(a+x)^{\nu}\left[\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{ydy}{dx}\left(\frac{\mu}{x}+\frac{\nu}{a+x}\right)\right.$$
$$\left.+\tfrac{1}{4}y^2\left(\frac{\mu^2+4C}{x^2}+\frac{2\mu\nu}{x(a+x)}+\frac{\nu^2}{(a+x)^2}\right)\right]=\text{Const.}$$

II. Für $m=\mu+\frac{1}{2}$ und $n=\nu+\frac{1}{2}$ erhält $\frac{1}{2}ydx$ den Coefficienten

$$\frac{\mu(\mu-1)}{2x^2}+\frac{2\mu\nu+\mu+\nu+4C}{2x(a+x)}+\frac{\nu(\nu-1)}{2(a+x)^2}.$$

Wird demnach die Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx}+dy\left[\frac{2\mu+1}{2x}+\frac{2\nu+1}{2(a+x)}\right]$$
$$+\tfrac{1}{4}ydx\left[\frac{\mu(\mu-1)}{x^2}+\frac{2\mu\nu+\mu+\nu+4C}{x(a+x)}+\frac{\nu(\nu-1)}{(a+x)^2}\right]=0$$

multiplicirt mit

$$x^{\mu+1}(a+x)^{\nu+1}\left[\frac{dy}{dx}+\tfrac{1}{2}y\left(\frac{\mu}{x}+\frac{\nu}{a+x}\right)\right],$$

so findet man das Integrale

$$\tfrac{1}{2}x^{\mu+1}(a+x)^{\nu+1}\left[\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{ydy}{dx}\left(\frac{\mu}{x}+\frac{\nu}{a+x}\right)\right.$$
$$\left.+\tfrac{1}{4}y^2\left(\frac{\mu^2}{x^2}+\frac{2\mu\nu+4C}{x(a+x)}+\frac{\nu^2}{(a+x)^2}\right)\right]=\text{Const.}$$

III. Sey $m = \mu$ und $n = \nu + 1$, so wird der Coefficient von $\frac{1}{2} y\,dx$ folgender seyn:

$$\frac{\mu(\mu-2)}{2x^2} + \frac{\mu(\nu+1)}{x(a+x)} + \frac{\nu^2+4C}{2(a+x)^2}.$$

Wird also die Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx} + dy\left(\frac{\mu}{x} + \frac{\nu+1}{a+x}\right) + \tfrac{1}{4} y\,dx\left[\frac{\mu(\mu-2)}{x^2} + \frac{2\mu(\nu+1)}{x(a+x)} + \frac{\nu^2+4C}{(a+x)^2}\right] = 0$$

multiplicirt durch

$$x^{\mu}(a+x)^{\nu+2}\left[\frac{dy}{dx} + \tfrac{1}{2} y\left(\frac{\mu}{x} + \frac{\nu}{a+x}\right)\right],$$

so ergibt sich als Integrale

$$\tfrac{1}{2} x^{\mu}(a+x)^{\nu+2}\left[\frac{dy^2}{dx^2} + \frac{y\,dy}{dx}\left(\frac{\mu}{x} + \frac{\nu}{a+x}\right) + \tfrac{1}{4} y^2\left(\frac{\mu^2}{x^2} + \frac{2\mu\nu}{x(a+x)} + \frac{\nu^2+4C}{(a+x)^2}\right)\right] = \text{Const.}$$

Zusatz 1.

§. 886. Es sey im ersten Falle $\nu = 2$ und $C = -\frac{1}{4}\mu^2$, so erhält man die Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx} + \frac{(\mu+1)a + (\mu+3)x}{x(a+x)}\,dy + \frac{(\mu+1)y\,dx}{x(a+x)} = 0,$$

und wenn diese durch

$$x^{\mu+2}(a+x)^2\left(\frac{dy}{dx} + \frac{\mu a + (\mu+2)x}{2x(a+x)}\,y\right)$$

multiplicirt wird, so ergibt sich das Integrale

$$\tfrac{1}{2} x^{\mu+2}(a+x)^2\left[\frac{dy^2}{dx^2} + \frac{\mu a + (\mu+2)x}{x(a+x)} \cdot \frac{y\,dy}{dx} + y^2\left(\frac{\mu}{x(a+x)} + \frac{1}{(a+x)^2}\right)\right] = \text{Const.}$$

Zusatz 2.

§. 887. Wird im dritten Falle $\mu = 2$ und $4C = -\nu^2$ gesetzt, so erhält man die Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx} + dy \cdot \frac{2a + (\nu+3)x}{x(a+x)} + \frac{(\nu+1)y\,dx}{x(a+x)} = 0,$$

und diese Gleichung gibt, durch

$$x^2(a+x)^{\nu+2}\left[\frac{dy}{dx} + \tfrac{1}{2} y\left(\frac{2}{x} + \frac{\nu}{a+x}\right)\right]$$

multiplicirt, das Integrale

$$\tfrac{1}{2}x^2(a+x)^\nu + 2\left[\frac{dy^2}{dx^2} + \frac{y\,dy}{dx}\left(\frac{2}{x} + \frac{\nu}{a+x}\right) + y^2\left(\frac{1}{x^2} + \frac{\nu}{x(a+x)}\right)\right] = \text{Const.}$$

Beyspiel 2.

§. 888. Sey $K = x^m(a^2+x^2)^n$ und $L = x^\mu(a^2+x^2)^\nu$, so wird

$$\frac{dK}{K\,dx} = \frac{m}{x} + \frac{2nx}{a^2+x^2} \text{ und } \frac{dL}{L\,dx} = \frac{\mu}{x} + \frac{2\nu x}{a^2+x^2},$$

und die Differenzialgleichung des zweyten Grades wird die Form erhalten:

$$\frac{d^2y}{dx} + dy\left(\frac{m}{x} + \frac{2nx}{a^2+x^2}\right) + \tfrac{1}{2}y\,dx\left[\frac{\mu(2m-\mu-2)}{2x^2} + \frac{2n\mu + 2\nu(m-\mu+1)}{a^2+x^2} + \frac{2\nu(2n-\nu-2)x^2}{(a^2+x^2)^2} + \frac{2Cx^{2\mu-2m}}{(a^2+x^2)^{2n-2\nu}}\right] = 0.$$

Wird diese Gleichung mit

$$x^{2m-\mu}(a^2+x^2)^{2n-\nu}\left[\frac{dy}{dx} + \tfrac{1}{2}y\left(\frac{\mu}{x} + \frac{2\nu x}{a^2+x^2}\right)\right]$$

multiplicirt, so findet man dann das Integrale

$$\tfrac{1}{2}x^{2m-\mu}(a^2+x^2)^{2n-\nu}\left[\frac{dy^2}{dx^2} + \frac{y\,dy}{dx}\left(\frac{\mu}{x} + \frac{2\nu x}{a^2+x^2}\right) + \tfrac{1}{4}y^2\left(\left(\frac{\mu}{x} + \frac{2\nu x}{a^2+x^2}\right)^2 + \frac{4Cx^{2\mu-2m}}{(a^2+x^2)^{2n-2\nu}}\right)\right] = \text{Const.}$$

Entwickeln wir hier nun jene Fälle, in welchen die Differenzialgleichung des zweyten Grades folgende Form erhält:

$$\frac{d^2y}{dx} + dy\left(\frac{m}{x} + \frac{2nx}{a^2+x^2}\right) + \tfrac{1}{2}y\,dx\left[D + \frac{E}{x^2} + \frac{F}{a^2+x^2} + \frac{Gx^2}{(a^2+x^2)^2}\right] = 0.$$

I. Man nehme $\mu = m$ und $\nu = n$, so wird

$D = 2C$; $E = \frac{1}{2}m(m-2)$; $F = 2n(m+1)$ und $G = 2n(n-2)$.

II. Man nehme $\mu = m-1$ und $\nu = n$, so wird

$D = 0$; $E = 2C + \frac{1}{2}(m-1)^2$; $F = 2n(m+1)$ und $G = 2n(n-2)$.

III. Man setze $\mu = m-1$ und $2n-2\nu = -1$, oder $\nu = n + \frac{1}{2}$, so wird das letzte Glied

$$\frac{2C(a^2+x^2)}{x^2} = 2C + \frac{2Ca^2}{x^2}; \text{ folglich}$$

$) = 2C$; $E = 2Ca^2 + \frac{1}{2}(m-1)^2$; $F = 2(mn + n + 1)$;
$G = \frac{1}{2}(2n+1)(2n-5)$.

IV. Für $\mu = m$ und $2n - 2\nu = 1$, oder $\nu = n - \frac{1}{2}$ wird das
te Glied $\frac{2C}{a^2+x^2}$, und daher

$) = 0$; $E = \frac{1}{2}m(m-2)$; $F = 2C + 2mn + 2n - 1$;
$G = \frac{1}{2}(2n-1)(2n-3)$.

V. Man ſetze $\mu = m+1$ und $\nu = n - \frac{1}{2}$, ſo wird das letzte
ied $\frac{2Cx^2}{a^2+x^2} = 2C - \frac{2Ca^2}{a^2+x^2}$, und daher

$= 2C$; $E = \frac{1}{2}(m+1)(m-3)$; $F = -2Ca^2 + 2n(m+1)$;
$G = \frac{1}{2}(2n-1)(2n-3)$.

VI. Sey $\mu = m-1$ und $\nu = n - \frac{1}{2}$, ſo wird das letzte Glied
$\frac{2C}{a^2+x^2} = \frac{2C}{a^2x^2} - \frac{2C}{a^2(a^2+x^2)}$, und daher wird

$= 0$; $E = \frac{2C}{a^2} + \frac{1}{2}(m-1)^2$; $F = \frac{-2C}{a^2} + 2mn + 2n - 2$;
$G = \frac{1}{2}(2n-1)(2n-3)$.

VII. Sey $\mu = m+1$ und $2n - 2\nu = 2$, oder $\nu = n-1$, ſo
d das letzte Glied $\frac{2Cx^2}{(a^2+x^2)^2}$, und demnach

$= 0$; $E = \frac{1}{2}(m+1)(m-3)$; $F = 2n(m+1)$; $G = 2C + 2(n-1)^2$.

VIII. Man ſetze $\mu = m+2$ und $\nu = n-1$, ſo wird das letzte
ied $\frac{2Cx^4}{(a^2+x^2)^2} = 2C - \frac{2Ca^2}{a^2+x^2} - \frac{2Ca^2x^2}{(a^2+x^2)^2}$, und daher
$= 2C$; $E = \frac{1}{2}(m+2)(m-4)$; $F = -2Ca^2 + 2mn + 2n + 2$
und $G = -2Ca^2 + 2(n-1)^2$.

IX. Man nehme $\mu = m$ und $\nu = n-1$, ſo wird das letzte Glied
$\frac{2C}{+x^2)^2} = \frac{2C}{a^2(a^2+x^2)} - \frac{2Cx^2}{a^2(a^2+x^2)^2}$, und demnach

$) = 0$; $E = \frac{1}{2}m(m-2)$; $F = \frac{2C}{a^2} + 2mn + 2n - 2$
und $G = \frac{-2C}{a^2} + 2(n-1)^2$.

X. Sey $\mu = m-1$ und $\nu = n-1$, ſo wird das letzte Glied

$$\frac{2C}{x^2(a^2+x^2)^2} = \frac{2C}{a^4x^2} - \frac{4C}{a^4(a^2+x^2)} + \frac{2Cx^2}{a^4(a^2+x^2)^2},$$

nd demnach

$$D = 0; \quad E = \frac{2C}{a^4} + \frac{1}{2}(m-1)^2; \quad F = \frac{-4C}{a^4} + 2mn + 2n - 4;$$
$$G = \frac{2C}{a^4} + 2(n-1)^2.$$

Aufgabe 111.

§. 889. Man bestimme das vollständige Integrale folgender Differenzialgleichung des zweyten Grades

$$\frac{d^2y}{dx} + \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dK}{K} + \frac{1}{2}y\left(d.\frac{dL}{Ldx} - \frac{dL^2}{2L^2dx} + \frac{dK\,dL}{KLdx} + \frac{2CL^2dx}{K^2}\right) = 0,$$

wobey das Element dx constant genommen ist, und die Größen K und L beliebige Functionen von x bezeichnen.

Auflösung.

Weil diese Gleichung integrabel wird, wenn man sie durch $\frac{K^2}{L}\left(\frac{dy}{dx} + \frac{y\,dL}{2L\,dx}\right)$ multiplicirt, so ist, wie wir oben gesehen haben, ihr vollständiges Integrale

$$\frac{K^2}{2L}\left[\left(\frac{dy}{dx} + \frac{y\,dL}{2L\,dx}\right)^2 + \frac{CL^2}{K^2}y^2\right] = \text{Const.},$$

welche Differenzialgleichung des ersten Grades noch einmahl integrirt werden muß. Da aber dieß wegen der unbestimmten Constanten äußerst schwierig ist, so werden wir diese außer Acht lassen, und zuerst wenigstens ein partikulares Integral aufsuchen. Ziehen wir also aus der Gleichung

$$\left(\frac{dy}{dx} + \frac{y\,dL}{2L\,dx}\right)^2 + \frac{CL^2}{K^2}y^2 = 0$$

die Quadratwurzel aus, so erhalten wir

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y\,dL}{2L\,dx} = \frac{Ly}{K}\sqrt{-C} \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{y} + \frac{dL}{2L} = \frac{L\,dx}{K}\sqrt{-C},$$

daher wird

$$y\sqrt{L} = \alpha e^{\int \frac{L\,dx}{K}\sqrt{-C}}.$$

Da also der vorgelegten Differenzialgleichung des zweyten Grades die zwey Werthe

$$y = \frac{\alpha}{\sqrt{L}}e^{\int \frac{L\,dx}{K}\sqrt{-C}} \quad \text{und} \quad y = \frac{\beta}{\sqrt{L}}e^{-\int \frac{L\,dx}{K}\sqrt{-C}}$$

Genüge leisten, so werden beyde auch in Verbindung derselben entspre-

chen, und weil durch dieſe zwey willkürliche Conſtanten eingeführt werden, ſo iſt das geſuchte vollſtändige Integrale

$$y = \frac{\alpha}{\sqrt{L}} e^{\int \frac{L\,dx}{H}\sqrt{-C}} + \frac{\beta}{\sqrt{L}} e^{-\int \frac{L\,dx}{H}\sqrt{-C}},$$

welcher Ausdruck gültig iſt, wenn $\sqrt{-C}$ eine reelle Größe bezeichnet; iſt aber $\sqrt{-C}$ imaginär, ſo wird

$$y = \frac{\gamma}{\sqrt{L}} \sin. \left[\int \frac{L\,dx}{H}\sqrt{C} + \varepsilon\right],$$

und ſo wird das vollſtändige Integrale der vorgelegten Differenzialgleichung des zweyten Grades erhalten.

Zuſatz 1.

§. 890. Wir können alſo von der Differenzialgleichung des erſten Grades

$$\left(\frac{dy}{dx} + \frac{y\,dL}{2L\,dx}\right)^2 + \frac{CL^2y^2}{H^2} = \frac{AL}{H^2},$$

welche an ſich ſchwierig genug iſt, das Integrale angeben, denn dieſes iſt

$$y = \frac{\alpha}{\sqrt{L}} e^{\int \frac{L\,dx}{H}\sqrt{-C}} + \frac{\beta}{\sqrt{L}} e^{-\int \frac{L\,dx}{H}\sqrt{-C}},$$

wenn nur die erforderliche Beziehung der Conſtanten α und β in Bezug auf die Conſtante A beſtimmt wird.

Zuſatz 2.

§. 891. Multiplicirt man mit $\sqrt{L}$ und differenzirt, ſo erhält man

$$\frac{dy\sqrt{L}}{} + \frac{y\,dL}{2\sqrt{L}} = \frac{\alpha L\,dx}{H}\sqrt{-C} \cdot e^{\int \frac{L\,dx}{H}\sqrt{-C}} - \frac{\beta L\,dx}{H}\sqrt{-C} \cdot e^{-\int \frac{L\,dx}{H}\sqrt{-C}};$$

alſo

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y\,dL}{2L\,dx} = \frac{\sqrt{-CL}}{H}\left(\alpha e^{\int \frac{L\,dx}{H}\sqrt{-C}} - \beta e^{-\int \frac{L\,dx}{H}\sqrt{-C}}\right),$$

daher wird

$$\frac{AL}{H^2} = \frac{-CL}{H^2}\left(\alpha e^{\int \frac{L\,dx}{H}\sqrt{-C}} - \beta e^{-\int \frac{L\,dx}{H}\sqrt{-C}}\right)^2 + \frac{CL}{H^2}\left(\alpha e^{\int \frac{L\,dx}{H}\sqrt{-C}} + \beta e^{-\int \frac{L\,dx}{H}\sqrt{-C}}\right)^2,$$

folglich $A = 4C\alpha\beta$ oder $\beta = \frac{A}{4C\alpha}$.

Anmerkung 1.

§. 892. Obgleich wir also die vorgelegte Gleichung mit Hülfe eines schicklichen Multiplicators integriren konnten, so schien denn doch die zweyte Integration sehr großen Schwierigkeiten zu unterliegen; inzwischen ist doch jene Differenzialgleichung des ersten Grades durch Substitution leicht zu behandeln, denn wird $y = \frac{z}{\sqrt{L}}$, also $dy\sqrt{L} + \frac{y\,dL}{2\sqrt{L}} = dz$ gesetzt, so erhält man

$$\left(\frac{dz}{dx\sqrt{L}}\right)^2 + \frac{CLz^2}{H^2} = \frac{AL}{H^2}, \text{ und daher}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{L}{H}\sqrt{A - Cz^2} \quad \text{oder} \quad \frac{dz}{\sqrt{A - Cz^2}} = \frac{L\,dx}{H},$$

und die Integration dieser Gleichung gibt:

$$l\left[z\sqrt{-C} + \sqrt{A - Cz^2}\right] = \int \frac{L\,dx}{H}\sqrt{-C} + l \,.\, B,$$

woraus das vorhergehende Integrale gefunden wird. Übrigens läßt sich die Form unserer Differenzialgleichung des zweyten Grades bisweilen bequemer auf folgende Art darstellen: Wenn P und R beliebige Functionen von x bezeichnen, und man betrachtet das Element dx als constant, so entspricht der Gleichung

$$d^2y - dy\left(\frac{dP}{P} + \frac{dR}{R}\right) - y\left(d.\frac{dP}{P} - \frac{dP\,dR}{PR} + \frac{a^2R^2}{P^2}.dx^2\right) = 0,$$

wenn sie zweymahl integrirt wird, das vollständige Integrale:

$$y = \alpha P e^{a\int\frac{R\,dx}{P}} + \beta P e^{-a\int\frac{R\,dx}{P}},$$

wenn a eine reelle Größe bezeichnet. Ist aber $a = 0$, so wird $y = P\left(\alpha + \beta\int\frac{R\,dx}{P}\right)$, und wenn $a^2 = -c^2$ ist, so wird

$$y = \alpha P \sin.\left[\beta + \rho\int\frac{R\,dx}{P}\right].$$

Dann aber wird jene Gleichung integrabel gemacht, wenn man sie mit $\frac{1}{R^2\,dx^2}\left(dy - \frac{y\,dP}{P}\right)$ multiplicirt, und das erste Integrale wird seyn:

$$\frac{1}{2R^2\,dx^2}\left[\left(dy - \frac{y\,dP}{P}\right)^2 - \frac{a^2R^2}{P^2}y^2\,dx^2\right] = \text{Const.}$$

Man sieht demnach ein, daß man bey jener Differenzialgleichung des zweyten Grades die Substitution $y = Pz$ bequem anwenden könne, denn dadurch geht die genannte Gleichung über in

$$d^2z + dz\left(\frac{dP}{P} - \frac{dR}{R}\right) - \frac{a^2R^2}{P^2}\,z\,dx^2 = 0,$$

che Gleichung, durch $\frac{P^2\,dz}{R^2\,dx^2}$ multiplicirt, für ſich integrabel wird.

ßt man $\frac{P}{R} = S$, alſo

$$d^2z + \frac{dS\,dz}{S} - \frac{a^2\,z\,dx^2}{S^2} = 0,$$

ibt der Multiplicator $\frac{S^2\,dz}{dx^2}$ ſogar gleich das Integrale

$$\frac{S^2\,dz^2}{2\,dx^2} - \tfrac{1}{2}a^2z^2 = \text{Const.}$$

Anmerkung 2.

§. 893. Umgekehrt hätten wir alſo aus dieſer einfachſten Form

$$S^2d^2z + S\,dS\,dz - a^2z\,dx^2 = 0,$$

lche Gleichung durch die Multiplication mit dz integrabel gemacht rd, noch zuſammengeſetztere Formeln ableiten können, und zwar ter der Annahme $z = \frac{y}{P}$ und $S = \frac{P}{R}$. Bey allgemeinen Formen chtet dieſe Ableitung zwar deutlich genug ein, allein bey beſtimmten yſpielen iſt dieſelbe gewöhnlich zu ſehr verſteckt, als daß man ſo leicht rauf verfallen könnte. So verhält ſich dieß in den §. 888 entwickel- Fällen, wenn wir in Nro. IX $m = 2$ und $C = (n-1)^2a^2$ ſetzen, n dann wird $D = 0$, $E = 0$, $F = 2n(n+1)$, $G = 0$, und man ält daher die Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx} + 2\,dy\left(\frac{1}{x} + \frac{nx}{a^2+x^2}\right) + \frac{n(n+1)\,y\,dx}{a^2+x^2} = 0 \quad \text{oder}$$

$$d^2y + \frac{2\,dx\,dy\,[a^2+(n+1)x^2]}{x(a^2+x^2)} + \frac{n(n+1)\,y\,dx^2}{a^2+x^2} = 0,$$

lche mit Hülfe des Multiplicators

$$x^2(a^2+x^2)^{n+1}\left[\frac{dy}{dx} + \frac{y(a^2+n.x^2)}{x(a^2+x^2)}\right]$$

egrabel gemacht wird, denn das Integrale iſt

$$x^2(a^2+x^2)^{n+1}\left[\left(\frac{dy}{dx} + \frac{y(a^2+nx^2)}{x(a^2+x^2)}\right)^2 + \frac{(n-1)^2a^2y^2}{(a^2+x^2)^2}\right] = \text{Const.}$$

Ein particuläres Integrale bietet uns alſo folgende Gleichung dar:

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} + \frac{(n-1)\,x\,dx}{a^2+x^2} = \pm\frac{(n-1)\,a\,dx\sqrt{-1}}{a^2+x^2},$$

und hieraus ergibt sich

$$xy(a^2+x^2)^{\frac{n-1}{2}} = \alpha\left(\frac{a+x\sqrt{-1}}{a-x\sqrt{-1}}\right)^{\pm\frac{n-1}{2}}.$$

Durch die Verbindung dieser beyden particulären Integralien erhält man also die Gleichung

$$y = \frac{\alpha}{x}(a-x\sqrt{-1})^{-n+1} + \frac{\beta}{x}(a+x\sqrt{-1})^{-n+1},$$

als vollständiges Integrale. In diesem Falle aber können wir unsere Gleichung auf die einfachste Form zurückführen durch die Substitution $y = \frac{z}{x}(a^2+x^2)^{\frac{1-n}{2}}$, welche sich aber nicht so leicht erkennen und auffinden läßt.

Aufgabe 112.

§. 894. Die Bedingungen aufzufinden, unter welchen, wenn man das Element dx als unveränderlich betrachtet, die Differenzialgleichung des zweyten Grades

$$d^2y + Pdxdy + Qydx^2 = 0$$

integrabel wird, und zwar mit Hülfe des Multiplicators

$$\frac{ydx^2}{Ldy^2 + Mydydx + Ny^2dx^2},$$

wobey die Größen L, M, N, P und Q Functionen von x bezeichnen.

Auflösung.

Man gebe dem Nenner dieses Bruches die Form

$$(dy + Rydx)(dy + Sydx),$$

so wird man bey einiger Aufmerksamkeit einsehen, daß das Integrale folgende Gestalt erhalten werde:

$$V + l\frac{dy+Rydx}{dy+Sydx} = \text{Const.},$$

dessen Differenziale also die vorgelegte Gleichung geben muß. Man erhält aber durch Differenziation

$$dV + \frac{(S-R)ydxd^2y + (R-S)dxdy^2 + ydxdy(dR-dS) + y^2dx^2(SdR-RdS)}{(dy+Rydx)(dy+Sydx)} = 0.$$

oder, wenn man den ganzen Ausdruck auf einen gemeinschaftlichen Nenner reducirt:

$$\left.\begin{array}{l}(S-R)ydxd^2y+(R-S)dxdy^2+ydxdy(dR-dS)+y^2dx^2(SdR-RdS)\\ +dVdy^2+(R+S)ydxdydV+RSy^2dx^2dV\end{array}\right\}=0.$$

Man setze $dV=(S-R)dx$, damit die Gleichung durch y theilbar werde, so erhält man die Gleichung:

$$\left.\begin{array}{l}(S-R)d^2y+dy(dR-dS)+ydx(SdR-RdS)\\ +(S^2-R^2)dxdy+RS(S-R)ydx^2\end{array}\right\}=0,$$

und damit diese Form mit der vorgelegten Gleichung übereinstimme, muß

$$P=(R+S)+\frac{dR-dS}{(S-R)dx} \quad \text{und} \quad Q=RS+\frac{SdR-RdS}{(S-R)dx}$$

werden. Haben nun die Functionen P und Q diese Werthe, so wird die Gleichung

$$d^2y+Pdxdy+Qydx^2=0,$$

nachdem man sie mit $\frac{(S-R)ydx}{(dy+Rydx)(dy+Sydx)}$ multiplicirt hat, folgendes Integrale geben:

$$\int(S-R)dx+l\frac{dy+Rydx}{dy+Sydx}=\text{Const.}$$

Setzen wir $S=M+N$ und $R=M-N$, so wird

$$P=2M-\frac{dN}{Ndx} \quad \text{und} \quad Q=M^2-N^2+\frac{dM}{dx}-\frac{MdN}{Ndx}.$$

Zusatz 1.

§. 895. Welche Functionen von x man also auch für M und N annehmen, und daraus

$$P=2M-\frac{dN}{Ndx} \quad \text{und} \quad Q=M^2-N^2+\frac{dM}{dx}-\frac{MdN}{Ndx}$$

bestimmen mag, so wird der Gleichung

$$d^2y+Pdxdy+Qydx^2=0$$

immer das Integrale

$$2\int Ndx+l\frac{dy+(M-N)ydx}{dy+(M+N)ydx}=\text{Const.}$$

entsprechen.

Zusatz 2.

§. 896. Setzt man $y=e^{\int zdx}$, so erhält man folgende Differenzialgleichung des ersten Grades:

$$dz+z^2dx+Pzdx+Qdx=0,$$

und das Integrale derſelben wird ſeyn:

$$2\int N\,dx + l\,\frac{z+(M-N)}{z+(M+N)} = \text{Const.}$$

Zuſatz 3.

§. 897. Wenn $P = o$ ſeyn, und die Gleichung die Form $d^2y + Q y dx^2 = o$ haben ſollte, ſo muß man $2M = \frac{dN}{N\,dx}$ ſetzen, und dann wird $Q = \frac{dM}{dx} - M^2 - N^2$, die entſprechende Integralgleichung aber wird ſeyn

$$2\int N\,dx + l\,\frac{dy+(M-N)y\,dx}{dy+(M+N)y\,dx} = \text{Const.}$$

Zuſatz 4.

§. 898. Im Allgemeinen aber wird man, je nachdem die Conſtante entweder $= +\infty$ oder $= -\infty$ geſetzt wird, das particuläre Integrale $dy + (M+N)y\,dx = o$ oder $dy + (M-N)y\,dx = o$ erhalten, und daher iſt entweder

$$y = \alpha e^{-\int (M+N)dx} \quad \text{oder} \quad y = \beta e^{-\int (M-N)dx},$$

woraus ſich folgendes vollſtändige Integrale unſerer Gleichung ergibt:

$$y = e^{-\int M dx}(\alpha e^{-\int N dx} + \beta e^{\int N dx}).$$

Beyſpiel 1.

§. 899. Sey $M = \alpha$ und $N = \beta$, ſo wird $P = 2\alpha$ und $Q = \alpha^2 - \beta^2$; daher entſpricht der Gleichung

$$d^2y + 2\alpha\,dx\,dy + (\alpha^2 - \beta^2)\,y\,dx^2 = o$$

als Integrale der Ausdruck

$$2\beta x + l\,\frac{dy+(\alpha-\beta)y\,dx}{dy+(\alpha+\beta)y\,dx} = \text{Const.};$$

in endlichen Größen ausgedrückt ergibt ſich aber das vollſtändige Integrale

$$y = e^{-\alpha x}(A e^{-\beta x} + B e^{\beta x}).$$

In dem Falle aber, wo $\beta^2 = -\gamma^2$ iſt, gibt die Gleichung

$$d^2y + 2\alpha\,dx\,dy + (\alpha^2 + \gamma^2)\,y\,dx^2 = o$$

nach zweymahliger Integration

$$y = A e^{-\alpha x} \sin.(\gamma x + C);$$

aber $\gamma = 0$, ſo entſpricht der Gleichung

$$d^2y + 2\alpha dx dy + \alpha^2 y dx^2 = 0$$

s Integrale

$$y = e^{-\alpha x}(A + Bx).$$

Beyſpiel 2.

§. 900. Sey $M = \frac{\alpha}{x}$ und $N = \beta x^n$, ſo wird $P = \frac{2\alpha - n}{x}$

nd $Q = \frac{\alpha^2}{x^2} - \beta^2 x^{2n} - \frac{\alpha}{x^2} - \frac{\alpha n}{x^2} = \frac{\alpha(\alpha - n - 1)}{x^2} - \beta^2 x^{2n}$;

entſpricht alſo der Gleichung

$$d^2y + \frac{(2\alpha - n) dx dy}{x} + \frac{\alpha(\alpha - n - 1) y dx^2}{x^2} - \beta^2 x^{2n} y dx^2 = 0$$

s erſtes Integrale die Formel

$$\frac{2\beta}{n+1} x^{n+1} + l\frac{x dy + (\alpha - \beta x^{n+1}) y dx}{x dy + (\alpha + \beta x^{n+1}) y dx} = \text{Const.};$$

s zweytes Integrale aber

$$y = x^{-\alpha}\left(A e^{-\frac{\beta x^{n+1}}{n+1}} + B e^{\frac{\beta x^{n+1}}{n+1}}\right),$$

nd für $\beta = 0$ wird dieſes

$$y = x^{-\alpha}(A + Bx^{n+1});$$

r $\beta^2 = -\gamma^2$ aber findet man

$$y = Ax^{-\alpha} \sin.\left(\frac{\gamma}{n+1} x^{n+1} + C\right).$$

Zuſatz 1.

§. 901. Setzt man $n = 2\alpha$, damit man die Gleichung

$$d^2y - \frac{\alpha(\alpha+1) y dx^2}{x^2} - \beta^2 x^{4\alpha} y dx^2 = 0$$

halte, ſo wird das vollſtändige Integrale derſelben ſeyn:

$$y = x^{-\alpha}\left(A e^{-\frac{\beta}{2\alpha+1} x^{2\alpha+1}} + B e^{\frac{\beta}{2\alpha+1} x^{2\alpha+1}}\right);$$

r $\beta = 0$ aber wird man $y = x^{-\alpha}(A + Bx^{2\alpha+1})$ erhalten, und enn $\beta^2 = -\gamma^2$ iſt, ſo findet man das Integrale

$$y = Ax^{-\alpha} \sin.\left(\frac{\gamma}{2\alpha+1} x^{2\alpha+1} + C\right).$$

Zuſatz 2.

§. 902. Setzen wir $\alpha = -1$, damit wir die Gleichung $d^2y - \frac{\beta^2 y\,dx^2}{x^4} = 0$ erhalten, ſo iſt das Integrale derſelben

$$y = x\left(Ae^{\frac{\beta}{x}} + Be^{-\frac{\beta}{x}}\right),$$

wobey zu bemerken iſt, daß für $\beta^2 = -\gamma^2$ das Integrale

$$y = Ax\sin.\left(\frac{\gamma}{x} + C\right)$$ ſeyn wird.

Beyſpiel 3.

§. 903. Man ſetze $N = \frac{Ax^m}{\alpha + \beta x^n}$, alſo $\frac{dN}{N\,dx} = \frac{m}{x} - \frac{\beta n x^{n-1}}{\alpha + \beta x^n}$ und nehme $M = \frac{m}{2x} - \frac{\beta n x^{n-1}}{2(\alpha + \beta x^n)}$, alſo $P = 0$ und

$$Q = \frac{-m}{2x^2} - \frac{\beta n(n-1)x^{n-2}}{2(\alpha+\beta x^n)} + \frac{\beta^2 n^2 x^{2n-2}}{2(\alpha+\beta x^n)^2} + \frac{-m^2}{4x^2} + \frac{\beta m n x^{n-2}}{2(\alpha+\beta x^n)} - \frac{\beta^2 n^2 x^{2n-2}}{4(\alpha+\beta x^n)^2} - \frac{A^2 x^{2m}}{(\alpha+\beta x^n)^2},$$

oder

$$Q = \frac{-m(m+2)}{4x^2} + \frac{n(m-n+1)\beta x^{n-2}}{2(\alpha+\beta x^n)} + \frac{\beta^2 n^2 x^{2n-2} - 4A^2 x^{2m}}{4(\alpha+\beta x^n)^2},$$

ſo wird, weil $\int M dx = \frac{1}{2} l N$ iſt,

$$y = \frac{1}{\sqrt{N}}\left(Ce^{-\int N dx} + De^{\int N dx}\right)$$

das Integrale ſeyn von der Gleichung

$$d^2y + Qy\,dx^2 = 0.$$

Der Ausdruck für den Werth von Q läßt ſich nach mehreren Methoden einfacher darſtellen, wenn nur der Zähler des letzten Theiles durch $(\alpha + \beta x^n)$ theilbar wird.

I. Sey $m = n - 1$ und $A^2 = \frac{1}{4}\beta^2 n^2$, ſo wird $Q = -\frac{n^2-1}{4x^2}$, dann aber wird

$$N = \frac{\frac{1}{2}\beta n x^{n-1}}{\alpha + \beta x^n} \text{ und } \int N dx = \frac{1}{2} l(\alpha + \beta x^n),$$

alſo entſpricht der Gleichung

$$d^2y - \frac{(n^2-1)y\,dx^2}{4x^2} = 0$$

s Integrale

$$y = \frac{1}{\sqrt{x^{n-1}}}(C + D\alpha + D\beta x^n).$$

II. Sey $2m = -2$ oder $m = -1$ und $4A^2 = \alpha^2 n^2$, ſo wird

$$Q = \frac{1}{4x^2} - \frac{n^2\beta x^{n-2}}{2(\alpha+\beta x^n)} + \frac{\beta n^2 x^{n-2} - \alpha n^2 x^{-2}}{4(\alpha+\beta x^n)} \text{ oder}$$

$$Q = \frac{1-n^2}{4x^2}, \text{ wie vorhin.}$$

III. Sey $2m = -n-2$ oder $m = \frac{-n-2}{2}$ und $4A^2 = -\frac{\alpha^2 n^2}{\beta}$, wird

$$= \frac{-(n^2-4)}{16x^2} - \frac{3n^2\beta x^{n-2}}{4(\alpha+\beta x^n)} + \frac{n^2(\beta^2 x^{n-2} - \alpha\beta x^{-2} + \alpha^2 x^{-n-2})}{4\beta(\alpha+\beta x^n)}$$

er $Q = \frac{4-n^2}{16x^2} + \frac{n^2(\alpha^2 x^{-n-2} - \alpha\beta x^{-2} - 2\beta^2 x^{n-2})}{4\beta(\alpha+\beta x^n)}$,

lcher Ausdruck übergeht in

$$= \frac{4-n^2}{16x^2} + \frac{n^2}{4\beta}(\alpha x^{-n-2} - 2\beta x^{-2}) = \frac{4-9n^2}{16x^2} + \frac{n^2\alpha}{4\beta x^{\frac{n}{2}+2}}.$$

Da nun $N = +\frac{n\alpha\sqrt{-\alpha}}{2\sqrt{\beta}} \cdot \frac{x^{\frac{-n-2}{2}}}{\alpha+\beta x^n}$,

ſo wird $\int N\,dx = \frac{n\alpha\sqrt{-\alpha}}{2\sqrt{\beta}} \int \frac{dx}{(\alpha+\beta x^n)\, x^{\frac{n+2}{2}}}$.

Man nehme ferner $n = \frac{2}{3}$, alſo $m = -\frac{4}{3}$, $Q = \frac{\alpha}{9\beta x^{\frac{2}{3}}}$ und

$= \frac{\alpha\sqrt{-\alpha}}{3\sqrt{\beta}} \cdot \frac{x^{-\frac{4}{3}}}{\alpha+\beta x^{\frac{2}{3}}}$, und daher $\int N\,dx = \frac{\alpha\sqrt{-\alpha}}{3\sqrt{\beta}} \int \frac{dx}{(\alpha+\beta x^{\frac{2}{3}})\, x^{\frac{4}{3}}}$;

findet man auf dieſe Art für die Gleichung $d^2y + \frac{\alpha}{9\beta x^{\frac{2}{3}}} y\,dx^2 = 0$

s Integrale

$$y = \frac{1}{\sqrt{N}}(Ce^{-\int N\,dx} + De^{\int N\,dx}).$$

Wird aber $n = -\frac{2}{3}$, alſo $m = -\frac{2}{3}$ und $Q = \frac{\alpha}{9\beta x^{\frac{4}{3}}}$ geſetzt,

findet man

$$N = \frac{-\alpha\sqrt{-\alpha}}{3\sqrt{\beta}} \cdot \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{\alpha+\beta x^{-\frac{2}{3}}} \text{ und}$$

$$\int N\,dx = \frac{-\alpha\sqrt{-\alpha}}{3\sqrt{\beta}} \int \frac{x^{\frac{1}{3}}\,dx}{\alpha x + \beta x^{\frac{1}{3}}} = \frac{-\alpha\sqrt{-\alpha}}{3\sqrt{\beta}} \int \frac{dx}{\alpha x^{\frac{2}{3}} + \beta};$$

und daher wird die Gleichung

$$d^2y + \frac{\alpha y dx^2}{9\beta x^{\frac{4}{3}}} = 0$$

auf ähnliche Art integrirt.

Anmerkung 1.

§. 904. Wir konnten also die Gleichung $d^2y + Ax^m y dx^2 = 0$ in den Fällen integriren, wo $m = 0$, $m = -4$, $m = -\frac{4}{3}$, $m = -\frac{4}{1}$ und $m = -2$, oder $m = -2 \pm \frac{2}{7}$, $m = -2 \pm \frac{2}{5}$ ist. Setzen wir weiter $N = \frac{Ax^\lambda}{\alpha + \beta x^n + \gamma x^{2n}}$, so werden wir die Integration jener Gleichung auch in den Fällen ausführen können, wenn $m = -2 \pm \frac{2}{3}$ ist, und in welchen auch die Differenzialgleichung des ersten Grades

$$dz + z^2 dx + Ax^m dx = 0$$

die Integration zuläßt. Allein diese Aufsuchung der integrablen Fälle ist viel zu mühsam, als daß wir länger dabey verweilen wollten, besonders da wir weiter unten eine Methode kennen lernen werden, nach welcher sich alle diese Entwicklungen leichter ausführen lassen.

Anmerkung 2.

§. 905. Es läßt sich aus dem bereits Gesagten schließen, welchen großen Nutzen man von der Auffindung der Multiplicatoren, durch welche auch die Differenzialgleichungen des zweyten Grades integrabel gemacht werden, erwarten könne, obgleich die hier behandelten Beyspiele über diese Methode nur wenig Licht verbreiten. Wir haben aber hier wenigstens einige Formen der Multiplicatoren betrachtet, und es ist wohl nicht zu zweifeln, daß wir auch andere Formen mit gleichem Erfolge hätten gebrauchen können. In diesem Kapitel haben wir ferner nur solche Differenzialgleichungen des zweyten Grades betrachtet, in welchen die eine Veränderliche y mit ihren Differenzialien dy und d^2y durchaus nur eine Dimension hat. Allein diese Methode kann auch auf andere Gattungen solcher Gleichungen ausgedehnt werden, und obgleich sie bisher nur wenig ausgebildet wurde, so werden wir sie dennoch benützen können bey der folgenden Anwendung, wo wir andere Differenzialgleichungen des zweyten Grades mit Hülfe der Multiplicatoren integriren lehren werden, deren Behandlung nach andern Methoden sehr schwierig zu seyn scheint.

Kapitel VI.

von der Integration anderer Differenzialgleichungen des zweyten Grades mittelst schicklicher Factoren.

Aufgabe 113.

§. 906. Einen Multiplicator zu finden, durch welchen die Gleichung

$$d^2y + \frac{Aydx^2}{(By^2 + C + 2Dx + Ex^2)^2} = 0,$$

wobey das Element dx constant gesetzt ist, integrabel gemacht wird.

Auflösung.

Man versuche einen Multiplicator von der Form $2Pdy + 2Qydx$, wobey P und Q Functionen von x seyn sollen, und nehme an, daß das Product

$$2d^2y(Pdy + Qydx) + \frac{2Aydx^2(Pdy + Qydx)}{(By^2 + C + 2Dx + Ex^2)^2} = 0$$

folgendes Integrale habe:

$$Pdy^2 + 2Qydxdy + Vdx^2 = \text{Const.}\, dx^2,$$

wo V eine Function der Veränderlichen x und y bezeichnen soll, so erhält man durch Gleichstellung dieser Werthe

$$\frac{dPdy^2 + 2ydxdQdy}{2Qdxdy^2 + dx^2dV} - \frac{2Aydx^2(Pdy + Qydx)}{(By^2 + C + 2Dx + Ex^2)^2} = 0,$$

woraus sich der Werth von V durch Integration nur dann bestimmen läßt, wenn $dP + 2Qdx = 0$ ist, und dann erhält man

$$dV = \frac{Ay(2Pdy - ydP)}{(By^2 + C + 2Dx + Ex^2)^2} - 2ydy \cdot \frac{dQ}{dx}.$$

Das Integrale dieser Formel, wenn diese anders die Integration zuläßt, wird wegen der Veränderlichkeit von y seyn:

$$\frac{-AP}{B(By^2 + C + 2Dx + Ex^2)} - y^2 \cdot \frac{dQ}{dx} = V.$$

Wird also y constant genommen, so muß

$$\frac{-AdP(By^2 + C + 2Dx + Ex^2) + 2APdx(D + Ex)}{B(By^2 + C + 2Dx + Ex^2)^2} - y^2 \cdot \frac{d^2Q}{dx} =$$

$$= \frac{-Ay^2dP}{(By^2 + C + 2Dx + Ex^2)^2} \text{ seyn,}$$

welcher Gleichung Genüge geschieht, wenn

$\frac{d^2Q}{dx^2} = 0$ und $-dP(C+2Dx+Ex^2) + 2Pdx(D+Ex) = 0$

gesetzt wird; und nun muß man untersuchen, ob diese beyden Bedingungen zugleich bestehen können. Die letztere aber gibt:

$\frac{dP}{P} = \frac{2Ddx + 2Exdx}{C+2Dx+Ex^2}$, und daher $P = C+2Dx+Ex^2$,

also wird

$Q = -\frac{dP}{2dx} = -D-Ex$, folglich $\frac{dQ}{dx} = -E$ und $\frac{d^2Q}{dx^2} = 0$.

Der gesuchte Multiplicator ist demnach:

$$2dy(C+2Dx+Ex^2) - 2ydx(D+Ex),$$

und hieraus ergibt sich das Integrale:

$$\frac{dy^2}{dx^2}(C+2Dx+Ex^2) - \frac{2ydy}{dx}(D+Ex) - \frac{A(C+2Dx+Ex^2)}{B(By^2+C+2Dx+Ex^2)} + Ey^2 = \text{Const.}$$

oder, wenn man beyderseits $\frac{A}{B}$ addirt:

$$\frac{dy^2}{dx^2}(C+2Dx+Ex^2) - \frac{2ydy}{dx}(D+Ex) + \frac{Ay^2}{By^2+C+2Dx+Ex^2} + Ey^2 = \text{Const.}$$

Zusatz 1.

§. 907. Es wird demnach die Gleichung $d^2y + \frac{a^2ydx^2}{(y^2+x^2)^2} = 0$, wo $A=a^2$, $B=1$, $C=0$, $D=0$ und $E=1$ ist, durch den Multiplicator $2x^2dy - 2yxdx$ integrabel gemacht, und das Integrale selbst ist:

$$\frac{x^2dy^2}{dx^2} - \frac{2xydy}{dx} + y^2 + \frac{a^2y^2}{y^2+x^2} = b^2.$$

Zusatz 2.

§. 908. Setzt man hier $y = ux$, so erhalten wir, weil $dy = udx + xdu$ ist:

$$x^2u^2 + \frac{2ux^3du}{dx} + \frac{x^4du^2}{dx^2} + \frac{a^2u^2}{1+u^2} = b^2$$
$$-2x^2u^2 - \frac{2ux^3du}{dx}$$
$$+x^2u^2$$

$$\frac{1u^2}{x^2} = \frac{b^2 + (b^2 - a^2)u^2}{1 + u^2}, \quad \text{alſo} \quad \frac{dx}{x^2} = \frac{du\sqrt{1+u^2}}{\sqrt{[b^2 + (b^2 - a^2)u^2]}},$$

zlich wird ſowohl x als y durch u beſtimmt.

Zuſatz 3.

§. 909. Auf ähnliche Art läßt ſich auch die Integration im Allgemeinen ausführen, denn es ſey Kürze halber

$$C + 2Dx + Ex^2 = Bz^2, \text{ ſo wird } D + Ex = \frac{Bz\,dz}{dx},$$

unſere Gleichung geht über in

$$\frac{Bz^2dy^2}{dx^2} - \frac{2Byz\,dy\,dz}{dx^2} + Ey^2 + \frac{Ay^2}{B(y^2+z^2)} = \frac{K}{B};$$

r, wenn $y = uz$ geſetzt wird, in

$$\frac{Bz^4du^2}{dx^2} - \frac{Bu^2z^2dz^2}{dx^2} + Eu^2z^2 + \frac{Au^2}{B(1+u^2)} = \frac{K}{B}.$$

Es iſt aber $\frac{z^2dz^2}{dx^2} = \frac{(D+Ex)^2}{B^2}$, und daher erhält man

$$\frac{Bz^4du^2}{dx^2} + \frac{CE - D^2}{B}u^2 = \frac{K + (K-A)u^2}{B(1+u^2)} \quad \text{oder}$$

$$\frac{B^2z^4du^2}{dx^2} = \frac{K + (K - A + D^2 - CE)u^2 + (D^2 - CE)u^4}{1 + u^2},$$

daß nach Herſtellung des Werthes von z gefunden wird

$$\frac{dx}{\sqrt{C+2Dx+Ex^2}} = \frac{du\sqrt{1+u^2}}{\sqrt{[K + (K - A + D^2 - CE)u^2 + (D^2 - CE)u^4]}};$$

wird x durch u beſtimmt, und daher auch

$$y = uz = u\sqrt{\frac{C + 2Dx + Ex^2}{B}}.$$

Anmerkung.

§. 910. Man kennt demnach die Subſtitution, durch welche ſowohl die vorgelegte Differenzialgleichung des zweyten Grades, als auch r Multiplicator auf eine boquemere Form gebracht werden muß; denn t man Kürze halber $C + 2Dx + Ex^2 = Bz^2$, ſo wird unſere Gleiung $d^2y + \frac{Aydx^2}{B^2(y^2+z^2)^2} = 0$ durch Hülfe der Subſtitution $y = uz$ ansformirt in

$$zd^2u + 2dzdu + ud^2z + \frac{Audx^2}{B^2z^3(1+u^2)^2} = 0,$$

welcher Gleichung der Multiplicator

$$2B(z^2dy - yzdz) \quad \text{oder} \quad 2Bz^3du,$$

oder schlechtweg z^3du zukömmt. Da aber $dz = \frac{dx(D+Ex)}{Bz}$, so wird

$$d^2z = \frac{Edx^2}{Bz} - \frac{dxdz(D+Ex)}{Bz^2} = \frac{Edx^2}{Bz} - \frac{dx^2(D+Ex)^2}{B^2z^3}$$
$$= \frac{(CE-D^2)dx^2}{B^2z^3},$$

so daß $z^3d^2z = \frac{CE-D^2}{B^2}dx^2$, und daher erhält unsere Gleichung, wenn sie durch z^3du multiplicirt wird, folgende Form:

$$z^4dud^2u + 2z^3dzdu^2 + \frac{CE-D^2}{B^2}ududx^2 + \frac{Aududx^2}{B^2(1+u^2)^2} =$$

welche offenbar integrabel ist, denn man erhält das Integrale

$$\tfrac{1}{2}z^4du^2 + \frac{CE-D^2}{2B^2}u^2dx^2 - \frac{Adx^2}{2B^2(1+u^2)} = \tfrac{1}{2}\text{Const.}\,dx^2;$$

ja selbst die zweyte Integration wird, weil z eine Function von x ist, bald in die Augen fallen, da

$$z^2du = dx\sqrt{\left[\text{Const.} + \frac{D^2-CE}{B^2}u^2 + \frac{A}{B^2(1+u^2)}\right]},$$

wobey sich die Absonderung der Veränderlichen u und x von selbst darbiethet. Übrigens bemerke man hier, daß die für z angenommene Function der Gleichung $z^3d^2z = \alpha dx^2$ Genüge leiste, obgleich man die Relation derselben nicht kennt. Multiplicirt man aber diese Gleichung durch $\frac{2dz}{z^3}$, so erhält man $2dzd^2z = \frac{2\alpha dx^2dz}{z^3}$, und das Integrale hiervon ist

$$dz^2 = \beta dx^2 - \frac{\alpha dx^2}{z^2} \quad \text{oder} \quad dx = \frac{zdz}{\sqrt{\beta z^2 - \alpha}},$$

daher wird ferner

$\beta x + \gamma = \sqrt{\beta z^2 - \alpha}$, folglich $\beta z^2 = \alpha + \gamma^2 + 2\beta\gamma x + \beta^2x^2$, welches unsere Form selbst ist.

Aufgabe 114.

§. 911. Man nehme das Element dx constant, und suche eine allgemeinere Form der Differenzialgleichungen des zweyten Grades, welchen der Multiplic

r $Mydx + Ndy$ den Charakter der Integrabilität rleiht.

Auflöſung.

Weil ſich der Multiplicator mit Hülfe der Subſtitution $y = Ru$ f die einfachſte Form Sdu bringen läßt, ſo nimmt durch eben dieſe ubſtitution die Differenzialgleichung des zweyten Grades folgende rm an:

$$d^2u + Pdxdu + \frac{Udx^2}{S} = o.$$

Das letzte Glied dieſer Gleichung wird nach Multiplication mit lu für ſich integrabel, wenn U irgend eine Function von u bezeich-, während R, S und P Functionen von x ſind. Da alſo die eichung

$$Sdud^2u + PSdxdu^2 + Udx^2du = o$$

egrabel ſeyn muß, ſo nehme man an, das Integrale ſey

$$\tfrac{1}{2}Sdu^2 + dx^2\int Udu = \tfrac{1}{2}Cdx^2, \text{ dann muß}$$

$$\tfrac{1}{2}dSdu^2 = PSdxdu^2 \text{ oder } Pdx = \frac{dS}{2S}$$

n. Demnach wird die allgemeine Formel

$$d^2u + \frac{dSdu}{2S} + \frac{Udx^2}{S} = o$$

der Multiplication mit Sdu folgendes Integrale geben:

$$Sdu^2 = dx^2(C - 2\int Udu),$$

die wiederholte Integration gibt

$$\int\frac{dx}{\sqrt{S}} = \int\frac{du}{\sqrt{(C - 2\int Udu)}}.$$

Da nun dieſe Integralien bekannt ſind, ſo wollen wir $u = \frac{y}{R}$ n, und auf mehr verwickelte Formen zurückgehen, ſo daß jetzt = Funct. $\frac{y}{R}$ wird. Nun iſt aber

$$= \frac{dy}{R} - \frac{ydR}{R^2} \text{ und } d^2u = \frac{d^2y}{R} - \frac{2dRdy}{R^2} - \frac{yd^2R}{R^2} + \frac{2ydR^2}{R^3},$$

verwandelt ſich unſere Gleichung in

$$\frac{d^2y}{R} - \frac{2dRdy}{R^2} - \frac{yd^2R}{R^2} + \frac{2ydR^2}{R^3} + \frac{Udx^2}{S} = o$$

$$+ \frac{dSdy}{2RS} \qquad - \frac{ydRdS}{2R^2S},$$

und dieſe Gleichung wird durch den Factor $\frac{S}{R^2}(R\,dy - y\,dR)$ in
grabel gemacht. Um uns alſo der oben vorgelegten Form zu näher
ſetzen wir $S = \alpha R^4$, ſo wird die Gleichung

$$\frac{d^2y}{R} - \frac{y\,d^2R}{R^2} + \frac{U\,dx^2}{\alpha R^4} = 0$$

durch Multiplication mit $\alpha R^2(R\,dy - y\,dR)$ integrabel gemac
oder es wird die Gleichung

$$R\,d^2y - y\,d^2R + \frac{dx^2}{R^2\alpha} f\left(\frac{y}{R}\right) = 0,$$

durch Multiplication mit $R\,dy - y\,dR$ integrabel. Um nun die M
thode, das Integrale zu finden, noch ſchwieriger zu machen, ſetze m
$f\left(\frac{y}{R}\right) = \frac{\alpha y}{R} + V$, wo V eine homogene Function, keiner Dim
ſion von y und R ſeyn ſoll, und nehme $y\,d^2R = \frac{\alpha y\,dx^2}{R^3}$, alſo

$$R\,d^2y + \frac{V\,dx^2}{R^2} = 0 \quad \text{oder} \quad d^2y + \frac{V\,dx^2}{R^3} = 0,$$

welche Gleichung durch den Multiplicator $R(R\,dy - y\,dR)$ integ
bel gemacht wird. Da aber $d^2R = \frac{\alpha\,dx^2}{R^3}$ iſt, ſo wird, wie wir o
geſehen haben $R = \sqrt{(\alpha + 2\beta x + \gamma x^2)}$; alſo erhalten wir, w
V eine homogene Function keiner Dimenſion von y, und

$$R = \sqrt{(\alpha + 2\beta x + \gamma x^2)}$$

ſeyn ſoll, die mit Hülfe des Multiplicators

$$(\alpha + 2\beta x + \gamma x^2)\,dy - (\beta + \gamma x)\,y\,dx$$

integrable Gleichung

$$d^2y + \frac{V\,dx^2}{(\alpha + 2\beta x + \gamma x^2)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Zuſatz 1.

§. 912. Wird aber $R = \sqrt{(\alpha + 2\beta x + \gamma x^2)}$ geſetzt, ſo w
unſere Gleichung nach Multiplication mit $R^2\,dy - R\,y\,dR$ ſeyn:

$$R^2\,dy\,d^2y - R\,y\,dR\,d^2y + \frac{V\,dx^2(R\,dy - y\,dR)}{R^2} = 0,$$

und das Integrale hievon iſt:

$$\tfrac{1}{2}R^2\,dy^2 - R\,y\,dR\,dy + \int y\,dy\,(R\,d^2R + dR^2)$$
$$+ dx^2 \int V\,d\frac{y}{R} = \text{Const. d}$$

wobey

$$R d^2R + dR^2 = d.RdR = d.(\beta + \gamma x)\,dx = \gamma dx^2,$$

und daher ist das Integrale

$$R^2dy^2 - 2Rydrdy + \gamma y^2dx^2 + 2dx^2 \int V d.\frac{y}{R} = \text{Const.}\, dx^2.$$

Zusatz 2.

§. 913. Weil V eine Function von $\frac{y}{R}$, so ist das Integrale der Formel $\int V d.\frac{y}{R}$ bekannt. Für die letztere Integration aber wird man, wenn $y = Ru$ und $\int V du = U$ gesetzt wird, erhalten:

$$R^4 du^2 - R^2u^2dR^2 + \gamma R^2u^2dx^2 + 2Udx^2 = Gdx^2,$$

oder

$$R^4 du^2 = dx^2\,[G - 2U + (\beta^2 - \alpha\gamma)\,u^2],$$

und daher

$$\frac{dx}{\alpha + 2\beta x + \gamma x^2} = \frac{du}{\sqrt{[G - 2U + (\beta^2 - \alpha\gamma)\,u^2]}},$$ ferner

$$y = u\sqrt{(\alpha + 2\beta x + \gamma x^2)}.$$

Anmerkung.

§. 914. Diese Gleichung $d^2y + \frac{V dx^2}{R^3} = 0$, bey welcher $V = \sqrt{(\alpha + 2\beta x + \gamma x^2)}$ ist, hat demnach eine weit größere Ausdehnung als jene, welche wir im vorhergehenden Probleme behandelt haben, weil man hier für V eine beliebige homogene Function, keiner Dimension von y und R nehmen kann, denn wird $V = \frac{AR^3y}{(my^2 + R^2)^2}$ gesetzt, so kömmt die oben behandelte Gleichung zum Vorschein. Übrigens geht aus der Methode, nach welcher wir jene Gleichung entwickelt haben, hervor, daß sie durch Restriction auf diese entwickelte Form gebracht worden sey, weil die Gleichung, aus welcher sie entstanden ist, nämlich

$$Rd^2y - yd^2R + \frac{dx^2}{R^2} f\left(\frac{y}{R}\right) = 0,$$

offenbar die Integration zuläßt, so bald sie durch $Rdy - ydR$ multiplicirt wird; denn es ist

$$Rd^2y - yd^2R = d.(Rdy - ydR)$$ und

$$\frac{Rdy - ydR}{R^2} = d.\frac{y}{R},$$

und daher erhalten wir nach verrichteter Multiplication:

$$(R\,dy - y\,dR)\,d\,.\,(R\,dy - y\,dR) + dx^2 f\left(\frac{y}{R}\right) d\,.\,\frac{y}{R} = 0,$$

bey welcher Gleichung jedes Glied für sich integrabel ist. Bey der daraus entwickelten Gleichung aber ist die Integrabilität schon weniger einleuchtend, bey den folgenden Gleichungen ist die Integration noch weit versteckter.

Aufgabe 115.

§. 915. Man betrachte das Element dx als constant, und bestimme das Integrale der Gleichung

$$y^2 d^2y + y dy^2 + A x dx^2 = 0,$$

mit Hülfe eines integrirenden Factors.

Auflösung.

Hier versucht man den Multiplicator von der Form $L\,dy + M\,dx$ vergebens; man versuche demnach einen Factor von der Form

$$3L dy^2 + 2M dx dy + N dx^2,$$

und setze das Integrale des Productes sey

$$Ly^2 dy^3 + My^2 dx dy^2 + Ny^2 dx^2 dy + V dx^3 = C dx^3.$$

durch Differenziation dieses Ausdruckes kommt man auf die Gleichung

$$\begin{aligned} dx^3 dV = {} & 3Ly dy^4 + 2My dx dy^3 + Ny dx^2 dy^2 + 2AMx dx^3 dy + ANx dx^4 \\ & - 2Ly dy^4 - y^2 dx dy^3 \left(\frac{dL}{dx}\right) + 3ALx dx^2 dy^2 - y^2 dx^3 dy \left(\frac{dN}{dx}\right) \\ & - y^2 dy^4 \left(\frac{dL}{dy}\right) - 2My dx dy^3 - y^2 dx^2 dy^2 \left(\frac{dM}{dx}\right) \\ & - y^2 dx dy^3 \left(\frac{dM}{dy}\right) - 2Ny dx^2 dy^2 \\ & - y^2 dx^2 dy^2 \left(\frac{dN}{dy}\right); \end{aligned}$$

soll nun diese Formel die Integration zulassen, so müssen die Glieder, welche dy^4, dy^3 und dy^2 enthalten, verschwinden; es ergibt sich also zuerst die Gleichung $L - y\left(\frac{dL}{dy}\right) = 0$, wobey $\left(\frac{dL}{dy}\right)$ durch Differenziation von L gefunden wird, wenn man x als constant betrachtet. Man sehe demnach x als eine unveränderliche Größe an, so wird $\frac{dL}{L} = \frac{dy}{y}$ und daher $L = y f(x)$. Lassen wir aber diese Func-

tion von x außer Acht, oder ſetzen wir ſie der Einheit gleich, ſo daß $L = y$ und $\left(\frac{dL}{dx}\right) = o$ wird, ſo muß zweytens die Gleichung $\left(\frac{dM}{dy}\right) = o$ Statt finden. Setzen wir alſo $M = o$, obgleich M eine beliebige Function von x bezeichnen kann, ſo werden wir dennoch ſehen, wie auf dieſe Art die Rechnung durchgeführt werden könne. Drittens erhalten wir

$$-Ny + 3Axy - y^2\left(\frac{dN}{dy}\right) = o,$$

und wenn x alſo conſtant genommen wird, ſo wird

$$3Axdy = Ndy + ydN,$$

und daher $Ny = 3Axy$ oder $N = 3Ax$, wo wir wieder die Function von x vernachläßigen, die für die Conſtante in der Rechnung erſcheinen würde. Da wir alſo bisher $L = y$, $M = o$ und $N = 3Ax$ gefunden haben, ſo wird $dV = -3Ay^2dy + 3A^2x^2dx$, und weil dieſe Formel für ſich integrabel iſt, weil nämlich $V = -Ay^3 + A^2x^3$, ſo wird der Multiplicator, welcher unſerer Gleichung die Integrabilität verſchafft, $3ydy^2 + 3Axdx^2$ ſeyn, und wir erhalten für das Integrale des Productes die Gleichung

$$y^3dy^3 + 3Axy^2dx^2dy - Ay^3dx^3 + A^2x^3dx^3 = Cdx^3,$$

welche wegen der Conſtanten C das vollſtändige Integrale darſtellt.

Zuſatz 1.

§. 916. Das erſte Glied dieſes Integrals läßt ſich bequem in drey Factoren auflöſen. Setzt man die Formel

$$z^3 - A = (z - \alpha)(z - \beta)(z - \gamma), \text{ ſo daß}$$

$$\alpha = \sqrt[3]{A},\ \beta = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{A} \text{ und } \gamma = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{A},$$

ſo findet man das Integrale

$$\left(\frac{ydy}{dx} - \alpha y + \alpha^2 x\right)\left(\frac{ydy}{dx} - \beta y + \beta^2 x\right)\left(\frac{ydy}{dx} - \gamma y + \gamma^2 x\right) = C,$$

wobey

$$\alpha + \beta + \gamma = o,\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = o \text{ und } \alpha\beta\gamma = 1$$

denn wird $\frac{ydy}{dx} = z$ geſetzt, ſo erhält man die Formel

$$z^3 + 3Axyz - Ay^3 + A^2x^3,$$

und betrachtet man $z - p - q$ als einen Factor derselben, so wird

$$z^3 - 3pqz - p^3 - q^3 = 0, \text{ und daher}$$

$$p = y\sqrt[3]{A} \text{ und } q = -x\sqrt[3]{A^2}.$$

Zusatz 2.

§. 917. Setzt man also die Constante $C = 0$, so erhält man die drey particulären Integralien

$$ydy - \alpha ydx + \alpha^2 xdx = 0,$$

und wenn man α mit β und γ vertauscht:

$$ydy - \beta ydx + \beta^2 xdx = 0 \text{ und}$$
$$ydy - \gamma ydx + \gamma^2 xdx = 0.$$

Diese geben, wenn $y = ux$ gesetzt wird, $\frac{dx}{x} = \frac{-udu}{u^2 - \alpha u + \alpha^2}$, und durch Integration findet man

$$lx = l\frac{\alpha}{\sqrt{(\alpha^2 - \alpha u + u^2)}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ arc. tang.} \frac{u\sqrt{3}}{2\alpha - u} + \text{Const.}$$

Anmerkung 1.

§. 918. Allein es ist schwierig, die gefundene Differenzialgleichung der ersten Ordnung von neuem zu integriren. Zwar kann sie durch die Substitution $dy = pdx$ und $y = ux$, also $\frac{dx}{x} = \frac{du}{p - u}$, von den Potenzen der Differenzialien befreyt werden, denn man findet

$$x^3 (u^3 p^3 + 3Au^2 p - Au^3 + A^2) = C,$$

und wenn man die Logarithmen nimmt und differenzirt, so ergibt sich

$$\frac{dx}{x} + \frac{u^2 dp (up^2 + A) + udu (up^3 + 2Ap - Au)}{u^3 p^3 + 3Au^2 p - Au^3 + A^2} = 0.$$

Schreibt man $\frac{du}{p - u}$ statt $\frac{dx}{x}$, so geht diese Gleichung über in

$$du (up^2 + A)^2 + u^2 (p - u) dp (up^2 + A) = 0,$$

und durch Division mit $up^2 + A$ erscheint die Gleichung

$$Adu + up^2 du + pu^2 dp - u^3 dp = 0,$$

welche durch die Substitution $p = \frac{q}{u}$ etwas einfacher wird, man erhält nämlich:

$$Adu + qdq + qudu - u^2 dq = 0.$$

Obgleich aber dieser Gleichung für $A = m^3$ das particuläre In-

grale $q = mu - m^2$ Genüge leiſtet, ſo ſcheint es demnach kaum möglich zu ſeyn, hieraus das vollſtändige Integrale zu finden. Übrigens wird eben dieſe Gleichung zwiſchen p und u aus der vorgelegten Differenzialgleichung des zweyten Grades unmittelbar gefunden, weil in derſelben die beyden Veränderlichen x und y durchaus dieſelbe Anzahl von Dimenſionen haben. Denn wird $dy = pdx$ und $y = ux$ geſetzt, ſo geht jene Gleichung über in

$u^2xdp + up^2dx + Adx = o$ oder $\frac{dx}{x} = \frac{-u^2dp}{A + up^2} = \frac{du}{p-u}$,

welches die vorhergehende Gleichung ſelbſt iſt.

Anmerkung 2.

§. 919. Inzwiſchen kann dennoch die vorgelegte Gleichung vollſtändig integrirt werden, und daher auch jene Gleichungen, welche wir aus ihr abgeleitet haben. Dieſen Zweck erreicht man aber auf einem ganz beſonderen Wege, indem man jene Gleichung ſogar in eine Differenzialgleichung der dritten Ordnung transformirt. Denn da

$$yd \cdot \frac{ydy}{dx} + Axdx = o$$

iſt, ſo ſetze man $\frac{dx}{y} = dv$, und man erhält

$$yd \cdot \frac{dy}{dv} + Axdx = o \quad \text{oder} \quad d \cdot \frac{dy}{dv} + Axdv = o.$$

Nimmt man das Element dv conſtant, und differenzirt von neuem, ſo findet man

$$\frac{d^3y}{dv} + Adxdv = o \quad \text{oder} \quad d^3y + Aydv^3 = o,$$

welche Form ſo beſchaffen iſt, daß wenn ihr die particulären Auflöſungen $y = P$, $y = Q$, $y = R$ Genüge leiſten, ihr auch die Gleichung $y = DP + EQ + FR$ entſprechen muß. Nun geſchieht ihr aber Genüge durch $y = e^{-\alpha v}$, wenn $\alpha^3 = A$ iſt, weil alſo in dem Zuſatze 1 die drey Größen α, β, γ dieſelbe Bedingung erfüllen, ſo erhält man das vollſtändige Integrale

$$y = De^{-\alpha v} + Ee^{-\beta v} + Fe^{-\gamma v},$$

da weil $Ax = -\frac{d^2y}{dv^2}$ iſt, ſo wird

$$x = \frac{-D\alpha^2e^{-\alpha v} - E\beta^2e^{-\beta v} - F\gamma^2e^{-\gamma v}}{A},$$

oder wenn die Constanten verändert werden, wegen $A = \alpha^3 = \beta^3 = \gamma^3$

$$x = + Ae^{-\alpha v} + Be^{-\beta v} + Ce^{-\gamma v},$$
$$y = - A\alpha e^{-\alpha v} - B\beta e^{-\beta v} - C\gamma e^{-\gamma v}.$$

Es ist also das vollständige Integrale der Gleichung

$$Adu + qdq + qudu - u^2 dq = 0,$$

in folgenden Formeln enthalten:

$$u = \frac{-A\alpha e^{-\alpha v} - B\beta e^{-\beta v} - C\gamma e^{-\gamma v}}{Ae^{-\alpha v} + Be^{-\beta v} + Ce^{-\gamma v}} \text{ und}$$

$$q = \frac{A\alpha^2 e^{-\alpha v} + B\beta^2 e^{-\beta v} + C\gamma^2 e^{-\gamma v}}{Ae^{-\alpha v} + Be^{-\beta v} + Ce^{-\gamma v}},$$

weil $q = pu = \frac{ydy}{xdx} = \frac{dy}{xdv}$ ist. Wir haben hier einen vortrefflichen Beweis einer Integration, welche sich auf directem Wege kaum wird ausführen lassen.

Aufgabe 116.

§. 920. Man nehme das Element dx als constant an, und bestimme einen integrirenden Factor für die Gleichung

$$2y^3 d^2y + y^2 dy^2 + Xdx^2 = 0,$$

bey welcher $X = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ seyn soll.

Auflösung.

Die Multiplicatoren von der Form

$$Ldy + Mdx \text{ und } Ldy^2 + Mdxdy + Ndx^2$$

sind hier nicht anwendbar; nehmen wir also einen Factor von der Form

$$2Ldy^3 + Mdx^2 dy + Ndx^3,$$

und setzen, das Integrale sey

$$Ly^3 dy^4 + My^3 dx^2 dy^2 + 2Ny^3 dx^3 dy + Sdx^4 = 0,$$

so erhalten wir durch Differenziation dieser Gleichung:

$$dx^4 dS = 2Ly^2 dy^5 + My^2 dx^2 dy^3 + Ny^2 dx^3 dy^2 + MXdx^4 dy + NXdx^5$$
$$- 3Ly^2 dy^5 + 2LXdx^2 dy^3 - y^3 dx^3 dy^2 \left(\frac{dM}{dx}\right) - 2y^3 dx^4 dy \left(\frac{dN}{dx}\right)$$
$$- y^3 dy^5 \left(\frac{dL}{dy}\right) - 3My^2 dx^2 dy^3 - 6Ny^2 dx^3 dy^2$$
$$- y^3 dx^2 dy^3 \left(\frac{dM}{dy}\right) - 2y^3 dx^3 dy^2 \left(\frac{dN}{dy}\right),$$

obey wir annehmen, daß L bloß eine Function von y ſey. Damit h alſo die Glieder, welche den Factor dy^5 enthalten, tilgen, wird

$$-L-\frac{y\,dL}{dy}=0 \quad \text{und} \quad L=\frac{1}{y}$$

yn. Damit ſich ferner die Coefficienten von dy^3 gegenſeitig aufhe- n, wird;

$$-2My^2+\frac{2X}{y}-y^3\left(\frac{dM}{dy}\right)=0,$$

nd wenn x conſtant genommen wird:

$$dM+\frac{2M\,dy}{y}=\frac{2X\,dy}{y^4},$$

nd dieſe Gleichung gibt, nachdem ſie mit y^2 multiplicirt, und dann tegrirt worden iſt:

$$My^2=P-\frac{2X}{y} \quad \text{und} \quad M=\frac{P}{y^2}-\frac{2X}{y^3},$$

obey P eine beliebige Function von x bezeichnet. Sollen ſich nun ich die Coefficienten von dy^2 gegenſeitig aufheben, ſo wird

$$-5Ny^2-y\frac{dP}{dx}+\frac{2\,dX}{dx}-2y^3\left(\frac{dN}{dy}\right)=0,$$

d wenn x als unveränderlich betrachtet wird:

$$2y^3\,dN+5Ny^2\,dy=\frac{2\,dX}{dx}\,dy-\frac{dP}{dx}\,.\,y\,dy.$$

Dividirt man dieſe Gleichung durch $\sqrt{y}$, ſo erhält man dann ch Integration

$$2Ny^{\frac{5}{2}}=\frac{4\,dX}{dx}\sqrt{y}-\frac{2\,dP}{3\,dx}y\sqrt{y},$$

nn man die Function x, welche noch hinzuzufügen wäre, außer t läßt, weil dann die irrationale Größe $\sqrt{y}$ aus der Rechnung ver- indet. Es wird alſo

$$N=\frac{2\,dX}{y^2\,dx}-\frac{dP}{3y\,dx} \quad \text{und}$$

$$=dy\left[\frac{PX}{y^2}-\frac{2X^2}{y^3}-\frac{4y\,d^2X}{dx^2}+\frac{2y^2d^2P}{3\,dx^2}\right]+\frac{2X\,dX}{y^2}-\frac{X\,dP}{3y}$$

1, und demnach findet man durch Integration:

$$=\frac{X^2}{y^2}-\frac{PX}{y}-\frac{2y\,d^2X}{dx^2}+\frac{2y^3\,d^2P}{9\,dx^2}$$

$$+\int\left(\frac{P\,dX}{y}+\frac{2X\,dP}{3y}+\frac{2y^2d^3X}{dx^2}-\frac{2y^3d^3P}{9\,dx^2}\right);$$

welches Integrale in einer endlichen Form erscheint, wenn $P = o$ ist, weil dann $d^3 X = o$ wegen $X = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ wird; deßhalb erhalten wir

$$L = \frac{1}{y}, \quad M = -\frac{2X}{y^3} \quad \text{und} \quad N = \frac{2\,dX}{y^2\,dx}, \quad \text{endlich}$$

$$S = \frac{X^2}{y^2} - \frac{2y^2 d^2 X}{dx^2} + \text{Const.},$$

und daher ist die Integralgleichung

$$y^2 dy^4 - 2X dx^2 dy^2 + 4y dX dx^2 dy + \frac{X^2 dx^4}{y^2} - 2y^2 dx^2 d^2 X = C dx^4.$$

Die vorgelegte Gleichung

$$2y^3 d^2 y + y^2 dy^2 + dx^2 (\alpha + \beta x + \gamma x^2) = o$$

wird also integrabel gemacht, wenn man sie multiplicirt durch

$$\frac{2\,dy^3}{y} - \frac{2(\alpha + \beta x + \gamma x^2)\,dx^2 dy}{y^3} + \frac{2\,dx^3 (\beta + 2\gamma x)}{y^2};$$

dann aber ist das Integrale:

$$y^2 dy^4 - 2\,dx^2 dy^2 (\alpha + \beta x + \gamma x^2) + 4y\,dx^3 dy (\beta + 2\gamma x) - 4\gamma y^2 dx^4 + \frac{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^2 dx^4}{y^2} = C dx^4,$$

oder

$$[y^2 dy^2 - (\alpha + \beta x + \gamma x^2)\,dx^2]^2 + 4y^3 dx^3 dy (\beta + 2\gamma x) - 4\gamma y^4 dx^4 = C y^2 dx^4.$$

Anmerkung 1.

§. 921. Dieses Integrale ist so versteckt, daß die Auffindung desselben auf einem andern Wege kaum möglich zu seyn scheint; es ist aber auch so beschaffen, daß man dasselbe nach keiner bekannten Methode weiter integriren kann, und daher ist die erste Integration nur für einen unbedeutenden Gewinn zu halten. So wie wir aber bey dem vorhergehenden Probleme das vollständige Integrale aus einer andern Quelle hergeleitet haben, eben so können wir auch hier auf ähnliche Art das Integrale bestimmen, welches um so merkwürdiger ist, weil die vorgelegte Gleichung, an sich betrachtet, äußerst schwierig aufzulösen ist. Setzen wir also $dx = y\,dv$, so wird, da

$$d^2 y = dx\,d \cdot \frac{dy}{dx} = y\,dv\,d \cdot \frac{dy}{y\,dv}$$

ist, wenn wir nun das Element dv constant setzen:

$$d^2 y = y\,dv \left(\frac{d^2 y}{y\,dv} - \frac{dy^2}{y^2\,dv}\right) = d^2 y - \frac{dy^2}{y}.$$

Unſere Gleichung nimmt daher folgende Form an:

$$2y^3 d^2y - y^2 dy^2 + y^2 dv^2 (\alpha + \beta x + \gamma x^2) = 0, \text{ oder}$$
$$2y d^2y - dy^2 + dv^2 (\alpha + \beta x + \gamma x^2) = 0,$$

und wenn wir dieſe Gleichung von neuem differenziiren, ſo erhalten wir:

$$2y d^3y + y dv^3 (\beta + 2\gamma x) = 0, \text{ oder}$$
$$2 d^3y + dv^3 (\beta + 2\gamma x) = 0,$$

und nach nochmaliger Differenziation:

$$2 d^4y + 2\gamma y dv^4 = 0 \quad \text{oder} \quad d^4y + \gamma y dv^4 = 0.$$

Könnte man dieſe Gleichung auf irgend eine andere Art auflöſen, und den Werth von y durch v ausdrücken, ſo würde $x = \int y dv$ oder ohne Integration $x = -\frac{d^3y}{\gamma dv^3} - \frac{\beta}{2\gamma}$. Allein es iſt einleuchtend, daß jener Differenzialgleichung der vierten Ordnung der Werth $y = e^{\lambda v}$ Genüge leiſte, wenn $\lambda^4 + \gamma = 0$ iſt. Setzen wir alſo $\gamma = -n^4$, ſo erhält man für λ vier Werthe, nämlich $\lambda = \pm n$ und $\lambda = \pm n\sqrt{-1}$, und daher iſt das vollſtändige Integrale

$$y = Ae^{nv} + Be^{-nv} + C \sin.(nv + z), \text{ folglich}$$
$$x = +\frac{A}{n} e^{nv} - \frac{B}{n} e^{-nv} - \frac{C}{n} \cos.(nv + z) + \frac{\beta}{2n^4},$$

welche Werthe alſo auch der zwiſchen x und y vorgelegten Gleichung Genüge leiſten werden, wenn man nur die Conſtanten A, B, C und z von einander abhängen läßt, daß ſie auch mit der Größe α übereinſtimmen. Werden nämlich dieſe Werthe ſubſtituirt, ſo muß man erhalten $\alpha + \beta x - n^4x^2 + \frac{2y d^2y - dy^2}{dv^2} = 0$, wo es hinreichend iſt, bloß die conſtanten Glieder in Betrachtung zu ziehen, zu welchen aber auch jene Glieder gerechnet werden müſſen, welche das Quadrat des Sinus oder Coſinus des Winkels $nv + z$ enthalten, durch deren Verbindung nämlich eine conſtante Größe erhalten wird. Da alſo

$$2y = 2Ae^{nv} + 2Be^{-nv} + 2C \sin.(nv + z)$$
$$\frac{d^2y}{dv^2} = n^2 Ae^{nv} + Bn^2 e^{-nv} - n^2 C \sin.(nv + z)$$
$$\frac{dy}{dv} = nAe^{nv} - nBe^{-nv} + nC \cos.(nv + z)$$
$$x = \frac{A}{n} e^{nv} - \frac{B}{n} e^{-nv} - \frac{C}{n} \cos.(nv + z) + \frac{\beta}{2n^4}$$

ſo wird, wenn die erwähnten Glieder genommen werden,

$$\beta x = \frac{\beta^2}{2n^4}$$

$$-n^4 . x^2 = 2ABn^2 - n^2C^2 \cos.(nv + \varepsilon)^2 - \frac{\beta^2}{4n^4}$$

$$\frac{2y\,d^2y}{dv^2} = 4ABn^2 - 2n^2C^2 \sin.(nv + \varepsilon)^2$$

$$\frac{-dy^2}{dv^2} = 2ABn^2 - n^2C^2 \cos.(nv + \varepsilon)^2;$$

folglich

$$\alpha + 8n^2AB - 2n^2C^2 + \frac{\beta^2}{4n^4} = 0, \text{ und daher}$$

$$C = \sqrt{\left[\frac{\alpha}{2n^2} + \frac{\beta^2}{8n^6} + 4AB\right]}, \text{ oder}$$

$$\alpha = 2n^2(C^2 - 4AB) - \frac{\beta^2}{4n^4} \text{ und}$$

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 = 2n^2(C^2 - AB) - \left(\frac{\beta}{2n^2} - n^2 x\right)^2.$$

Es bleiben demnach die drey Constanten A, B und ε unbestimmt, so daß die für x und y aufgestellten Formeln ohne Zweifel das vollständige Integrale darstellen.

Anmerkung 2.

§. 922. Die Differenzialgleichungen des zweyten Grades, mit welchen wir uns in den beyden vorhergehenden Aufgaben beschäftiget haben, lassen sich auf eine ähnliche Form zurückführen; denn die erstere

$$y(y\,d^2y + dy^2) + X\,dx^2 = 0,$$

wo $X = Ax$ oder $X = \alpha + \beta x$ ist, nimmt, wenn $y\,dy = \frac{1}{2}dz$ oder $y^2 = z$ gesetzt wird, folgende Form an:

$$\tfrac{1}{2}d^2z . \sqrt{z} + X\,dx^2 = 0,$$

welche mit Hülfe des Multiplicators $\frac{3\,dz^2}{4\sqrt{z}} + 3X\,dx^2$ integrabel gemacht wird. Die zweyte Gleichung aber

$$y^2(2y\,d^2y + dy^2) + X\,dx^2 = 0,$$

bey welcher $X = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ ist, geht für $y = z^{\frac{3}{2}}$, also

$$dy = \tfrac{3}{2}z^{\frac{1}{2}}dz \text{ und } d^2y = \tfrac{3}{2}z^{\frac{1}{2}}d^2z - \tfrac{3}{4}z^{-\frac{1}{2}}dz^2,$$

und daher

$$2y\,d^2y + dy^2 = \tfrac{4}{3}z^{\frac{1}{2}}d^2z,$$

in folgende Gleichung über

$$\tfrac{4}{3}z^{+\frac{3}{2}}d^2z + X\,dx^2 = 0,$$

nd dieſe wird integrabel gemacht durch Hülfe des Multiplicators

$$\frac{16\,dz^3}{27\,z^{\frac{5}{3}}} - \frac{4X dx^2 dz}{3z^{\frac{2}{3}}} + \frac{2dX dx^2}{z^{\frac{4}{3}}},$$

Hieraus folgern wir nun, daß der Gleichung

$$d^2z + \frac{2X dx^2}{\sqrt{z}} = 0$$

er Multiplicator $dz^2 + 4X dx^2 \sqrt{z}$ entſprechen werde; der Gleichung

$$d^2z + \frac{3X dx^2}{4z\sqrt[3]{z^2}} = 0 \quad \text{aber der Factor}$$

$$dz^3 - \frac{9X dx^2 dz}{4\sqrt[3]{z^2}} + \frac{27}{8} dX dx^2 \sqrt[3]{z};$$

der man erhält

für die Gleichung	den Multiplicator
$d^2z + \frac{X dx^2}{\sqrt{z}} = 0$	$dz^2 + 2X dx^2 \sqrt{z}$
$d^2z + \frac{X dx^2}{z\sqrt[3]{z^2}} = 0$	$dz^3 - \frac{3X dx^2 dz}{\sqrt[3]{z^2}} + \frac{9}{2} dX dx^2 \sqrt[3]{z}.$

Übrigens ſind dieſe Integrationen höchſt merkwürdig, weil ſie mit Hülfe höherer Differenzialgleichungen bewerkſtelliget werden können. Da auf dieſe Art aus der Gleichung

$$d^3y + A dv d^2y + B dv^2 dy + C y dv^3 = 0,$$

wo dv conſtant genommen iſt, folgt

$$y = \mathfrak{A} e^{\alpha v} + \mathfrak{B} e^{\beta v} + \mathfrak{C} e^{\gamma v},$$

wenn α, β, γ die Wurzeln der Gleichung

$$r^3 + Ar^2 + Br + C = 0$$

bezeichnen, ſo ſetzen wir $dv = \frac{dx}{y}$, und weil

$$d^2y = dv\,d \cdot \frac{dy}{dv} = \frac{dx}{y} d \cdot \frac{y\,dy}{dx} \quad \text{und}$$

$$d^3y = dv^2\,d \cdot \frac{d^2y}{dv^2} = dv^2\,d \cdot \left(\frac{1}{dv} d \cdot \frac{dy}{dv}\right) = \frac{dx^2}{y^2} d \cdot \left(\frac{y}{dx} d \cdot \frac{y\,dy}{dx}\right)$$

iſt, ſo erhalten wir, wenn wir jetzt dx als unveränderlich anſehen:

$$d^2y = d^2y + \frac{dy^2}{y} \quad \text{und}$$

$$d^3y = \frac{1}{y^2} d \cdot y(y d^2y + dy^2) = d^3y + \frac{4 dy d^2y}{y} + \frac{dy^3}{y^2},$$

und daher durch Multiplication mit y^2:

$$y^2 d^3y + 4ydyd^2y + dy^3 + Adx(yd^2y + dy^2) + Bdx^2dy + Cdx^3 = o;$$

die Integration dieser Gleichung gibt:

$$y^2 d^2y + ydy^2 + Aydxdy + Bydx^2 + (Cx + D)dx^2 = o,$$

welche Formel sich also nach den obigen Vorschriften integriren läßt.

Aufgabe 117.

§. 923. Man bestimme die Bedingungen, welche die Functionen P, Q, R und L, M, N erfüllen müssen, damit die Differenzialgleichung des zweyten Grades:

$$d^2y + Pdy^2 + Qdxdy + Rdx^2 = o,$$

integrabel gemacht werde durch den Multiplicator

$$3Ldy^2 + 2Mdxdy + Ndx^2.$$

Auflösung.

Nach verrichteter Multiplication gibt die Integration der mit d^2y multiplicirten Glieder

$$Ldy^3 + Mdxdy^2 + Ndx^2dy;$$

man setze daher, das Integrale sey

$$Ldy^3 + Mdxdy^2 + Ndx^2dy + Vdx^3 = Cdx^3,$$

dessen Differenziale der vorgelegten Gleichung, nachdem sie mit dem Factor multiplicirt worden ist, gleich werden muß; man erhält sonach:

$$dx^3dV = 3LP.dy^4 + 3LQdxdy^3 + 3LRdx^2dy^2$$
$$+2MP \quad +2MQ \quad +2MRdx^3dy$$
$$-\left(\frac{dL}{dy}\right) \quad -\left(\frac{dL}{dx}\right) \quad +NP \quad +NQ \quad +NRdx^4$$
$$-\left(\frac{dM}{dy}\right) \quad -\left(\frac{dM}{dx}\right) \quad -\left(\frac{dN}{dx}\right)$$
$$-\left(\frac{dN}{dy}\right).$$

Es muß also werden

$$3LP - \left(\frac{dL}{dy}\right) = o$$
$$3LQ + 2MP - \left(\frac{dL}{dx}\right) - \left(\frac{dM}{dy}\right) = o$$
$$3LR + 2MQ + NP - \left(\frac{dM}{dx}\right) - \left(\frac{dN}{dy}\right) = o;$$

aber wird

$$dV = \left[2MR + NQ - \left(\frac{dN}{dx}\right)\right] dy + NR dx,$$

ie Formel integrabel ſeyn muß. Aus jenen Gleichungen aber er-
n wir:

$$= \frac{1}{3L}\left(\frac{dL}{dy}\right), \quad Q = \frac{1}{3L}\left(\frac{dL}{dx}\right) + \frac{1}{3L}\left(\frac{dM}{dy}\right) - \frac{2M}{9L^2}\left(\frac{dL}{dy}\right)$$

$$= \frac{1}{3L}\left(\frac{dM}{dx}\right) + \frac{1}{3L}\left(\frac{dN}{dy}\right) - \frac{N}{9L^2}\left(\frac{dL}{dy}\right) - \frac{2M}{9L^2}\left(\frac{dL}{dx}\right)$$
$$- \frac{2M}{9L^2}\left(\frac{dM}{dy}\right) + \frac{4M^2}{27L^3}\left(\frac{dL}{dy}\right).$$

Zuſatz 1.

§. 924. Wenn L, M und N Functionen von x allein ſind, ſo
$P = 0$, $Q = \frac{dL}{3L\,dx}$ und $R = \frac{dM}{3L\,dx} - \frac{2M\,dL}{9L^2\,dx}$, daher

$$= \left[\frac{2M\,dM}{3L\,dx} - \frac{4M^2\,dL}{9L^2\,dx} + \frac{N\,dL}{3L\,dx} - \frac{dN}{dx}\right] dy$$
$$+ \frac{N\,dM}{3L} - \frac{2MN\,dL}{9L^2},$$

der Coefficient von dy muß conſtant ſeyn. Durch Diviſion mit
wird man erhalten:

$$\frac{C\,dx}{\sqrt[3]{L}} = \frac{2M\,dM}{3L\sqrt[3]{L}} - \frac{4M^2\,dL}{9L^2\sqrt[3]{L}} + \frac{N\,dL}{3L\sqrt[3]{L}} - \frac{dN}{\sqrt[3]{L}},$$

durch Integration

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{L}} = \frac{M^2}{3L\sqrt[3]{L}} - \frac{N}{\sqrt[3]{L}} \quad \text{oder} \quad N = \frac{M^2}{3L} - CL^{\frac{1}{3}}\int\frac{dx}{\sqrt[3]{L}},$$

$$V = Cy + \int\left(\frac{dM}{3L} - \frac{2M\,dL}{9L^2}\right)\left(\frac{M^2}{3L} - CL^{\frac{1}{3}}\int\frac{dx}{\sqrt[3]{L}}\right).$$

Zuſatz 2.

§. 925. Sey $M = S\sqrt[3]{L^2}$, ſo wird

$$dM = dS\sqrt[3]{L^2} + \frac{2S\,dL}{3\sqrt[3]{L}} \quad \text{und}$$

$$V = Cy + \tfrac{1}{3}\int\frac{dS}{\sqrt[3]{L}}\left[\tfrac{1}{3}S^2\sqrt[3]{L} - CL^{\frac{1}{3}}\int\frac{dx}{\sqrt[3]{L}}\right], \text{ oder}$$

$$V = Cy + \tfrac{1}{17}S^3 - \tfrac{1}{3}C\int dS \int \frac{dx}{\sqrt[3]{L}};$$

dann aber iſt

$$N = \tfrac{1}{3}S^2\sqrt[3]{L} - CL^{\frac{1}{3}}\int \frac{dx}{\sqrt[3]{L}} = \left(\tfrac{1}{3}S^2 - C\int \frac{dx}{\sqrt[3]{L}}\right)\sqrt[3]{L}$$

und

$$P = 0, \quad Q = \frac{dL}{3Ldx} \text{ und } R = \frac{dS}{3dx\sqrt[3]{L}}.$$

Die Gleichung

$$d^2y + \frac{dL\,dy}{3L} + \frac{dS\,dx}{3\sqrt[3]{L}} = 0$$

wird demnach integrabel gemacht durch den Multiplicator

$$3L\,dy^2 + 2S\,dx\,dy\sqrt[3]{L^2} + dx^2\left(\tfrac{1}{3}S^2 - C\int \frac{dx}{\sqrt[3]{L}}\right)\sqrt[3]{L},$$

und das Integrale ſelbſt iſt:

$$L\,dy^3 + S\,dx\,dy^2\sqrt[3]{L^2} + dx^2\,dy\left(\tfrac{1}{3}S^2 - C\int \frac{dx}{\sqrt[3]{L}}\right)\sqrt[3]{L} + C\,y\,dx^3$$
$$+ \tfrac{1}{17}S^3\,dx^3 - \tfrac{1}{3}C\,dx^3\int dS\int \frac{dx}{\sqrt[3]{L}} = 0.$$

Zuſatz 3.

§. 926. Welcher Werth hier auch immer für die Conſtante C angenommen werden mag, ſo muß dennoch immer daſſelbe Integrale zum Vorſchein kommen. Wird demnach C = 0, ſo wird der Gleichung

$$d^2y + \frac{dL\,dy}{3L} + \frac{dS\,dx}{3\sqrt[3]{L^2}} = 0$$

der Multiplicator

$$3L\,dy^2 + 2S\,dx\,dy\sqrt[3]{L^2} + \tfrac{1}{3}S^2\,dx^2\sqrt[3]{L},$$

entſprechen, und das Integrale

$$L\,dy^3 + S\,dx\,dy^2\sqrt[3]{L^2} + \tfrac{1}{3}S^2\,dx^2\,dy\sqrt[3]{L} + \tfrac{1}{17}S^3\,dx^3 = D.dx^3,$$

oder

$$[dy\sqrt[3]{L} + \tfrac{1}{3}S\,dx]^3 = D\,.\,dx^3.$$

Anmerkung. 1.

§. 927. Sind die Functionen P, Q und R gegeben, ſo laſſen ſich aus denſelben Bedingungen auch die Functionen L, M und N beſtimmen, in wie fern die letzte Bedingung der Integrabilität es zuläßt.

wäre z. B. $P = \frac{n}{y}$, $Q = o$ und R bloß eine Function von x, nämlich $= X$, so daß man die Gleichung erhält:

$$d^2y + \frac{n\,dy^2}{y} + X\,dx^2 = o,$$

und man nimmt als Multiplicator den Ausdruck

$$3L\,dy^2 + 2M\,dx\,dy + N\,dx^2,$$

daß das Integrale

$$L\,dy^3 + M\,dx\,dy^2 + N\,dx^2\,dy + V\,dx^3 = C\,dx^3,$$

erhält man erstlich $\frac{3nL}{y} - \left(\frac{dL}{dy}\right) = o$, und wenn x constant genommen wird, $\frac{dL}{L} = \frac{3n\,dy}{y}$, also $L = S\,y^{3n}$, wo S eine Function von x bezeichnet. Ferner ist

$$\frac{2nM}{y} - y^{3n} \cdot \frac{dS}{dx} - \left(\frac{dM}{dy}\right) = o,$$

und wenn x als unveränderlich angesehen wird:

$$dM - \frac{2nM\,dy}{y} + \frac{dS}{dx} \cdot y^{3n}\,dy = o;$$

multiplicirt man diese Gleichung mit y^{-2n}, und integrirt sie dann, so findet man:

$$y^{-2n}M + \frac{dS}{(n+1)\,dx} \cdot y^{n+1} = T = \text{Funct. von } x; \text{ also}$$

$$M = Ty^{2n} - \frac{dS}{(n+1)\,dx}\,y^{3n+1}.$$

Drittens muß

$$3SXy^{3n} + \frac{nN}{y} - \frac{dT}{dx}\,y^{2n} + \frac{d^2S}{(n+1)\,dx^2} \cdot y^{3n+1} - \frac{dN}{dy} = o$$

werden, und sonach, wenn x constant genommen wird:

$$N - \frac{nN\,dy}{y} + \frac{dT}{dx} \cdot y^{2n}\,dy - \frac{d^2S}{(n+1)\,dx^2} \cdot y^{3n+1}\,dy - 3SXy^{3n}\,dy = o,$$

welche Gleichung nach Multiplication mit y^{-n} durch Integration gibt:

$$-{}^{n}N + \frac{dT}{(n+1)\,dx}\,y^{n+1} - \frac{d^2S}{2(n+1)^2dx^2}\,y^{2n+2} - \frac{3SX}{2n+1}\,y^{2n+1} = Uf(x), \text{ oder}$$

$$= Uy^n - \frac{dT}{(n+1)\,dx}\,y^{2n+1} + \frac{d^2S}{2(n+1)^2dx^2}\,y^{3n+2} + \frac{3SX}{2n+1}\,y^{3n+1}.$$

Hieraus aber ergibt sich:

$$dV = dy\left\{2TXy^{2n} - \frac{2XdS}{(n+1)dx}y^{3n+1} - \frac{dU}{dx}y^{n} + \frac{d^2T}{(n+1)dx^2}y^{2n+1} - \frac{d^3S}{2(n+1)^2dx^3}y^{3n+2} - \frac{3d.SX}{(2n+1)dx}y^{3n+1}\right\}$$
$$+ Xdx\left[Uy^{n} - \frac{dT}{(n+1)dx}y^{2n+1} + \frac{d^2S}{2(n+1)^2dx^2}y^{3n+2} + \frac{3SX}{2n+1}y^{3n+1}\right]$$

und damit diese Gleichung die Integration zuläßt, muß folgende Gleichung Statt finden:

$$2y^{2n}d.TX - 2y^{3n+1}.\frac{d.XdS}{(n+1)dx} - y^{n}\frac{d^2U}{dx} +$$
$$+ y^{2n+1}.\frac{d^3T}{(n+1)dx^2} - y^{3n+2}.\frac{d^4S}{2(n+1)^2dx^3}$$
$$- 3y^{3n+1}\frac{d^2.SX}{(2n+1)dx} - nUXy^{n-1}dx$$
$$+ \frac{(2n+1)XdT}{n+1}y^{2n} - \frac{(3n+2)Xd^2S}{2(n+1)^2dx}y^{3n+1}$$
$$- \frac{3(3n+1)SX^2dx}{2n+1}y^{3n} = 0.$$

Hier müssen sich also die einzelnen Potenzen von y, in wiefern sie ungleich sind, für sich aufheben; daher gibt die Potenz y^{n-1} die Gleichung $U = 0$, und sonach muß auch die Potenz y^{n} verschwinden. Die Potenz y^{2n} gibt

$$(2n+2)TdX + (2n+2)XdT + (2n+1)XdT = 0,$$
$$\text{oder } X^{2n+2}T^{4n+3} = A;$$

die Potenz y^{2n+1} aber gibt $d^3T = 0$ oder $T = \alpha + \beta x + \gamma x^2$. Die Potenz y^{3n} aber erfordert $S = 0$, wenn nicht $n = -\frac{1}{3}$ ist, in welchem Falle auch die Potenzen y^{3n+1} und y^{3n+2} von selbst verschwinden. Da nun also $U = 0$, $S = 0$ und $T = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ ist, also $X = B(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^{\frac{-4n-3}{2n+2}}$, so wird die Gleichung

$$d^2y + \frac{ndy^2}{y} + B(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^{\frac{-4n-3}{2n+2}}dx^2 = 0$$

integrabel, mit Hülfe des Multiplicators

$$2(\alpha + \beta x + \gamma x^2)y^{2n}dy - \frac{dx(\beta + 2\gamma x)}{n+1}y^{2n+1}.$$

Anmerkung 2.

§. 928. Obgleich dieſe Methode bey weitem noch nicht genug vollkommnet iſt, ſo zeigen die in dieſem Kapitel angeſtellten Unterſuchungen denn doch zur Genüge, welche große Erweiterungen wir von dieſer Methode erwarten können, und wir glauben ihre weitere Ausdehnung den Geometern auf das Nachdrücklichſte empfehlen zu müſſen. Da wir nun die Methoden, deren man ſich bey der Auflöſung der Differenzialgleichungen des zweyten Grades bedient, mit genügender Ausführlichkeit erörtert haben, ſo wollen wir nun zu dem folgenden Kapitel übergehen, wo wir die Integration ſolcher Gleichungen durch unendliche Reihen, in wie fern dieß bequem geſchehen kann, lehren werden.

Kapitel VII.

Von der Auflösung der Differenzialgleichung $d^2y + ax^n y dx^2 = 0$ mittelst unendlicher Reihen.

Aufgabe 118.

§. 929. Das Integrale der Differenzialgleichung des zweyten Grades, $d^2y + ax^n y dx^2 = 0$, bey welcher das Element dx constant genommen ist, durch eine unendliche Reihe darzustellen.

Auflösung.

Wir suchen hier eine Reihe, die nach den Potenzen von x fortschreitet, und den Werth von y ausdrückt; weil nun in dem einen Gliede unserer Gleichung die Größe x mit ihrem Differenziale dx keine Dimension, in dem andern Gliede aber $n+2$ Dimensionen enthält, so ist einleuchtend, daß die Exponenten der Potenzen von x um die Differenz $n+2$ zunehmen oder fallen müssen.

I. Es sollen zuerst die Exponenten wachsen, und man nehme folgende Reihe an:

$$y = Ax^{\lambda} + Bx^{\lambda+n+2} + Cx^{\lambda+2n+4} + \ldots\ldots,$$

so wird

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \lambda(\lambda-1)\,Ax^{\lambda-2} + (\lambda+n+2)(\lambda+n+1)\,Bx^{\lambda+n} + \ldots$$

$$ax^n y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots aAx^{\lambda+n};$$

hieraus erhellet, daß das erste Glied allein verschwinden müsse, so daß $\lambda(\lambda-1) = 0$ wird. Man muß daher entweder $\lambda = 0$ oder $\lambda = 1$ setzen, und hieraus ergibt sich folgende Doppelreihe:

$$y = A + Bx^{n+2} + Cx^{2n+4} + Dx^{3n+6} + Ex^{4n+8} + \ldots\ldots$$
$$+ \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}x^{n+3} + \mathfrak{C}x^{2n+5} + \mathfrak{D}x^{3n+7} + \mathfrak{E}x^{4n+9} + \ldots\ldots$$

Durch Substitution dieses Werthes muß man also erhalten:

$$0 = (n+2)(n+1)Bx^n + (2n+4)(2n+3)Cx^{2n+2} + (3n+6)(3n+5)Dx^{3n+4} + \ldots$$
$$+ aA + aB + aC + \ldots$$
$$0 = (n+3)(n+2)\mathfrak{B}x^{n+1} + (2n+5)(2n+4)\mathfrak{C}x^{2n+3} + (3n+7)(3n+6)\mathfrak{D}x^{3n+5} + \ldots$$
$$+ a\mathfrak{A} + a\mathfrak{B} + a\mathfrak{C}$$

Da nun die Größen A und $\mathfrak{A}$ unserer Willkür überlassen bleiben, lassen sich die übrigen durch dieselben auf folgende Art bestimmen:

$$= \frac{-aA}{(n+1)(n+2)}, \quad C = \frac{-aB}{2(2n+3)(n+2)},$$

$$D = \frac{-aC}{3(3n+5)(n+2)}, \text{ u. s. w.}$$

$$= \frac{-a\mathfrak{A}}{(n+3)(n+2)}, \quad \mathfrak{C} = \frac{-a\mathfrak{B}}{2(2n+5)(n+2)},$$

$$\mathfrak{D} = \frac{-a\mathfrak{C}}{3(3n+7)(n+2)}, \text{ u. s. w.}$$

so ergibt sich das vollständige Integrale durch folgenden Ausdruck:

$$= A - \frac{aAx^{n+2}}{1(n+1)(n+2)} + \frac{a^2Ax^{2n+4}}{1.2(n+1)(2n+3)(n+2)^2} -$$

$$- \frac{a^3Ax^{3n+6}}{1.2.3(n+1)(2n+3)(3n+5)(n+2)^3} + \ldots$$

$$\mathfrak{A}x - \frac{a\mathfrak{A}x^{n+3}}{1(n+3)(n+2)} + \frac{a^2\mathfrak{A}x^{2n+5}}{1.2(n+3)(2n+5)(n+2)^2} -$$

$$- \frac{a^3\mathfrak{A}x^{3n+7}}{1.2.3(n+3)(2n+5)(3n+7)(n+2)^3} + \ldots$$

II. Sollen die Exponenten abnehmen, und man setzt

$$y = Ax^{\lambda} + Bx^{\lambda-n-2} + Cx^{\lambda-2n-4} + \ldots,$$

erhält man

$$\frac{dy}{dx} = \lambda(\lambda-1)Ax^{\lambda-2} + (\lambda-n-2)(\lambda-n-3)Bx^{\lambda-n-4} + \ldots$$

$$ax^n y = aAx^{\lambda+n} + aBx^{\lambda-2} + \ldots\ldots$$

Da nun hier kein Glied erscheint, welches dem mit $x^{\lambda+n}$ behafteten Gliede ähnlich ist, so kann dieses letztere auch nicht verschwinden, daß auf diesem Wege keine Auflösung der Gleichung erhalten wird.

Zusatz 1.

§. 930. Weil die Größen A und $\mathfrak{A}$ willkürlich sind, so stellt die gefundene Doppelreihe das vollständige Integrale der Differentialgleichung des zweyten Grades $d^2y + ax^n y\,dx^2 = 0$ dar. Legt man aber den Größen A und $\mathfrak{A}$ bestimmte Werthe bey, so erhält man particuläre Integralien.

Zusatz 2.

§. 931. Setzen wir $n+2 = m$ oder $n = m-2$, so läßt sich

das vollständige Integrale der Gleichung $d^2y + ax^{m-2}ydx^2 =$ bequemer auf folgende Weise darstellen:

$$y = \begin{cases} A - \frac{aAx^m}{1(m-1)m} + \frac{a^2Ax^{2m}}{1\cdot 2\cdot(m-1)(2m-1)m^2} \\ \quad - \frac{a^3Ax^{3m}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot(m-1)(2m-1)(3m-1)m^3} + \cdots \\ \mathfrak{A}x - \frac{a\mathfrak{A}x^{m+1}}{1(m+1)m} + \frac{a^2\mathfrak{A}x^{2m+1}}{1\cdot 2\cdot(m+1)(2m+1)m^2} \\ \quad - \frac{a^3\mathfrak{A}x^{3m+1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot(m+1)(2m+1)(3m+1)m^3} + \cdots \end{cases}$$

Zusatz 3.

§. 932. Wenn der Exponent m positiv und größer als die heit ist, so convergiren diese Reihen um so mehr, je kleiner der A der Veränderlichen x genommen wird. In den übrigen Fällen können diese Reihen in der Anwendung nicht gebraucht werden, müßten sich denn zufällig in andere convergente Reihen transform lassen.

Anmerkung 1.

§. 933. Es gibt jedoch Fälle, in welchen diese Reihen ganz brauchbar werden; dieß ereignet sich, wenn irgend einer der Facto aus welchen die Nenner zusammengesetzt sind, verschwindet, und d alle folgenden Glieder unendlich werden würden, in welchen F man jene Reihen auf andere Formen bringen muß. Hier bietet zuerst der Fall dar, in welchem $m = 0$ oder $n = -2$ ist, un welchen alle Glieder beyder Reihen, mit Ausnahme der beyden er unendlich werden. Weil aber in diesem Falle die Gleichung, w in $d^2y + \frac{aydx^2}{x^2} = 0$ übergeht, homogen ist, so gestattet sie besondere Integration, denn es läßt sich eine Potenz von x auffin welche für y substituirt, der Gleichung Genüge leistet. Man setze n lich $y = x^\lambda$, so erhält man

$$\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2} + ax^{\lambda-2} = 0 \quad \text{oder} \quad \lambda^2 - \lambda + a = 0$$

woraus $\lambda = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - a}$ gefunden wird, und wegen dieses dopp ten Werthes ergibt sich das vollständige Integrale

$$y = Ax^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-a}} + Bx^{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-a}},$$

lche Gleichung für $a > \frac{1}{4}$ folgende Form erhält:

$$y = Ax^{\frac{1}{2}} \sin.\,[(a - \tfrac{1}{4})^{\frac{1}{2}} lx + \alpha],$$

d hieraus erhellt, daß man für $a = \frac{1}{4}$

$$y = (A + B lx)\sqrt{x}$$

det.

Anmerkung 2.

§. 934. Die übrigen Fälle, welche die Reihen unbequem machen, jeben sich, wenn entweder $m = \frac{1}{k}$ oder $m = -\frac{1}{k}$ geſetzt wird, bey k eine beliebige ganze Zahl bezeichnet. Für $m = \frac{1}{k}$ wird nur erſte Reihe unbrauchbar, für $m = \frac{-1}{k}$ bloß die letzte. Setzen r daher im erſten Falle $A = o$, im letztern aber $\mathfrak{A} = o$, ſo erhält m eine einzige brauchbare Reihe, die aber ein particuläres Integrale rſtellt. Iſt aber ein particuläres Integrale, welches $y = P$ ſeyn g, bekannt, ſo läßt ſich hieraus das vollſtändige Integrale der eichung

$$d^2y + ax^{m-2}ydx^2 = o$$

leiten, wenn man $y = Pz$ ſetzt, denn dann wird

$$Pd^2z + 2dPdz + zd^2P + ax^{m-2}Pzdx^2 = o;$$

iſt aber der Vorausſetzung gemäß

$$d^2P + ax^{m-2}Pdx^2 = o,$$

o erhält man

$$l^2z + 2dPdz = o \quad \text{oder} \quad P^2dz = Cdx \quad \text{und} \quad z = C\int\frac{dx}{P^2}.$$

Allein da P eine unendliche Reihe bezeichnet, ſo läßt ſich hier- s der Werth von z nicht erkennen. Aber in den erwähnten Fällen hält ein Theil des Integrals den Logarithmus von x, welches man ch daraus erkennt, daß der Ausdruck $\frac{x^o}{o}$ den Logarithmus von x be- chnet. Setzen wir daher in der Gleichung

$$d^2y + ax^{m-2}ydx^2 = o,$$

$= p + qlx$, ſo wird, weil $dy = dp + \frac{qdx}{x} + dqlx$ iſt,

$$l^2p + \frac{2dxdq}{x} - \frac{qdx^2}{x^2} + d^2qlx + apx^{m-2}dx^2 + aqx^{m-2}dx^2lx = o,$$

in welcher Gleichung sich die lx enthaltenden Theile für sich tilgen müssen, so daß sich hieraus folgende zwey Gleichungen ergeben:

$$d^2q + aqx^{m-2}dx^2 = o \quad \text{und}$$

$$d^2p + \frac{2dxdq}{x} - \frac{qdx^2}{x^2} + apx^{m-2}dx^2 = o.$$

Hier muß man für q jene der beyden obigen Reihen setzen, welche in dem vorgelegten Falle brauchbar ist, und dann läßt sich aus der letztern Gleichung die Größe p leicht durch eine Reihe ausdrücken. Derley Fälle wollen wir in den folgenden Beyspielen entwickeln, und bemerken nur noch, daß jene Operation unverändert bleibe, wenn wir $lx + \alpha$ statt lx schreiben, so daß man, so bald p und q gefunden sind,

$$y = \alpha q + p + ql x \quad \text{oder} \quad y = p + ql\beta x \quad \text{erhält.}$$

Beyspiel 1.

§. 935. Man setze $m = 1$, und löse die Gleichung

$$d^2y + \frac{aydx^2}{x} = o$$

durch Reihen auf.

Wird $y = p + qlx$ gesetzt, so muß man

$$q = \mathfrak{A}x - \frac{a\mathfrak{A}x^2}{1.2} + \frac{a^2\mathfrak{A}x^3}{1.2.2.3} - \frac{a^3\mathfrak{A}x^4}{1.2.2.3.3.4} + \ldots$$

nehmen, wofür wir Kürze wegen

$$q = \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}x^2 + \mathfrak{C}x^3 + \mathfrak{D}x^4 + \ldots$$

schreiben wollen. Dann aber suche man p aus der Gleichung

$$\frac{d^2p}{dx^2} + \frac{2dq}{xdx} - \frac{q}{x^2} + \frac{ap}{x} = o; \quad \text{setzen wir also}$$

$$p = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots,$$

so erhält man durch Substitution

$$\left.\begin{array}{rrrrrrr} 2C & + 6Dx & + 12Ex^2 & + 20Fx^3 & + 30Gx^4 & \\ + \frac{2\mathfrak{A}}{x} & + 4\mathfrak{B} & + 6\mathfrak{C} & + 8\mathfrak{D} & + 10\mathfrak{E} & + 12\mathfrak{F} \\ - \frac{\mathfrak{A}}{x} & - \mathfrak{B} & - \mathfrak{C} & - \mathfrak{D} & - \mathfrak{E} & - \mathfrak{F} \\ + \frac{aA}{x} & + aB & + aC & + aD & + aE & + aF \end{array}\right\} = o.$$

Da nun die Coefficienten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E} \ldots$ bekannt sind, so wird $A = -\frac{\mathfrak{A}}{a}$, die Größe B bleibt unbestimmt, dann aber ist

$$C = \frac{-3\mathfrak{B}}{2} - \frac{aB}{1\cdot 2} = \frac{+3a\mathfrak{A}}{1^3\cdot 2^3} - \frac{aB}{1\cdot 2},$$

$$D = \frac{-5\mathfrak{C}}{6} - \frac{aC}{2\cdot 3} = \frac{-5a^2\mathfrak{A}}{1^2\cdot 2^3\cdot 3^2} - \frac{aC}{2\cdot 3},$$

$$E = \frac{-7\mathfrak{D}}{12} - \frac{aD}{3\cdot 4} = \frac{+7a^3\mathfrak{A}}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot 4^2} - \frac{aD}{3\cdot 4},$$

$$F = \frac{-9\mathfrak{E}}{20} - \frac{aE}{4\cdot 5} = \frac{-9a^4\mathfrak{A}}{1^2\,2^2\cdot 3^2\cdot 4^3\cdot 5^2} - \frac{aE}{4\cdot 5},$$

bey wir $B = o$ ſetzen können, wenn wir in dem Integrale $= p + qlx$ den Theil αq hinzufügen, der ſich aus der Größe B gibt, ſo daß alſo

$$p = A + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \ldots$$

rd. Man findet demnach

$$= \frac{3a\mathfrak{A}}{1^3\cdot 2^2},\quad D = \frac{-14a^2\mathfrak{A}}{1^3\cdot 2^3\cdot 3^2},\quad E = \frac{+70a^3\mathfrak{A}}{1^3\cdot 2^3\cdot 3^3\cdot 4^2},$$

$$F = \frac{-404a^4\mathfrak{A}}{1^3\cdot 2^3\cdot 3^3\cdot 4^3\cdot 5^2},\quad \text{u. ſ. w.,}$$

bey zu bemerken iſt, daß

$$= 3.3+5.1,\quad 70 = 4.14+7.1.2,\quad 404 = 5.70+9.1.2.3,$$

d für den folgenden

$$2688 = 6\cdot 404 + 11\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4;$$

iſt demnach

$$y = p + \alpha q + qlx.$$

Beyſpiel 2.

§. 936. Man ſetze $m = -1$, und löſe die Gleichung

$$d^2y + \frac{aydx^2}{x^3} = o$$

rch Reihen auf.

Wird $y = p + \alpha q + qlx$ geſetzt, ſo muß man

$$q = A - \frac{aA}{1\cdot 2\cdot x} + \frac{a^2A}{1\cdot 2^2\cdot 3x^2} - \frac{a^3A}{1\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot 4x^3} + \ldots$$

men, und hierfür ſchreibe man Kürze halber

$$q = A + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} + \frac{D}{x^3} + \frac{E}{x^4} + \ldots;$$

n aber muß man die Größe p aus folgender Gleichung beſtimmen:

$$d^2p + \frac{2dqdx}{x} - \frac{qdx^2}{x^2} + \frac{apdx^2}{x^3} = o.$$

Nehmen wir demnach die Reihe an:

$$p = \mathfrak{A}x + \mathfrak{B} + \frac{\mathfrak{C}}{x} + \frac{\mathfrak{D}}{x^2} + \frac{\mathfrak{E}}{x^3} + \frac{\mathfrak{F}}{x^4} + \ldots,$$

so ergibt sich nach gehöriger Substitution

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a\mathfrak{A}}{x^2} + \frac{a\mathfrak{B}}{x^3} + \frac{a\mathfrak{C}}{x^4} + \frac{a\mathfrak{D}}{x^5} + \frac{a\mathfrak{E}}{x^6} + \frac{a\mathfrak{F}}{x^7} + \ldots \\ -\frac{A}{x^2} - B - C - D - E - F \\ \quad - 2B - 4C - 6D - 8E - 10F \\ \quad + 2\mathfrak{C} + 6\mathfrak{D} + 12\mathfrak{E} + 20\mathfrak{F} + 30\mathfrak{G} \end{array}\right\} = 0,$$

und die Coefficienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ ꝛc. bestimmen sich so, daß $\mathfrak{A} = \frac{A}{a}$ wird; der zweyte, $\mathfrak{B}$, bleibt unbestimmt, und dann ist

$$\mathfrak{C} = \frac{3B}{1\,.\,2} - \frac{a\mathfrak{B}}{1\,.\,2} = \frac{-3aA}{1^3\,.\,2^2} - \frac{a\mathfrak{B}}{1\,.\,2},$$

$$\mathfrak{D} = \frac{5C}{2\,.\,3} - \frac{a\mathfrak{C}}{2\,.\,3} = \frac{5a^2A}{2^3\,.\,3^2} - \frac{a\mathfrak{C}}{2\,.\,3},$$

$$\mathfrak{E} = \frac{7D}{3\,.\,4} - \frac{a\mathfrak{D}}{3\,.\,4} = \frac{-7a^3A}{2^2\,.\,3^3\,.\,4^2} - \frac{a\mathfrak{D}}{3\,.\,4},$$

$$\mathfrak{F} = \frac{9E}{4\,.\,5} - \frac{a\mathfrak{E}}{4\,.\,5} = \frac{9a^4A}{2^2\,.\,3^2\,.\,4^3\,.\,5^2} - \frac{a\mathfrak{E}}{4\,.\,5}.$$

Nimmt man nun, ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit, $\mathfrak{B} = 0$, so daß

$$p = \mathfrak{A}x + \frac{\mathfrak{C}}{x} + \frac{\mathfrak{D}}{x^2} + \frac{\mathfrak{E}}{x^3} + \frac{\mathfrak{F}}{x^4} + \text{ꝛc.}$$

wird, so erhält man

$$\mathfrak{C} = \frac{-3aA}{1^3\,.\,2^2}, \quad \mathfrak{D} = \frac{+14a^2A}{1^3\,.\,2^3\,.\,3^2}, \quad \mathfrak{E} = \frac{-70a^3A}{1^3\,.\,2^3\,.\,3^3\,.\,4^2}$$

$$\mathfrak{F} = \frac{+404a^4A}{1^3\,.\,2^3\,.\,3^3\,.\,4^3\,.\,5^2}, \text{ u. s. w.,}$$

welche Werthe den obigen ähnlich sind.

Beyspiel 3.

§. 937. Für $m = \frac{1}{2}$ erhält man die Gleichung

$$d^2y + \frac{aydx^2}{x\sqrt{x}} = 0,$$

man löse sie in einer Reihe auf.

Wird $y = p + \alpha q + ql x$ gesetzt, so muß man

$$q = \mathfrak{A}x - \frac{4a\mathfrak{A}}{1\,.\,3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{16a^2\mathfrak{A}}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}x^2 - \frac{64a^3\mathfrak{A}}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,3\,.\,4\,.\,5}x^{\frac{5}{2}}$$

$$+ \frac{256a^4\mathfrak{A}}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6}x^3 - \text{ꝛc.}$$

ehmen, und ſtatt dieſer Reihe ſchreibe man Kürze halber

$$= \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}x^{\frac{3}{2}} + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^{\frac{5}{2}} + \mathfrak{E}x^3 + \mathfrak{F}x^{\frac{7}{2}} + \mathfrak{G}x^4 + \ldots;$$

nun aber hat man die Größe p aus folgender Gleichung zu beſtimmen:

$$d^2p + \frac{2dxdq}{x} - \frac{qdx^2}{x^2} + \frac{apdx^2}{x\sqrt{x}} = 0.$$

Nehmen wir alſo an, es ſey

$$= \Delta + Ax^{\frac{1}{2}} + Bx + Cx^{\frac{3}{2}} + Dx^2 + Ex^{\frac{5}{2}} + Fx^3 + \ldots,$$

erhalten wir nach gehöriger Subſtitution:

$$\left.\begin{array}{llllllll} \frac{\Delta}{\sqrt{x}} + \frac{aA}{x} + \frac{aB}{\sqrt{x}} + aC + aD\sqrt{x} + aEx + aFx\sqrt{x} & & & & & & & \\ - \mathfrak{A} & - \mathfrak{B} & - \mathfrak{C} & - \mathfrak{D} & - \mathfrak{E} & - \mathfrak{F} & & \\ + 2\mathfrak{A} & + 3\mathfrak{B} & + 4\mathfrak{C} & + 5\mathfrak{D} & + 6\mathfrak{E} & + 7\mathfrak{F} & & \\ \frac{A}{4} + o & + \frac{3}{4}C & + 2D & + \frac{15}{4}E & + 6F & + \frac{35}{4}G & & \end{array}\right\} = 0.$$

Hieraus folgern wir nun

$$A = \frac{-\mathfrak{A}}{a}, \quad \Delta = \frac{-\mathfrak{A}}{4a^2},$$

bleibt unbeſtimmt, und dann iſt ferner

$$C = \frac{-4aB}{1\cdot 3} - \frac{8\mathfrak{B}}{1\cdot 3} = \frac{-4aB}{1\cdot 3} + \frac{32a\mathfrak{A}}{1^2\cdot 3^2},$$

$$D = \frac{-4aC}{2\cdot 4} - \frac{12\mathfrak{C}}{2\cdot 4} = \frac{-4aC}{2\cdot 4} - \frac{12\cdot 16\cdot a^2\cdot \mathfrak{A}}{1\cdot 3\cdot 2^2\cdot 4^2},$$

$$E = \frac{-4aD}{3\cdot 5} - \frac{16\mathfrak{D}}{3\cdot 5} = \frac{-4aD}{3\cdot 5} + \frac{16\cdot 64\cdot a^3\cdot \mathfrak{A}}{1\cdot 3\cdot 2\cdot 4\cdot 3^2\cdot 5^2},$$

$$F = \frac{-4aE}{4\cdot 6} - \frac{20\mathfrak{E}}{4\cdot 6} = \frac{-4aE}{4\cdot 6} - \frac{20\cdot 256\cdot a^4\cdot \mathfrak{A}}{1\cdot 3\cdot 2\cdot 4\cdot 3\cdot 5\cdot 4^2\cdot 6^2}.$$

Wenn wir nun $B = o$ ſetzen, ſo daß

$$= \frac{-\mathfrak{A}}{4\cdot a^2} - \frac{\mathfrak{A}}{a}\sqrt{x} + * + Cx\sqrt{x} + Dx^2 + Ex^2\sqrt{x} + Fx^3 + \ldots,$$

finden wir

$$= \frac{8\cdot 4\cdot a\mathfrak{A}}{1^2\cdot 3^2}, \quad D = \frac{-100\cdot 16\cdot a^2\mathfrak{A}}{1^2\cdot 3^2\cdot 2^2\cdot 4^2}, \quad E = \frac{1884\cdot 64\cdot a^3\mathfrak{A}}{1^2\cdot 3^2\cdot 2^2\cdot 4^2\cdot 3^2\cdot 5^2},$$

$$F = \frac{-52416\cdot 256\cdot a^4\mathfrak{A}}{1^2\cdot 3^2\cdot 2^2\cdot 4^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 4^2\cdot 6^2}, \text{ u. ſ. w.,}$$

bey zu bemerken iſt, daß

$$D = 2.4.8 + 1.3.12, \quad 1884 = 3.5.100 + 1.3.2.4.16,$$
$$52416 = 4.6.1884 + 1.3.2.4.3.5.20.$$

Beyspiel 4.

§. 938. Für $m = -\frac{1}{2}$ erhält man die Gleichung

$$d^2y + \frac{a y dx^2}{x^2\sqrt{x}} = 0,$$

man löse sie durch Reihen auf.

Wird $y = p + \alpha q + q l x$ gesetzt, so muß man

$$q = A - \frac{4aA}{1.3} x^{-\frac{1}{2}} + \frac{16a^2A}{1.3.2.4} x^{-1} - \frac{64a^3A}{1.3.2.4.3.5} x^{-\frac{3}{2}} + \ldots$$

nehmen, und für diese Reihe schreibe man Kürze halber

$$q = A + Bx^{-\frac{1}{2}} + Cx^{-1} + Dx^{-\frac{3}{2}} + Ex^{-2} + Fx^{-\frac{5}{2}} + \ldots$$

die Größe p aber hat man aus folgender Gleichung zu bestimmen:

$$d^2p + \frac{2dxdq}{x} - \frac{qdx^2}{x^2} + \frac{apdx^2}{x^2\sqrt{x}} = 0.$$

Man nehme also an, es sey

$$p = \Delta x + \mathfrak{A}\sqrt{x} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}x^{-\frac{1}{2}} + \mathfrak{D}x^{-1} + \mathfrak{E}x^{-\frac{3}{2}} + \mathfrak{F}x^{-2} + \mathfrak{G}x^{-\frac{5}{2}} + \ldots$$

so findet man durch Substitution dieses Werthes

$$\left.\begin{array}{rrrrrrr} \frac{a\Delta}{x\sqrt{x}} + \frac{a\mathfrak{A}}{x^2} + \frac{a\mathfrak{B}}{x^2\sqrt{x}} + \frac{a\mathfrak{C}}{x^3} + \frac{a\mathfrak{D}}{x^3\sqrt{x}} + \frac{a\mathfrak{E}}{x^4} + \frac{a\mathfrak{F}}{x^4\sqrt{x}} & & & & & & \\ -A & -B & -C & -D & -E & -F & \\ & -B & -2C & -3D & -4E & -5F & \\ -\frac{1}{4}\mathfrak{A} & +\frac{3}{4}\mathfrak{C} & +2\mathfrak{D} & +\frac{15}{4}\mathfrak{E} & +6\mathfrak{F} & +\frac{35}{4}\mathfrak{G} & \end{array}\right\} = 0$$

woraus sich nachfolgende Bestimmungen ergeben:

$$\mathfrak{A} = \frac{A}{a} \text{ und } \Delta = \frac{\mathfrak{A}}{4a} = \frac{A}{4a^2},$$

$\mathfrak{B}$ aber bleibt unbestimmt, und dann erhält man ferner

$$\mathfrak{C} = \frac{-4a\mathfrak{B}}{1.3} + \frac{8B}{1.3} = \frac{-4a\mathfrak{B}}{1.3} - \frac{8.4.aA}{1^2.3^2},$$

$$\mathfrak{D} = \frac{-4a\mathfrak{C}}{2.4} + \frac{12C}{2.4} = \frac{-4a\mathfrak{C}}{2.4} + \frac{12.16.a^2A}{1.3.2^2.4^2},$$

$$\mathfrak{E} = \frac{-4a\mathfrak{D}}{3.5} + \frac{16D}{3.5} = \frac{-4a\mathfrak{D}}{3.5} - \frac{16.64.a^3A}{1.3.2.4.3^2.5^2},$$

$$\mathfrak{F} = \frac{-4a\mathfrak{E}}{4.6} + \frac{20E}{4.6} = \frac{-4a\mathfrak{E}}{4.6} + \frac{20.256.a^4A}{1.3.2.4.3.5.4^2.6^2}.$$

Setzt man nun $\mathfrak{B} = 0$, so wird

$$= \frac{-8 \cdot 4aA}{1^2 \cdot 3^2}, \quad \mathfrak{D} = \frac{+100 \cdot 16a^2A}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2 \cdot 4^2}, \quad \mathfrak{E} = \frac{-1884 \cdot 64a^3A}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2 \cdot 4^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2},$$

u. s. w.

che Zahlen nach demselben Gesetze fortschreiten, wie oben.

Anmerkung.

§. 939. Aus diesen Beyspielen ist ersichtlich, wie die Reihen, che die Gleichung

$$d^2y + ax^{m-2}ydx^2 = 0$$

lösen, in den übrigen Fällen, wo $m = \pm \frac{1}{k}$ ist, gefunden werden nen, wobey jedoch bemerkt werden muß, daß wenn $m = +\frac{1}{k}$ ist, q folgende Reihe angenommen werden müsse:

$$q = \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}x^{1+\frac{1}{k}} + \mathfrak{C}x^{1+\frac{2}{k}} + \mathfrak{D}x^{1+\frac{3}{k}} + \ldots,$$

; sich aber dann der Ausdruck für p durch eine Reihe von folgender rm darstellt:

$$p = A + Bx^{\frac{1}{k}} + Cx^{\frac{2}{k}} + Dx^{\frac{3}{k}} + \ldots,$$

en Coefficienten aus den vorigen gerade so, wie oben, bestimmt rden. Ist aber $m = -\frac{1}{k}$, so nehme man für q die Reihe

$$q = A + Bx^{-\frac{1}{k}} + Cx^{-\frac{2}{k}} + Dx^{-\frac{3}{k}} + \ldots,$$

p aber eine Reihe von der Form

$$p = \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}x^{1-\frac{1}{k}} + \mathfrak{C}x^{1-\frac{2}{k}} + \mathfrak{D}x^{1-\frac{3}{k}} + \ldots,$$

durch sich ebenfalls die Coefficienten, mit Ausnahme eines einzigen, stimmen lassen. Diesen Kunstgriff gebrauche man im Allgemeinen, oft man bey der Auflösung der allgemeinen Gleichung auf Reihen ßt, deren Coefficienten in gewissen Fällen unendlich werden, was wöhnlich ein Zeichen ist, daß man Logarithmen in die Rechnung einführen habe. Übrigens läßt sich dieselbe Gleichung

$$d^2y + ax^n ydx^2 = 0$$

ch noch auf andern Wegen mittelst Reihen auflösen, wenn dieselbe, vor man noch zur Auflösung schreitet, auf eine andere Form gebracht

wird. Da es ſich nun hier ereignen kann, daß die Reihe in gewiſſen Fällen abbricht, in welchen ſich ſogar das Integrale wirklich angeben läßt, ſo wollen wir eine ſolche höchſt merkwürdige Transformation auseinanderſetzen.

Aufgabe 119.

§. 940. Die Differenzialgleichung des zweyten Grades:

$$dy^2 + ax^n y dx^2 = 0,$$

auf eine andere Form zu bringen, ſo daß ſie ſich dann bequem mittelſt unendlicher Reihen auflöſen läßt.

Auflöſung.

Wir wollen uns der Subſtitution $y = e^{\int p dx} z$ bedienen, wobey p eine beſtimmte Function von x ſeyn ſoll, durch welche die Gleichung bequem auflösbar gemacht wird. Man wird alſo erhalten

$$dy = e^{\int p dx} (dz + pzdx) \text{ und}$$
$$dy^2 = e^{\int p dx} (dz^2 + 2pdxdz + zdxdp + p^2 zdx^2),$$

daher geht die vorgelegte Gleichung über in

$$dz^2 + 2pdxdz + zdxdp + p^2 zdx^2 + ax^n zdx^2 = 0,$$

wo p ſo zu nehmen iſt, daß

$$p^2 + ax^n = 0 \quad \text{oder} \quad p = x^{\frac{n}{2}} \sqrt{-a}$$

wird. Setzen wir deßhalb $a = -c^2$ und $n = 2m$, damit wir folgende Gleichung erhalten:

$$dy^2 - c^2 x^{2m} y dx^2 = 0, \text{ welche für}$$

$$p = cx^m \quad \text{und} \quad y = e^{\int p dx} z = e^{\frac{c}{m+1} x^{m+1}} z$$

folgende Form annimmt:

$$dz^2 + 2cx^m dxdz + mcx^{m-1} zdx^2 = 0.$$

Weil in dieſer Gleichung x entweder keine, oder $m + 1$ Dimenſionen hat, ſo wollen wir für den Werth von z nachſtehende Reihe annehmen:

$$z = Ax^\lambda + Bx^{\lambda+m+1} + Cx^{\lambda+2m+2} + \ldots;$$

durch Subſtitution dieſes Werthes erhalten wir

$$\left.\begin{array}{l} \lambda(\lambda-1) Ax^{\lambda-2} + (\lambda+m+1)(\lambda+m) Bx^{\lambda+m-1} \\ \quad + 2\lambda Ac \\ \quad + mAc \end{array}\right\} = 0,$$

und hieraus erhellet, daß man entweder $\lambda = 0$ oder $\lambda = 1$ ſetzen müſſe. Wir erhalten alſo eine Doppelreihe von der Form

$$y = A + Bx^{m+1} + Cx^{2m+2} + Dx^{3m+3} + Ex^{4m+4} + \ldots$$
$$\mathfrak{A}x + \mathfrak{B}x^{m+2} + \mathfrak{C}x^{2m+3} + \mathfrak{D}x^{3m+4} + \mathfrak{E}x^{4m+5} + \ldots$$

und durch Subſtitution derſelben wird

$$\left.\begin{array}{llll} (m+1)\,mBx^{m-1} & +2(m+1)(2m+1)Cx^{2m} & +3(m+1)(3m+2)Dx^{3m+1} & \\ +mAC & +2(m+1)Bc & +4(m+1)Cc & \\ & +mBc & +mCc & \end{array}\right\} = 0$$

$$\left.\begin{array}{llll} (m+1)(m+2)\mathfrak{B}x^{m} & +2(m+1)(2m+3)\mathfrak{C}x^{2m+1} & +3(m+1)(3m+4)\mathfrak{D}x^{3m+2} & \\ +2\mathfrak{A}c & +2(m+2)\mathfrak{B}c & +2(2m+3)\mathfrak{C}c & \\ +m\mathfrak{A}c & +m\mathfrak{B}c & +m\mathfrak{C}c & \end{array}\right\} = 0,$$

und hieraus beſtimmen ſich die Coefficienten beyder Reihen auf folgende Art:

$$B = \frac{-mAc}{m(m+1)} \qquad \mathfrak{B} = \frac{-(m+2)\mathfrak{A}c}{(m+2)(m+1)}$$
$$C = \frac{-(3m+2)Bc}{2(2m+1)(m+1)} \qquad \mathfrak{C} = \frac{-(3m+4)\mathfrak{B}c}{2(2m+3)(m+1)}$$
$$D = \frac{-(5m+4)Cc}{3(3m+2)(m+1)} \qquad \mathfrak{D} = \frac{-(5m+6)\mathfrak{C}c}{3(3m+4)(m+1)}$$
$$E = \frac{-(7m+6)Dc}{4(4m+3)(m+1)} \qquad \mathfrak{E} = \frac{-(7m+8)\mathfrak{D}c}{4(4m+5)(m+1)}$$
u. ſ. w., u. ſ. w.,

wo die beyden Coefficienten A und $\mathfrak{A}$ unbeſtimmt bleiben, ſo daß man dieſes Integrale als das vollſtändige anſehen kann.

Eine andere Methode iſt folgende: Nimmt man die Reihe, in welcher die Exponenten von x abnehmen, ſo muß

$$2\lambda + m = 0 \quad \text{oder} \quad m = -2\lambda$$

werden, ſo daß unſere Gleichung übergeht in

$$d^2y - c^2x^{-4\lambda}y\,dx^2 = 0, \quad \text{welche für}$$

$$p = cx^{-2\lambda} \quad \text{und} \quad y = e^{\int p\,dx}z = e^{\frac{-c}{2\lambda-1}x^{-2\lambda+1}}.z$$

ſich verwandelt in

$$d^2z + 2cx^{-2\lambda}dx\,dz - 2\lambda cx^{-2\lambda-1}z\,dx^2 = 0.$$

Setzen wir alſo

$$z = Ax^{\lambda} + Bx^{3\lambda-1} + Cx^{5\lambda-2} + Dx^{7\lambda-3} + \ldots,$$

$$\left.\begin{array}{llll} & \lambda(\lambda-1)\,A x^{\lambda-2} & + (3\lambda-1)(3\lambda-2)\,B x^{3\lambda-3} & + (5\lambda-2)(5\lambda-3)\,C x^{5\lambda-4} \\ + 2\lambda A c x^{-\lambda-1} & + 2(3\lambda-1)\,B c & + 2(5\lambda-2)\,C c & + 2(7\lambda-3)\,D c \\ - 2\lambda A c & - 2\lambda B c & - 2\lambda C c & - 2\lambda D c \end{array}\right\} = 0,$$

woraus sich nun die Coefficienten auf folgende Art ergeben:

$$B = \frac{-\lambda(\lambda-1)\,A}{(4\lambda-2)\,c} = \frac{-\lambda(\lambda-1)\,A}{2(2\lambda-1)\,c},$$

$$C = \frac{-(3\lambda-1)(3\lambda-2)\,B}{(8\lambda-4)\,c} = \frac{-(3\lambda-1)(3\lambda-2)\,B}{4(2\lambda-1)\,c},$$

$$D = \frac{-(5\lambda-2)(5\lambda-3)\,C}{(12\lambda-6)\,c} = \frac{-(5\lambda-2)(5\lambda-3)\,C}{6(2\lambda-1)\,c},$$

$$E = \frac{-(7\lambda-3)(7\lambda-4)\,D}{(16\lambda-8)\,c} = \frac{-(7\lambda-3)(7\lambda-4)\,D}{8(2\lambda-1)\,c},$$

u. s. w.

Hier bleibt nur die Größe A allein unserer Willkür überlassen, weßhalb diese Reihe bloß ein particuläres Integrale darstellt.

Zusatz 1.

§. 941. Aus der erstern Auflösung erhellt, daß die eine Reihe abbreche, so bald

$$(2k+1)\,m + 2k = 0 \quad \text{oder} \quad m = \frac{-2k}{2k+1}$$

ist, die andere aber, so oft

$$(2k-1)\,m + 2k = 0 \quad \text{oder} \quad m = \frac{-2k}{2k-1},$$

, wobey k eine beliebige ganze Zahl bezeichnet. In dieſen Fällen ſich alſo das Integrale bloß als ein particuläres in einem endlichen drucke darſtellen.

Zuſatz 2.

§. 942. Die zweyte Auflöſung führt auf eine endliche Reihe, ſo ntweder

$$(2k+1)\lambda - k = 0 \quad \text{oder} \quad (2k-1)\lambda - k = 0$$

. h., wenn

$$\lambda = \frac{k}{2k \pm 1} \quad \text{und} \quad m = \frac{-2k}{2k \pm 1}$$

wie vorhin. In den übrigen Fällen aber ſchreitet dieſe Reihe nendliche fort.

Zuſatz 3.

§. 943. Bezeichnet k irgend eine ganze Zahl, ſo ſind in der $n = \frac{-4k}{2k \pm 1}$ alſo alle jene Fälle enthalten, in welchen die ung

$$d^2y - c^2x^n dx^2 = 0,$$

uch, wenn $y = e^{\int u dx}$ geſetzt wird, die Gleichung

$$du + u^2 dx = c^2 x^n dx$$

ine particuläre Integration zuläßt.

Anmerkung.

§. 944. Es iſt aber ſchon hinreichend, bloß ein particuläres In- gefunden zu haben, weil ſich aus demſelben das vollſtändige ale leicht beſtimmen läßt; denn da in dem Integrale die Größe eint, während in der Differenzialgleichung nur das Quadrat c^2 mt, ſo iſt es gleichgültig, ob man in dem Integrale $+c$ oder etzt. Wenn daher $y = P + cQ$ ein particuläres Integrale wird auch $y = P - cQ$ ein particuläres Integrale ſeyn, und ch iſt das vollſtändige Integrale

$$y = \alpha(P + cQ) + \beta(P - cQ) \quad \text{oder}$$
$$y = \alpha P + \beta c Q.$$

Um nun dieſe Bemerkung deutlicher zu machen, wollen wir ſie e zweyte Auflöſungsart der Gleichung

$$d^2y - c^2x^{-4\lambda} y dx^2 = 0$$

anwenden. Zu dieſem Zwecke haben wir, indem Kürze hal

$\frac{1}{1-2\lambda} x^{1-2\lambda} = t$ geſetzt wurde, $y = e^{ct} z$ geſetzt, und fande

$$z = A x^{\lambda} - \frac{\lambda(\lambda-1).A}{2(2\lambda-1).c} x^{3\lambda-1} + \frac{\lambda(\lambda-1)(3\lambda-1)(3\lambda-2).A}{2.4(2\lambda-1)^2.c^2} x^{5\lambda-2}$$

$$- \frac{\lambda(\lambda-1).(3\lambda-1)(3\lambda-2)(5\lambda-2)(5\lambda-3).A}{2.4.6(2\lambda-1)^3.c^3} x^{7\lambda-3} + .$$

Unterſcheiden wir die Glieder, welche durch gerade Potenzen v c dividirt ſind, von jenen, welche ungerade Potenzen von c im Nenn enthalten, und ſchreiben ſtatt der vorigen Reihe $z = P - cQ$, ſo d die Größen P und Q bloß gerade Potenzen von c enthalten, ſo fi den wir

$$y = e^{ct}(P - cQ)$$

als das eine, und

$$y = e^{-ct}(P + cQ),$$

als das andere particuläre Integrale, und demnach wird

$$y = \tfrac{1}{2} P(\alpha e^{ct} + \beta e^{-ct}) - \tfrac{1}{2} cQ(\alpha e^{ct} - \beta e^{-ct})$$

das vollſtändige Integrale ſeyn.

Iſt alſo c eine imaginäre Zahl, oder $c^2 = -b^2$, ſo daß

$$d^2y + b^2 x^{-4\lambda} y dx^2 = o$$

unſere vorgelegte Gleichung iſt, ſo wird

$$z = P - bQ\sqrt{-1} \quad \text{und}$$

$$e^{ct} = e^{bt\sqrt{-1}} = \cos.bt + \sqrt{-1}\sin.bt, \text{ alſo}$$

$$y = P\left[\frac{\alpha+\beta}{2}\cos.bt + \frac{\alpha-\beta}{2}\sqrt{-1}\sin.bt\right]$$

$$- bQ\left[\frac{\alpha-\beta}{2}\cos.bt + \frac{\alpha+\beta}{2}\sqrt{-1}\sin.bt\right]\sqrt{-}$$

Sey nun

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = \gamma \quad \text{und} \quad \frac{\alpha-\beta}{2}\sqrt{-1} = \delta,$$

ſo ſtellt ſich in dieſem Falle das vollſtändige Integrale unter folgend Form dar:

$y = P(\gamma\cos.bt + \delta\sin.bt) - bQ(\delta\cos.bt - \gamma\sin.bt$ oder

$$y = (\gamma P - \delta bQ)\cos.bt + (\delta P + \gamma bQ)\sin.bt.$$

Wir wollen nun die auf dieſe Art integrablen Fälle entwickeln.

Beyſpiel 1.

§. 945. Man beſtimme das Integrale der Gleichung

$$d^2y - c^2 y dx^2 = 0.$$

Hier iſt $\lambda = 0$ und $z = A$; ferner $t = x$, und daher wird, weil $= A$ und $Q = 0$ iſt, das vollſtändige Integrale folgendes ſeyn:

$$y = \alpha e^{cx} + \beta e^{-cx}.$$

In dem Falle aber, wo $c^2 = -b^2$ iſt, wird der Gleichung

$$d^2y + b^2 y dx^2 = 0$$

gendes vollſtändige Integrale entſprechen:

$$y = \gamma \cos. bx + \delta \sin. bx.$$

Beyſpiel 2.

§. 946. Das Integrale der Gleichung

$$d^2y - c^2 x^{-4} y dx^2 = 0$$

finden.

Weil hier $\lambda = 1$ iſt, ſo iſt $z = Ax$ und $t = \frac{-1}{x}$, daher erlt man wegen $P = x$ und $Q = 0$ die Gleichung

$$y = (\alpha e^{ct} + \beta e^{-ct})\, x.$$

Für den Fall aber, daß $c^2 = -b^2$, entſpricht der Gleichung

$$d^2y + b^2 x^{-4} y dx^2 = 0$$

gendes Integrale:

$$y = (\alpha \cos. bt + \beta \sin. bt)\, x,$$

bey $t = \frac{-1}{x}$ iſt.

Beyſpiel 3.

§. 947. Man beſtimme das Integrale der Gleichung

$$d^2y - c^2 x^{-\frac{4}{3}} y dx^2 = 0.$$

Weil $\lambda = \frac{1}{3}$ iſt, ſo wird $B = -\frac{A}{3c}$ und $z = Ax^{\frac{1}{3}} - \frac{A}{3c}$,

ner $t = 3x^{\frac{1}{3}}$ alſo $P = x^{\frac{1}{3}}$ und $Q = \frac{1}{3c^2}$, alſo wird das Intale ſeyn:

$$y = (\alpha e^{ct} + \beta e^{-ct})\, x^{\frac{1}{3}} - (\alpha e^{ct} - \beta e^{-ct})\, \frac{1}{3c}.$$

Für den Fall aber, daß $c^2 = -b^2$ iſt, entſpricht der Gleichung

$$d^2y + b^2x^{-\frac{4}{3}}y\,dx^2 = o$$

folgendes Integrale:

$$y = (\alpha \cos. bt + \beta \sin. bt)\,x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3b}(\beta \cos. bt - \alpha \sin. bt).$$

Beyspiel 4.

§. 948. Man suche das Integrale folgender Gleichung:

$$d^2y - c^2x^{-\frac{8}{3}}y\,dx^2 = o.$$

Wegen $\lambda = \frac{2}{3}$ wird $B = \frac{A}{3c}$ und $z = Ax^{\frac{2}{3}} + \frac{A}{3c} \cdot x$, so daß $P = x^{\frac{2}{3}}$ und $Q = \frac{-x}{3c^2}$ wird. Setzt man demnach

$$t = -3x^{-\frac{1}{3}},$$

so stellt sich das Integrale unter folgender Form dar:

$$y = x^{\frac{2}{3}}(\alpha e^{ct} + \beta e^{-ct}) + \frac{x}{3c}(\alpha e^{ct} - \beta e^{-ct}).$$

Ist aber $c^2 = -b^2$, so wird man für die Gleichung

$$d^2y + b^2x^{-\frac{8}{3}}y\,dx^2 = o$$

folgendes Integrale erhalten:

$$y = x^{\frac{2}{3}}(\alpha \cos. bt + \beta \sin. bt) - \frac{x}{3b}(\beta \cos. bt - \alpha \sin. bt).$$

Beyspiel 5.

§. 949. Das Integrale der Gleichung

$$d^2y - c^2x^{-\frac{8}{5}}y\,dx^2 = o$$

zu bestimmen.

Wegen $\lambda = \frac{2}{5}$ ist $B = \frac{-3A}{5c}$ und $C = \frac{+3A}{5^2c^2}$, also

$$z = Ax^{\frac{2}{5}} - \frac{3A}{5c}x^{\frac{1}{5}} + \frac{3A}{5^2c^2}, \text{ und demnach}$$

$$P = x^{\frac{2}{5}} + \frac{3}{5^2c^2} \text{ und } Q = \frac{3}{5c^2}x^{\frac{1}{5}}.$$

Wird nun $t = 5x^{\frac{1}{5}}$ gesetzt, so erhält man das Integrale

$$y = \left(x^{\frac{2}{5}} + \frac{3}{5^2c^2}\right)(\alpha e^{ct} + \beta e^{-ct}) - \frac{3}{5c}x^{\frac{1}{5}}(\alpha e^{ct} - \beta e^{-ct}).$$

Iſt aber $c^2 = -b^2$, ſo entſpricht der Gleichung

$$d^2y + b^2 x^{-\frac{8}{5}} y\,dx^2 = 0$$

endes Integrale:

$$= \left(x^{\frac{2}{5}} - \frac{3}{5^2 b^2}\right)(\alpha \cos. bt + \beta \sin. bt) + \frac{3}{5b} x^{\frac{1}{5}} (\beta \cos. bt - \alpha \sin. bt).$$

Aufgabe 120.

§. 950. Man beſtimme das vollſtändige Integrale Differenzialgleichung des zweyten Grades:

$$d^2y + c^2 x^{\frac{-4k}{2k-1}} y\,dx^2 = 0,$$

bey k eine beliebige ganze Zahl bezeichnet.

Auflöſung.

Sey Kürze halber $t = -(2k-1)\, x^{\frac{-1}{2k-1}}$, ſo wird

$$x^{\frac{1}{2k-1}} = -\left(\frac{2k-1}{t}\right),$$

wenn man $y = e^{\alpha t} z$ ſetzt, und den Werth von z durch eine he darſtellt:

$$= A x^{\frac{k}{2k-1}} + B x^{\frac{k+1}{2k-1}} + C x^{\frac{k+2}{2k-1}} + D x^{\frac{k+3}{2k-1}} + \ldots$$

ſich wegen $\lambda = \frac{+k}{2k-1}$ dieſe Coefficienten auf folgende Art immen:

$$= \frac{k(k-1)A}{2(2k-1)c};\quad C = \frac{(k+1)(k-2)B}{4(2k-1)c};\quad D = \frac{(k+2)(k-3)C}{6(2k-1)c} \ldots;$$

ſtituirt man dieſe Werthe, und führt den Werth

$$x^{\frac{1}{2k-1}} = -\left(\frac{2k-1}{t}\right)$$

die Rechnung ein, ſo erhält man

$$= A x^{\frac{k}{2k-1}} \left[1 - \frac{k(k-1)}{2ct} + \frac{k(k^2-1)(k-2)}{2.4\,c^2t^2} - \frac{k(k^2-1)(k^2-4)(k-3)}{2.4\,6.c^3t^3} + \ldots\right],$$

oder auch

$$z = \frac{A}{t^k}\left[1 - \frac{k(k-1)}{2ct} + \frac{k(k^2-1)(k-2)}{2.4.c^2t^2} - \frac{k(k^2-1)(k^2-4)(k-3)}{2.4.6.c^3t^3} + \ldots\right].$$

Es wird sich daher das vollständige Integrale der vorgelegten Gleichung auf folgende Art darstellen:

$$y = t^{-k}\left[1 + \frac{k(k^2-1)(k-2)}{2.4.c^2t^2} + \frac{k(k^2-1)(k^2-4)(k^2-9)(k-4)}{2.4.6.8.c^4t^4} + \ldots\right](\alpha e^{ct} + \beta e^{-ct})$$
$$- t^{-k}\left[\frac{k(k-1)}{2ct} + \frac{k(k^2-1)(k^2-4)(k-3)}{2.4.6.c^3t^3} + \ldots\right](\alpha e^{ct} - \beta e^{-ct}),$$

wo in beyden Reihen das Bildungsgesetz der einzelnen Glieder von selbst in die Augen fällt.

Zusatz 1.

§. 951. Läßt man also $t = -(2k-1)x^{\frac{-1}{2k-1}}$ seyn, so ergibt sich hieraus auch das vollständige Integrale der Gleichung

$$d^2y + b^2x^{\frac{-4k}{2k-1}}y\,dx^2 = 0;$$

dieses ist nämlich

$$y = t^{-k}\left[1 - \frac{k(k^2-1)(k-2)}{2.4.b^2t^2} + \frac{k(k^2-1)(k^2-4)(k^2-9)(k-4)}{2.4.6.8.b^4t^4} - \ldots\right](\alpha\cos.bt + \beta\sin.bt)$$
$$+ t^{-k}\left[\frac{k(k-1)}{2bt} - \frac{k(k^2-1)(k^2-4)(k-3)}{2.4.6.b^3t^3} + \frac{k(k^2-1)(k^2-4)(k^2-9)(k^2-16)(k-5)}{2.4.6.8.10.b^5t^5} - \ldots\right](\beta\cos.bt - \alpha\sin.bt)$$

Zusatz 2.

§. 952. Wenn k eine negative Zahl bezeichnet, so läßt sich diese Integration auf dieselbe Weise ausführen; denn wird

$$t = (2k+1)x^{\frac{1}{2k+1}}$$

gesetzt, so entspricht der Gleichung

$$d^2y - c^2x^{\frac{-4k}{2k+1}}y\,dx^2 = 0$$

das Integrale

$$y = t^k \left[1 + \frac{k\,(k^2-1)\,(k+2)}{2 \cdot 4 \cdot c^2 t^2} + \frac{k\,(k^2-1)\,(k^2-4)\,(k^2-9)\,(k+4)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot c^4 t^4} + \ldots \right] (\alpha e^{ct} + \beta e^{-ct})$$
$$- t^k \left[\frac{k\,(k+1)}{2ct} + \frac{k\,(k^2-1)\,(k^2-4)\,(k+3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot c^3 t^3} + \frac{k\,(k^2-1)\,(k^2-4)\,(k^2-9)\,(k^2-16)\,(k+5)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot c^5 t^5} + \ldots \right] (\alpha e^{ct} - \beta e^{-ct}).$$

Zusatz 3.

§. 953. Auf dieselbe Art entspricht auch der Gleichung

$$d^2 y + b^2 x^{2k+2} y\,dx^2 = 0,$$

wenn $t = (2k+1)\,x^{\frac{2k+2}{2k+1}}$ gesetzt wird, als vollständiges Integrale der Ausdruck

$$y = t^k \left[1 - \frac{k\,(k^2-1)\,(k+2)}{2 \cdot 4 \cdot b^2 t^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{k\,(k^2-1)\,(k^2-4)\,(k^2-9)\,(k+4)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot b^4 t^4} - \ldots \right] (\alpha \cos. bt + \beta \sin. bt)$$
$$+ t^k \left[\frac{k\,(k+1)}{2bt} - \frac{k\,(k^2-1)\,(k^2-4)\,(k+3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot b^3 t^3} \right.$$
$$\left. + \frac{k\,(k^2-1)(k^2-4)(k^2-9)(k^2-16)(k+5)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot b^5 t^5} - \ldots \right] (\beta \cos. bt - \alpha \sin. bt).$$

Zusatz 4.

§. 954. Setzt man in den Formeln, welche Sinusse und Cosinusse enthalten

$$\alpha = C \sin. z \quad \text{und} \quad \beta = C \cos. z,$$

so reduciren sich unsere Ausdrücke so, daß

$$\alpha \cos. bt + \beta \sin. bt = C \sin. (bt + z), \quad \text{und}$$
$$\beta \cos. bt - \alpha \sin. bt = C \cos. (bt + z)$$

wird, wo nur C und z willkürliche Constanten bezeichnen, wodurch das Integrale zum vollständigen erhoben wird.

Anmerkung.

§. 955. Wir finden hierin ein vortreffliches Mittel, die Fälle, in welchen die Differenzialgleichung des ersten Grades:

$$du + u^2 dx + ax^n dx = 0,$$

den Charakter der Integrabilität beſitzt, zu erkennen, und zugleich die vollſtändigen Integralien zu beſtimmen. Denn wird $y = e^{\int u\,dx}$ geſetzt, ſo entſteht aus jener Gleichung folgende:

$$d^2y + ax^n y\,dx^2 = 0,$$

und aus dieſer entſteht umgekehrt jene, wenn man $u = \frac{dy}{y\,dx}$ ſetzt. Da wir nun das Integrale dieſer Gleichung in jenen Fällen beſtimmen könnten, in welchen der Exponent $n = \frac{-4k}{2k \pm 1}$ iſt, ſo werden wir auch in eben dieſen Fällen das Integrale der Differenzialgleichung des erſten Grades angeben können, wo jedoch zwey Fälle entwickelt werden müſſen, je nachdem nämlich a entweder eine negative oder eine poſitive Zahl bezeichnet; je nachdem nämlich entweder $a = -c^2$ oder $a = +b^2$ iſt. Es wird ſich alſo der Mühe lohnen, dieſe beyden Fälle behandelt zu haben.

Aufgabe 121.

§. 956. Man beſtimme das Integrale folgender Gleichung:

$$du + u^2\,dx - c^2 x^{\frac{-4k}{2k+1}} dx = 0,$$

wobey k eine beliebige ganze poſitive oder negative Zahl bezeichnet.

Auflöſung.

Wird $u = \frac{dy}{y\,dx}$ geſetzt, ſo verwandelt ſich unſere Gleichung in folgende:

$$d^2y - c^2 x^{\frac{-4k}{2k+1}} y\,dx^2 = 0,$$

wobey das Element dx conſtant genommen iſt, und wovon wir das Integrale ſchon angegeben haben. Wird nämlich $t = (2k+1)x^{\frac{1}{2k+1}}$ geſetzt, ſo erhält man

$$y = (\alpha e^{ct} + \beta e^{-ct})\left[t^k + \frac{k(k^2-1)(k+2)}{2\cdot 4\cdot c^2} t^{k-2} + \frac{k(k^2-1)(k^2-4)(k^2-9)(k+4)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot c^4} t^{k-4} + \ldots\right]$$
$$- (\alpha e^{ct} - \beta e^{-ct})\left[\frac{k(k+1)}{2c} t^{k-1} + \frac{k(k^2-1)(k^2-4)(k+3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot c^3} t^{k-3} + \frac{k(k^2-1)(k^2-4)(k^2-9)(k^2-16)(k+5)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot c^5} t^{k-5} - \ldots\right].$$

Setzen wir nun Kürze halber

$$y = (\alpha e^{ct} + \beta e^{-ct})\,P - (\alpha e^{ct} - \beta e^{-ct})\,Q,$$

ſo wird, da

$$dt = x^{\frac{-2k}{2k+1}} dx \quad \text{oder} \quad dx = x^{\frac{2k}{2k+1}} dt \text{ iſt,}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\alpha e^{ct} + \beta e^{-ct})(dP - cQ\,dt) + (\alpha e^{ct} - \beta e^{-ct})(cP\,dt - dQ)}{x^{\frac{2k}{2k+1}} dt}$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha e^{ct}(dP + cP\,dt - dQ - cQ\,dt) + \beta e^{-ct}(dP - cP\,dt + dQ - cQ\,dt)}{x^{\frac{2k}{2k+1}} dt}.$$

Nun iſt aber

$$\frac{dP}{dt} = k\,t^{k-1} + \frac{k'(k^2-1)\,(k^2-4)}{2\,.\,4\,.\,c^2}\,t^{k-3} + \frac{k\,(k^2-1)\,(k^2-4)\,(k^2-9)\,(k^2-16)}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8\,.\,c^4}\,t^{k-5} + \ldots$$

$$cQ = \frac{k\,(k+1)}{2}\,t^{k-1} + \frac{k\,(k^2-1)\,(k^2-4)\,(k+3)}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,c^2}\,t^{k-3} + \frac{k\,(k^2-1)\,(k^2-4)\,(k^2-9)\,(k^2-16)\,(k+5)}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8\,.\,10\,.\,c^4}\,t^{k-5} + \ldots$$

$$cP = ct^k + \frac{k\,(k^2-1)\,(k+2)}{2\,.\,4\,.\,c}\,t^{k-2} + \frac{k\,(k^2-1)\,(k^2-4)\,(k^2-9)\,(k+4)}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8\,.\,c^3}\,t^{k-4} + \ldots$$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{k\,(k^2-1)}{2c}\,t^{k-2} + \frac{k\,(k^2-1)\,(k^2-4)\,(k^2-9)}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,c^3}\,t^{k-4} + \ldots,$$

und hieraus folgern wir:

$$\frac{dP - cQ\,dt}{dt} = \frac{-k\,(k-1)}{2}\,t^{k-1} - \frac{k\,(k^2-1)\,(k^2-4)\,(k-3)}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,c^2}\,t^{k-3} - \frac{k\,(k^2-1)\,(k^2-4)\,(k^2-9)\,(k^2-16)\,(k-5)}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8\,.\,10\,.\,c^4}\,t^{k-5} - \ldots,$$

$$\frac{cP\,dt - dQ}{dt} = ct^k + \frac{k\,(k^2-1)\,(k-2)}{2\,.\,4\,.\,c}\,t^{k-2} + \frac{k\,(k^2-1)\,(k^2-4)\,(k^2-9)\,(k-4)}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8\,.\,c^3}\,t^{k-4} + \ldots$$

Um nun die Rechnung abzukürzen, ſetzen wir

$$P = t^k + \frac{k\,(k^2-1)\,(k+2)}{2\,.\,4\,.\,c^2}\,t^{k-2} + \frac{k\,(k^2-1)\,(k^2-4)\,(k^2-9)\,(k+4)}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8\,.\,c^4}\,t^{k-4} + \ldots$$

$$Q = \frac{k(k+1)}{2c}t^{k-1} + \frac{k(k^2-1)(k^2-4)(k+3)}{2\cdot4\cdot6\cdot c^3}t^{k-3}$$
$$+ \frac{k(k^2-1)(k^2-4)(k^2-9)(k^2-16)(k+5)}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10\cdot c^5}t^{k-5} + \ldots$$

$$R = t^k + \frac{k(k^2-1)(k-2)}{2\cdot4\cdot c^2}t^{k-2}$$
$$+ \frac{k(k^2-1)(k^2-4)(k^2-9)(k-4)}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot c^4}t^{k-4} + \ldots$$

$$S = \frac{k(k-1)}{2c}t^{k-1} + \frac{k(k^2-1)(k^2-4)(k-3)}{2\cdot4\cdot6\cdot c^3}t^{k-3}$$
$$+ \frac{k(k^2-1)(k^2-4)(k^2-9)(k^2-16)(k-5)}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10\cdot c^5}t^{k-5} + \ldots$$

so daß

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\alpha e^{ct} + \beta e^{-ct})(-cS) + (\alpha e^{ct} - \beta e^{-ct})(cR)}{x^{\frac{2k}{2k+1}}}$$

wird. Da nun $u = \frac{dy}{y\,dx}$ iſt, ſo iſt das vollſtändige Integrale unſ
rer Gleichung

$$\frac{1}{c}x^{\frac{2k}{2k+1}}u = \frac{(\alpha e^{ct} - \beta e^{-ct})R - (\alpha e^{ct} + \beta e^{-ct})S}{(\alpha e^{ct} + \beta e^{-ct})P - (\alpha e^{ct} - \beta e^{-ct})Q},$$ od

$$\frac{1}{c}x^{\frac{2k}{2k+1}}u = \frac{\alpha e^{ct}(R-S) - \beta e^{-ct}(R+S)}{\alpha e^{ct}(P-Q) + \beta e^{-ct}(P+Q)},$$

und weil das Verhältniß der Conſtanten $\alpha:\beta$ willkürlich iſt, ſo iſt di
ſes Integrale das vollſtändige.

Zuſatz 1.

§. 957. Die vier Formeln für P, Q, R, S, welche in jen
Fällen, in welchen k eine ganze Zahl bezeichnet, abbrechen, hänge
ſo von einander ab, daß man zuerſt

$$R = P - \frac{dQ}{c\,dt}, \text{ und } S = Q - \frac{dP}{c\,dt}; \text{ dann ab}$$

$$dP + dR = \frac{+2kR\,dt}{t} \text{ und } dQ + dS = \frac{2kS\,dt}{t}$$

erhält.

Zuſatz 2.

§. 958. Wird alſo entweder $\alpha = 0$ oder $\beta = 0$ geſetzt, l
laſſen ſich particuläre Integralien von der Gleichung

$$du + u^2 dx - c^2 x^{\frac{-4k}{2k+1}} dx = o$$

i einer algebraiſchen Form darſtellen. Dieſe particulären Integralien nd nämlich:

$$\frac{1}{c} x^{\frac{2k}{2k+1}} u = \frac{R-S}{P-Q} \text{ und } \frac{1}{c} x^{\frac{2k}{2k+1}} u = \frac{-S-R}{P+Q};$$

ieſe kann man in folgendem Ausdrucke zuſammenfaſſen:

$$\frac{1}{c} x^{\frac{2k}{2k+1}} u = \frac{-S \pm R}{P \mp Q}.$$

Anmerkung 1.

§. 959. Für die verſchiedenen Werthe der Zahl k ergibt ſich ſowohl die Größe t, als auch die Größen P, Q, R, S, auf folgende Weiſe: es wird nämlich erſtens für $k = o$, $t = x$, $P = 1$, $Q = o$, $= 1$ und $S = o$, die übrigen Fälle wollen wir in folgender Tafel ſammenſtellen:

$k = -1;\quad t = -\frac{1}{x}$	$k = 1;\quad t = 3x^{\frac{1}{3}}$
$P = \frac{1}{t};\quad Q = o$	$P = t;\quad Q = \frac{1}{c}$
$R = \frac{1}{t};\quad S = \frac{1}{c\,t^2}$	$R = t;\quad S = o$
$= -2;\quad t = -\frac{3}{x^{\frac{1}{3}}}$	$k = 2;\quad t = 5x^{\frac{1}{5}}$
$= \frac{1}{t^2};\quad Q = \frac{1}{c\,t^3}$	$P = t^2 + \frac{3}{c^2};\quad Q = \frac{3}{c}\,t$
$= \frac{1}{t^2} + \frac{3}{c^2\,t^4};\quad S = \frac{3}{c\,t^3}$	$R = t^2;\quad S = \frac{1}{c}\,t$
$k = -3;\quad t = \frac{-5}{x^{\frac{1}{5}}}$	$k = 3;\quad t = 7x^{\frac{1}{7}}$
$P = \frac{1}{t^3} + \frac{1 \cdot 3}{c^2\,t^5}$	$P = t^3 + \frac{3 \cdot 5}{c^2}\,t$
$Q = \frac{3}{c\,t^4}$	$Q = \frac{6}{c}\,t^2 + \frac{3 \cdot 5}{c^3}$
$R = \frac{1}{t^3} + \frac{3 \cdot 5}{c^2\,t^5}$	$R = t^3 + \frac{1 \cdot 3}{c^2}\,t$
$S = \frac{6}{c\,t^4} + \frac{3 \cdot 5}{c^3\,t^6}$	$S = \frac{3}{c}\,t^2$

$k = -4;\quad t = \frac{-7}{x^{\frac{1}{7}}}$

$P = \frac{1}{t^4} + \frac{3.5}{c^2 t^6}$

$Q = \frac{6}{c t^5} + \frac{3.5}{c^3 t^7}$

$R = \frac{1}{t^4} + \frac{3.3.5}{c^2 t^6} + \frac{3.5.7}{c^4 t^8}$

$S = \frac{10}{c t^5} + \frac{3.5.7}{c^3 t^7}$

$k = 4;\quad t = 9x^{\frac{1}{9}}$

$P = t^4 + \frac{3.3.5}{c^2} t^2 + \frac{3.5.7}{c^4}$

$Q = \frac{10}{c} t^3 + \frac{3.5.7}{c^3} t$

$R = t^4 + \frac{3.5}{c^2} t^2$

$S = \frac{6}{c} t^3 + \frac{3.5}{c^3} t$

$k = -5;\quad t = \frac{-9}{x^{\frac{1}{9}}}$

$P = \frac{1}{t^5} + \frac{3.3.5}{c^2 t^7} + \frac{3.5.7}{c^4 t^9}$

$Q = \frac{10}{c t^6} + \frac{3.5.7}{c^3 t^8}$

$R = \frac{1}{t^5} + \frac{3.5.7}{c^2 t^7} + \frac{3.5.7.9}{c^4 t^9}$

$S = \frac{15}{c t^6} + \frac{4.3.5.7}{c^3 t^8} + \frac{3.5.7.9}{c^5 t^{10}}$

$k = 5;\quad t = 11x^{\frac{1}{11}}$

$P = t^5 + \frac{3.5.7}{c^2} t^3 + \frac{3.5.7.9}{c^4} t$

$Q = \frac{15}{c} t^4 + \frac{4.3.5.7}{c^3} t^2 + \frac{3.5.7.9}{c^5}$

$R = t^5 + \frac{3.3.5}{c^2} t^3 + \frac{3.5.7}{c^4} t$

$S = \frac{10}{c} t^4 + \frac{3.5.7}{c^3} t^2$

$k = -6;\quad t = \frac{-11}{x^{\frac{1}{11}}}$

$P = \frac{1}{t^6} + \frac{3.5.7}{c^2 t^8} + \frac{3.5.7.9}{c^4 t^{10}}$

$Q = \frac{15}{c t^7} + \frac{4.3.5.7}{c^3 t^9} + \frac{3.5.7.9}{c^5 t^{11}}$

$R = \frac{1}{t^6} + \frac{2.3.5.7}{c^2 t^8} + \frac{5.3.5.7.9}{c^4 t^{10}} + \frac{3.5.7.9.11}{c^6 t^{12}}$

$S = \frac{21}{c t^7} + \frac{4.5.7.9}{c^3 t^9} + \frac{3.5.7.9.11}{c^5 t^{11}}$

$k = 6;\quad t = 13x^{\frac{1}{13}}$

$P = t^6 + \frac{2.3.5.7}{c^2} t^4 + \frac{5.3.5.7.9}{c^4} t^2 + \frac{3.5.7.9.11}{c^6}$

$Q = \frac{21}{c} t^5 + \frac{4.5.7.9}{c^3} t^3 + \frac{3.5.7.9.11}{c^4} t$

$R = t^6 + \frac{3.5.7}{c^2} t^4 + \frac{3.5.7.9}{c^4} t^2$

$S = \frac{15}{c} t^5 + \frac{4.3.5.7}{c^3} t^3 + \frac{3.5.7.9}{c^5} t.$

Anmerkung 2.

§. 960. Wenn man diese Formeln näher untersucht, so ergibt sich eine neue Relation zwischen den Werthen der Größen P, Q, R, S, welche darin besteht, daß stets $PR - QS = t^{2k}$ ist, auf welche Wahrheit man zwar zuerst durch Induction geleitet wird, dann aber läßt sie sich auch durch die oben entwickelten Relationen beweisen. Denn wenn man die Werthe

$$R = P - \frac{dQ}{cdt} \quad \text{und} \quad S = Q - \frac{dP}{cdt}$$

in den Gleichungen

$$dP + dR = \frac{2kRdt}{t} \quad \text{und} \quad dQ + dS = \frac{2kSdt}{t}$$

substituirt, so erhält man folgende Gleichungen:

$$2dP - \frac{d^2Q}{cdt} = \frac{2kPdt}{t} - \frac{2kdQ}{ct} \quad \text{und}$$

$$2dQ - \frac{d^2P}{cdt} = \frac{2kQdt}{t} - \frac{2kdP}{ct}.$$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen durch P, die letztere aber durch $-Q$, und addirt sie dann, so erhält man:

$$2PdP - 2QdQ + \frac{Qd^2P - Pd^2Q}{cdt} = \frac{2kdt}{t}(P^2 - Q^2) + \frac{2k}{ct}(QdP - PdQ).$$

Nun setze man

$$P^2 - Q^2 = M \quad \text{und} \quad \frac{QdP - PdQ}{cdt} = N,$$

so findet man

$$dM + dN = \frac{2kdt}{t}(M + N) \quad \text{oder} \quad \frac{dM + dN}{M + N} = \frac{2kdt}{t},$$

und daher durch Integration

$$M + N = Ct^{2k}.$$

Es ist aber

$$M + N = P\left[P - \frac{dQ}{cdt}\right] - Q\left[Q - \frac{dP}{cdt}\right] = PR - QS,$$

übrigens ist einleuchtend, daß man für die Constante C die Einheit nehmen müsse.

Aufgabe 122.

§. 961. Man bestimme das vollständige Integrale der Gleichung

$$d^2y + b^2x^{-\frac{4}{3}}y\,dx^2 = o$$

folgendes Integrale:

$$y = (\alpha \cos. bt + \beta \sin. bt)\,x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3b}(\beta \cos. bt - \alpha \sin. bt).$$

Beyspiel 4.

§. 948. Man suche das Integrale folgender Gleichung:

$$d^2y - c^2x^{-\frac{8}{3}}y\,dx^2 = o.$$

Wegen $\lambda = \frac{2}{3}$ wird $B = \frac{A}{3c}$ und $z = Ax^{\frac{2}{3}} + \frac{A}{3c} \cdot x$, so daß $P = x^{\frac{2}{3}}$ und $Q = \frac{-x}{3c^2}$ wird. Setzt man demnach

$$t = -3x^{-\frac{1}{3}},$$

so stellt sich das Integrale unter folgender Form dar:

$$y = x^{\frac{2}{3}}(\alpha e^{ct} + \beta e^{-ct}) + \frac{x}{3c}(\alpha e^{ct} - \beta e^{-ct}).$$

Ist aber $c^2 = -b^2$, so wird man für die Gleichung

$$d^2y + b^2x^{-\frac{8}{3}}y\,dx^2 = o$$

folgendes Integrale erhalten:

$$y = x^{\frac{2}{3}}(\alpha \cos. bt + \beta \sin. bt) - \frac{x}{3b}(\beta \cos. bt - \alpha \sin. bt).$$

Beyspiel 5.

§. 949. Das Integrale der Gleichung

$$d^2y - c^2x^{-\frac{8}{5}}y\,dx^2 = o$$

zu bestimmen.

Wegen $\lambda = \frac{2}{5}$ ist $B = \frac{-3A}{5c}$ und $C = \frac{+3A}{5^2c^2}$, also

$$z = Ax^{\frac{2}{5}} - \frac{3A}{5c}x^{\frac{1}{5}} + \frac{3A}{5^2c^2}, \text{ und demnach}$$

$$P = x^{\frac{2}{5}} + \frac{3}{5^2c^2} \text{ und } Q = \frac{3}{5c^2}x^{\frac{1}{5}}.$$

Wird nun $t = 5x^{\frac{1}{5}}$ gesetzt, so erhält man das Integrale

$$y = \left(x^{\frac{2}{5}} + \frac{3}{5^2c^2}\right)(\alpha e^{ct} + \beta e^{-ct}) - \frac{3}{5c}x^{\frac{1}{5}}(\alpha e^{ct} - \beta e^{-ct}).$$

Iſt aber $c^2 = -b^2$, ſo entſpricht der Gleichung

$$d^2y + b^2 x^{-\frac{8}{5}} y\,dx^2 = 0$$

gendes Integrale:

$$= \left(x^{\frac{3}{5}} - \frac{3}{5^2 b^2}\right)(\alpha \cos. bt + \beta \sin. bt) + \frac{3}{5b} x^{\frac{1}{5}} (\beta \cos. bt - \alpha \sin. bt).$$

Aufgabe 120.

§. 950. Man beſtimme das vollſtändige Integrale r Differenzialgleichung des zweyten Grades:

$$d^2y + c^2 x^{\frac{-4k}{2k-1}} y\,dx^2 = 0,$$

obey k eine beliebige ganze Zahl bezeichnet.

Auflöſung.

Sey Kürze halber $t = -(2k-1)\, x^{\frac{-1}{2k-1}}$, ſo wird

$$x^{\frac{1}{2k-1}} = -\left(\frac{2k-1}{t}\right),$$

d wenn man $y = e^{\alpha t} z$ ſetzt, und den Werth von z durch eine ihe darſtellt:

$$= A x^{\frac{k}{2k-1}} + B x^{\frac{k+1}{2k-1}} + C x^{\frac{k+2}{2k-1}} + D x^{\frac{k+3}{2k-1}} + \ldots$$

ſich wegen $\lambda = \frac{+k}{2k-1}$ dieſe Coefficienten auf folgende Art ſtimmen:

$$= \frac{k(k-1)A}{2(2k-1)c};\quad C = \frac{(k+1)(k-2)B}{4(2k-1)c};\quad D = \frac{(k+2)(k-3)C}{6(2k-1)c} \ldots;$$

bſtituirt man dieſe Werthe, und führt den Werth

$$x^{\frac{1}{2k-1}} = -\left(\frac{2k-1}{t}\right)$$

die Rechnung ein, ſo erhält man

$$= A x^{\frac{k}{2k-1}} \left[1 - \frac{k(k-1)}{2ct} + \frac{k(k^2-1)(k-2)}{2.4\,c^2 t^2} - \frac{k(k^2-1)(k^2-4)(k-3)}{2.4\,6.c^3 t^3} + \ldots\right],$$

oder auch

$$z = \frac{A}{t^k}\left[1 - \frac{k(k-1)}{2ct} + \frac{k(k^2-1)(k-2)}{2.4.c^2t^2} - \frac{k(k^2-1)(k^2-4)(k-3)}{2.4.6.c^3t^3} + \ldots\right.$$

Es wird ſich daher das vollſtändige Integrale der vorgel Gleichung auf folgende Art darſtellen:

$$y = t^{-k}\left[1 + \frac{k(k^2-1)(k-2)}{2.4.c^2t^2} + \frac{k(k^2-1)(k^2-4)(k^2-9)(k-4)}{2.4.6.8.c^4t^4} + \ldots\right](\alpha e^{ct} + \beta e^{-}$$

$$- t^{-k}\left[\frac{k(k-1)}{2ct} + \frac{k(k^2-1)(k^2-4)(k-3)}{2.4.6.c^3t^3} + \ldots\right](\alpha e^{ct} - \beta e^{-}$$

wo in beyden Reihen das Bildungsgeſetz der einzelnen Glieder ſelbſt in die Augen fällt.

Zuſatz 1.

§. 951. Läßt man alſo $t = -(2k-1)\,x^{\frac{-1}{2k-1}}$ ſeyn, ſ gibt ſich hieraus auch das vollſtändige Integrale der Gleichung

$$d^2y + b^2 x^{\frac{-4k}{2k-1}} y\,dx^2 = 0;$$

dieſes iſt nämlich

$$y = t^{-k}\left[1 - \frac{k(k^2-1)(k-2)}{2.4.b^2t^2} + \right.$$

$$+ \frac{k(k^2-1)(k^2-4)(k^2-9)(k-4)}{2.4.6.8.b^4t^4} - \ldots\Big](\alpha\cos.bt + \beta\sin.$$

$$+ t^{-k}\left[\frac{k(k-1)}{2bt} - \frac{k(k^2-1)(k^2-4)(k-3)}{2.4.6.b^3t^3}\right.$$

$$+ \frac{k(k^2-1)(k^2-4)(k^2-9)(k^2-16)(k-5)}{2.4.6.8.10.b^5t^5} - \ldots\Big](\beta\cos.bt - \alpha\sin.$$

Zuſatz 2.

§. 952. Wenn k eine negative Zahl bezeichnet, ſo läßt ſich Integration auf dieſelbe Weiſe ausführen; denn wird

$$t = (2k+1)\,x^{\frac{1}{2k+1}}$$

geſetzt, ſo entſpricht der Gleichung

$$d^2y - c^2 x^{\frac{-4k}{2k+1}} y\,dx^2 = 0$$

das Integrale

$$y = t^k \left[1 + \frac{k\,(k^2-1)\,(k+2)}{2 \cdot 4 \cdot c^2 t^2} + \frac{k\,(k^2-1)\,(k^2-4)\,(k^2-9)\,(k+4)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot c^4 t^4} + \ldots \right] (\alpha e^{ct} + \beta e^{-ct})$$
$$- t^k \left[\frac{k\,(k+1)}{2ct} + \frac{k\,(k^2-1)\,(k^2-4)\,(k+3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot c^3 t^3} + \frac{k\,(k^2-1)\,(k^2-4)\,(k^2-9)\,(k^2-16)\,(k+5)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot c^5 t^5} + \ldots \right] (\alpha e^{ct} - \beta e^{-ct}).$$

Zuſatz 3.

§. 953. Auf dieſelbe Art entſpricht auch der Gleichung

$$d^2 y + b^2 x^{2k+2} y\,dx^2 = 0,$$

wenn $t = (2k+1)\,x^{k+1}$ geſetzt wird, als vollſtändiges Integrale der Ausdruck

$$y = t^k \left[1 - \frac{k\,(k^2-1)\,(k+2)}{2 \cdot 4 \cdot b^2 t^2} + \frac{k\,(k^2-1)\,(k^2-4)\,(k^2-9)\,(k+4)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot b^4 t^4} - \ldots \right] (\alpha \cos. bt + \beta \sin. bt)$$
$$+ t^k \left[\frac{k\,(k+1)}{2bt} - \frac{k\,(k^2-1)\,(k^2-4)\,(k+3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot b^3 t^3} + \frac{k\,(k^2-1)\,(k^2-4)\,(k^2-9)\,(k^2-16)\,(k+5)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot b^5 t^5} - \ldots \right] (\beta \cos. bt - \alpha \sin. bt).$$

Zuſatz 4.

§. 954. Setzt man in den Formeln, welche Sinuſſe und Coſinuſſe enthalten

$$\alpha = C \sin. z \quad \text{und} \quad \beta = C \cos. z,$$

ſo reduciren ſich unſere Ausdrücke ſo, daß

$$\alpha \cos. bt + \beta \sin. bt = C \sin. (bt + z), \quad \text{und}$$
$$\beta \cos. bt - \alpha \sin. bt = C \cos. (bt + z)$$

wird, wo nur C und z willkürliche Conſtanten bezeichnen, wodurch das Integrale zum vollſtändigen erhoben wird.

Anmerkung.

§. 955. Wir finden hierin ein vortreffliches Mittel, die Fälle, welchen die Differenzialgleichung des erſten Grades:

$$du + u^2 dx + ax^n dx = 0,$$

den Charakter der Integrabilität beſitzt, zu erkennen, und zugleich die vollſtändigen Integralien zu beſtimmen. Denn wird $y = e^{\int u\,dx}$ geſetzt, ſo entſteht aus jener Gleichung folgende:

$$d^2y + ax^n y\,dx^2 = 0,$$

und aus dieſer entſteht umgekehrt jene, wenn man $u = \frac{dy}{y\,dx}$ ſetzt. Da wir nun das Integrale dieſer Gleichung in jenen Fällen beſtimmen könnten, in welchen der Exponent $n = \frac{-4k}{2k \pm 1}$ iſt, ſo werden wir auch in eben dieſen Fällen das Integrale der Differenzialgleichung des erſten Grades angeben können, wo jedoch zwey Fälle entwickelt werden müſſen, je nachdem nämlich a entweder eine negative oder eine poſitive Zahl bezeichnet; je nachdem nämlich entweder $a = -c^2$ oder $a = +b^2$ iſt. Es wird ſich alſo der Mühe lohnen, dieſe beyden Fälle behandelt zu haben.

Aufgabe 121.

§. 956. Man beſtimme das Integrale folgender Gleichung:

$$du + u^2\,dx - c^2 x^{\frac{-4k}{2k+1}} dx = 0,$$

wobey k eine beliebige ganze poſitive oder negative Zahl bezeichnet.

Auflöſung.

Wird $u = \frac{dy}{y\,dx}$ geſetzt, ſo verwandelt ſich unſere Gleichung in folgende:

$$d^2y - c^2 x^{\frac{-4k}{2k+1}} y\,dx^2 = 0,$$

wobey das Element dx conſtant genommen iſt, und wovon wir das Integrale ſchon angegeben haben. Wird nämlich $t = (2k+1)x^{\frac{1}{2k+1}}$ geſetzt, ſo erhält man

$$y = (\alpha e^{ct} + \beta e^{-ct})\left[t^k + \frac{k(k^2-1)(k+2)}{2\cdot 4\cdot c^2} t^{k-2}\right.$$
$$\left. + \frac{k(k^2-1)(k^2-4)(k^2-9)(k+4)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot c^4} t^{k-4} + \ldots\right]$$
$$- (\alpha e^{ct} - \beta e^{-ct})\left[\frac{k(k+1)}{2c} t^{k-1} + \frac{k(k^2-1)(k^2-4)(k+3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot c^3} t^{k-3}\right.$$
$$\left. + \frac{k(k^2-1)(k^2-4)(k^2-9)(k^2-16)(k+5)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot c^5} t^{k-5} - \ldots\right].$$

Setzen wir nun Kürze halber

$$y = (\alpha e^{ct} + \beta e^{-ct})\,P - (\alpha e^{ct} - \beta e^{-ct})\,Q,$$

so wird, da

$$dt = x^{\frac{-2k}{2k+1}} dx \quad \text{oder} \quad dx = x^{\frac{2k}{2k+1}} dt \text{ iſt,}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\alpha e^{ct} + \beta e^{-ct})(dP - cQ\,dt) + (\alpha e^{ct} - \beta e^{-ct})(cP\,dt - dQ)}{x^{\frac{2k}{2k+1}} dt}$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha e^{ct}(dP + cP dt - dQ - cQ dt) + \beta e^{-ct}(dP - cP dt + dQ - cQ\,dt)}{x^{\frac{2k}{2k+1}} dt}.$$

Nun iſt aber

$$\frac{dP}{dt} = k\,t^{k-1} + \frac{k(k^2-1)(k^2-4)}{2\cdot 4\cdot c^2}\,t^{k-3} + \frac{k(k^2-1)(k^2-4)(k^2-9)(k^2-16)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot c^4}\,t^{k-5} + \ldots$$

$$cQ = \frac{k(k+1)}{2}\,t^{k-1} + \frac{k(k^2-1)(k^2-4)(k+3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot c^2}\,t^{k-3} + \frac{k(k^2-1)(k^2-4)(k^2-9)(k^2-16)(k+5)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot c^4}\,t^{k-5} + \ldots$$

$$cP = c\,t^k + \frac{k(k^2-1)(k+2)}{2\cdot 4\cdot c}\,t^{k-2} + \frac{k(k^2-1)(k^2-4)(k^2-9)(k+4)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot c^3}\,t^{k-4} + \ldots$$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{k(k^2-1)}{2c}\,t^{k-2} + \frac{k(k^2-1)(k^2-4)(k^2-9)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot c^3}\,t^{k-4} + \ldots,$$

und hieraus folgern wir:

$$\frac{dP - cQ\,dt}{dt} = \frac{-k(k-1)}{2}\,t^{k-1} - \frac{k(k^2-1)(k^2-4)(k-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot c^2}\,t^{k-3} - \frac{k(k^2-1)(k^2-4)(k^2-9)(k^2-16)(k-5)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot c^4}\,t^{k-5} - \ldots,$$

$$\frac{cP\,dt - dQ}{dt} = c\,t^k + \frac{k(k^2-1)(k-2)}{2\cdot 4\cdot c}\,t^{k-2} + \frac{k(k^2-1)(k^2-4)(k^2-9)(k-4)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot c^3}\,t^{k-4} + \ldots$$

Um nun die Rechnung abzukürzen, ſetzen wir

$$P = t^k + \frac{k(k^2-1)(k+2)}{2\cdot 4\cdot c^2}\,t^{k-2} + \frac{k(k^2-1)(k^2-4)(k^2-9)(k+4)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot c^4}\,t^{k-4} + \ldots$$

$$Q = \frac{k(k+1)}{2c}t^{k-1} + \frac{k(k^2-1)(k^2-4)(k+3)}{2\cdot4\cdot6\cdot c^3}t^{k-3}$$
$$+ \frac{k(k^2-1)(k^2-4)(k^2-9)(k^2-16)(k+5)}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10\cdot c^5}t^{k-5} + \ldots$$

$$R = t^k + \frac{k(k^2-1)(k-2)}{2\cdot4\cdot c^2}t^{k-2}$$
$$+ \frac{k(k^2-1)(k^2-4)(k^2-9)(k-4)}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot c^4}t^{k-4} + \ldots$$

$$S = \frac{k(k-1)}{2c}t^{k-1} + \frac{k(k^2-1)(k^2-4)(k-3)}{2\cdot4\cdot6\cdot c^3}t^{k-3}$$
$$+ \frac{k(k^2-1)(k^2-4)(k^2-9)(k^2-16)(k-5)}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10\cdot c^5}t^{k-5} + \ldots,$$

so daß

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\alpha e^{ct} + \beta e^{-ct})(-cS) + (\alpha e^{ct} - \beta e^{-ct})(cR)}{x^{\frac{2k}{2k+1}}}$$

wird. Da nun $u = \frac{dy}{y\,dx}$ iſt, ſo iſt das vollſtändige Integrale unſerer Gleichung

$$\frac{1}{c}x^{\frac{2k}{2k+1}}u = \frac{(\alpha e^{ct} - \beta e^{-ct})R - (\alpha e^{ct} + \beta e^{-ct})S}{(\alpha e^{ct} + \beta e^{-ct})P - (\alpha e^{ct} - \beta e^{-ct})Q}, \text{ oder}$$

$$\frac{1}{c}x^{\frac{2k}{2k+1}}u = \frac{\alpha e^{ct}(R-S) - \beta e^{-ct}(R+S)}{\alpha e^{ct}(P-Q) + \beta e^{-ct}(P+Q)},$$

und weil das Verhältniß der Conſtanten $\alpha : \beta$ willkürlich iſt, ſo iſt dieſes Integrale das vollſtändige.

Zuſatz 1.

§. 957. Die vier Formeln für P, Q, R, S, welche in jenen Fällen, in welchen k eine ganze Zahl bezeichnet, abbrechen, hängen ſo von einander ab, daß man zuerſt

$$R = P - \frac{dQ}{c\,dt}, \text{ und } S = Q - \frac{dP}{c\,dt}; \text{ dann aber}$$

$$dP + dR = \frac{+2kR\,dt}{t} \text{ und } dQ + dS = \frac{2kS\,dt}{t}$$

erhält.

Zuſatz 2.

§. 958. Wird alſo entweder $\alpha = 0$ oder $\beta = 0$ geſetzt, ſo laſſen ſich particuläre Integralien von der Gleichung

$$du + u^2 dx - c^2 x^{\frac{-4k}{2k+1}} dx = o$$

einer algebraiſchen Form darſtellen. Dieſe particulären Integralien ind nämlich:

$$\frac{1}{c} x^{\frac{2k}{2k+1}} u = \frac{R-S}{P-Q} \quad \text{und} \quad \frac{1}{c} x^{\frac{2k}{2k+1}} u = \frac{-S-R}{P+Q};$$

eſe kann man in folgendem Ausdrucke zuſammenfaſſen:

$$\frac{1}{c} x^{\frac{2k}{2k+1}} u = \frac{-S \pm R}{P \mp Q}.$$

Anmerkung 1.

§. 959. Für die verſchiedenen Werthe der Zahl k ergibt ſich ſowohl die Größe t, als auch die Größen P, Q, R, S, auf folgende Weiſe: es wird nämlich erſtens für $k=o$, $t=x$, $P=1$, $Q=o$, $=1$ und $S=o$, die übrigen Fälle wollen wir in folgender Tafel ſammenſtellen:

$k=-1;\quad t=-\frac{1}{x}$	$k=1;\quad t=3x^{\frac{1}{3}}$
$P=\frac{1}{t};\quad Q=o$	$P=t;\quad Q=\frac{1}{c}$
$R=\frac{1}{t};\quad S=\frac{1}{c\,t^2}$	$R=t;\quad S=o$
$=-2;\quad t=-\frac{3}{x^{\frac{1}{3}}}$	$k=2;\quad t=5x^{\frac{1}{5}}$
$=\frac{1}{t^2};\quad Q=\frac{1}{c\,t^3}$	$P=t^2+\frac{3}{c^2};\quad Q=\frac{3}{c}t$
$=\frac{1}{t^2}+\frac{3}{c^2\,t^4};\quad S=\frac{3}{c\,t^3}$	$R=t^2;\quad S=\frac{1}{c}t$
$k=-3;\quad t=\frac{-5}{x^{\frac{1}{5}}}$	$k=3;\quad t=7x^{\frac{1}{7}}$
$P=\frac{1}{t^3}+\frac{1\cdot 3}{c^2\,t^5}$	$P=t^3+\frac{3\cdot 5}{c^2}t$
$Q=\frac{3}{c\,t^4}$	$Q=\frac{6}{c}t^2+\frac{3\cdot 5}{c^3}$
$R=\frac{1}{t^3}+\frac{3\cdot 5}{c^2\,t^5}$	$R=t^3+\frac{1\cdot 3}{c^2}t$
$S=\frac{6}{c\,t^4}+\frac{3\cdot 5}{c^3\,t^6}$	$S=\frac{3}{c}t^2$

$k = -4;\quad t = \frac{-7}{x^{\frac{1}{7}}}$

$P = \frac{1}{t^4} + \frac{3.5}{c^2 t^6}$

$Q = \frac{6}{c\,t^5} + \frac{3.5}{c^3 t^7}$

$R = \frac{1}{t^4} + \frac{3.3.5}{c^2 t^6} + \frac{3.5.7}{c^4 t^8}$

$S = \frac{10}{c\,t^5} + \frac{3.5.7}{c^3 t^7}$

$k = 4;\quad t = 9x^{\frac{1}{9}}$

$P = t^4 + \frac{3.3.5}{c^2} t^2 + \frac{3.5.9}{c^4}$

$Q = \frac{10}{c} t^3 + \frac{3.5.7}{c^3} t$

$R = t^4 + \frac{3.5}{c^2} t^2$

$S = \frac{6}{c} t^3 + \frac{3.5}{c^3} t$

$k = -5;\quad t = \frac{-9}{x^{\frac{1}{9}}}$

$P = \frac{1}{t^5} + \frac{3.3.5}{c^2 t^7} + \frac{3.5.7}{c^4 t^9}$

$Q = \frac{10}{c\,t^6} + \frac{3.5.7}{c^3 t^8}$

$R = \frac{1}{t^5} + \frac{3.5.7}{c^2 t^7} + \frac{3.5.7.9}{c^4 t^9}$

$S = \frac{15}{c\,t^6} + \frac{4.3.5.7}{c^3 t^8} + \frac{3.5.7.9}{c^5 t^{10}}$

$k = 5;\quad t = 11x^{\frac{1}{11}}$

$P = t^5 + \frac{3.5.7}{c^2} t^3 + \frac{3.5.7.9}{c^4} t$

$Q = \frac{15}{c} t^4 + \frac{4.3.5.7}{c^3} t^2 + \frac{3.5.7.9}{c^5}$

$R = t^5 + \frac{3.3.5}{c^2} t^3 + \frac{3.5.7}{c^4} t$

$S = \frac{10}{c} t^4 + \frac{3.5.7}{c^3} t^2$

$k = -6;\quad t = \frac{-11}{x^{\frac{1}{11}}}$

$P = \frac{1}{t^6} + \frac{3.5.7}{c^2 t^8} + \frac{3.5.7.9}{c^4 t^{10}}$

$Q = \frac{15}{c\,t^7} + \frac{4.3.5.7}{c^3 t^9} + \frac{3.5.7.9}{c^5 t^{11}}$

$R = \frac{1}{t^6} + \frac{2.3.5.7}{c^2 t^8} + \frac{5.3.5.7.9}{c^4 t^{10}} + \frac{3.5.7.9.11}{c^6 t^{12}}$

$S = \frac{21}{c\,t^7} + \frac{4.5.7.9}{c^3 t^9} + \frac{3.5.7.9.11}{c^5 t^{11}}$

$k = 6;\quad t = 13x^{\frac{1}{13}}$

$P = t^6 + \frac{2.3.5.7}{c^2} t^4 + \frac{5.3.5.7.9}{c^4} t^2 + \frac{3.5.7.9.11}{c^6}$

$Q = \frac{21}{c} t^5 + \frac{4.5.7.9}{c^3} t^3 + \frac{3.5.7.9.11}{c^4} t$

$R = t^6 + \frac{3.5.7}{c^2} t^4 + \frac{3.5.7.9}{c^4} t^2$

$S = \frac{15}{c} t^5 + \frac{4.3.5.7}{c^3} t^3 + \frac{3.5.7.9}{c^5} t.$

Anmerkung 2.

§. 960. Wenn man diese Formeln näher untersucht, so ergibt sich eine neue Relation zwischen den Werthen der Größen P, Q, R, S, welche darin besteht, daß stets $PR - QS = t^{2k}$ ist, auf welche Wahrheit man zwar zuerst durch Induction geleitet wird, dann aber läßt sie sich auch durch die oben entwickelten Relationen beweisen. Denn wenn man die Werthe

$$R = P - \frac{dQ}{cdt} \quad \text{und} \quad S = Q - \frac{dP}{cdt}$$

in den Gleichungen

$$dP + dR = \frac{2kRdt}{t} \quad \text{und} \quad dQ + dS = \frac{2kSdt}{t}$$

substituirt, so erhält man folgende Gleichungen:

$$2dP - \frac{d^2Q}{cdt} = \frac{2kPdt}{t} - \frac{2kdQ}{ct} \quad \text{und}$$

$$2dQ - \frac{d^2P}{cdt} = \frac{2kQdt}{t} - \frac{2kdP}{ct}.$$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen durch P, die letztere aber durch $-Q$, und addirt sie dann, so erhält man:

$$2PdP - 2QdQ + \frac{Qd^2P - Pd^2Q}{cdt} = \frac{2kdt}{t}(P^2 - Q^2) + \frac{2k}{ct}(QdP - PdQ).$$

Nun setze man

$$P^2 - Q^2 = M \quad \text{und} \quad \frac{QdP - PdQ}{cdt} = N,$$

so findet man

$$dM + dN = \frac{2kdt}{t}(M + N) \quad \text{oder} \quad \frac{dM + dN}{M + N} = \frac{2kdt}{t},$$

und daher durch Integration

$$M + N = Ct^{2k}.$$

Es ist aber

$$M + N = P\left[P - \frac{dQ}{cdt}\right] - Q\left[Q - \frac{dP}{cdt}\right] = PR - QS,$$

übrigens ist einleuchtend, daß man für die Constante C die Einheit nehmen müsse.

Aufgabe 122.

§. 961. Man bestimme das vollständige Integrale der Gleichung

$$du + u^2 dx + b^2 x^{\frac{-4k}{2k+1}} dx = 0,$$

wenn k eine beliebige ganze, poſitive oder negative Zahl bezeichnet.

Auflöſung.

Wird $u = \frac{dy}{y\,dx}$ geſetzt, ſo verwandelt ſich dieſe Gleichung in folgende:

$$d^2y + b^2 x^{\frac{-4k}{2k+1}} y\,dx^2 = 0,$$

wenn das Element dx conſtant genommen wird; das Integrale dieſer Gleichung iſt ſchon oben angegeben worden, wir haben nämlich für $t = (2k+1)\, x^{\frac{1}{2k+1}}$ oben (§. 953, 954) gefunden:

$$y = C\left[t^k - \frac{k(k^2-1)(k+2)}{2\cdot 4\cdot b^2} t^{k-2} + \frac{k(k^2-1)(k^2-4)(k^2-9)(k+4)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot b^4} t^{k-4} - \ldots\right] \sin.(bt+\zeta)$$
$$+ C\left[\frac{k(k+1)}{2b} t^{k-1} - \frac{k(k^2-1)(k^2-4)(k+3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot b^3} t^{k-3} + \ldots\right] \cos.(bt+\zeta),$$

wofür wir Kürze halber ſchreiben wollen:

$$y = CP \sin.(bt+\zeta) + CQ \cos.(bt+\zeta).$$

Weil nun

$$dt = x^{\frac{-2k}{2k+1}} dx \quad \text{oder} \quad dx = x^{\frac{2k}{2k+1}} dt$$

iſt, ſo erhält man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C(dP - bQ\,dt)\sin.(bt+\zeta) + C(dQ + bP\,dt)\cos.(bt+\zeta)}{x^{\frac{2k}{2k+1}} dt},$$

und daher, weil $u = \frac{dy}{y\,dx}$ iſt:

$$u = \frac{(dP - bQ\,dt)\sin.(bt+\zeta) + (dQ + bP\,dt)\cos.(bt+\zeta)}{x^{\frac{2k}{2k+1}} dt\,[P\sin.(bt+\zeta) + Q\cos.(bt+\zeta)]}.$$

Setzen wir nun

$$P + \frac{dQ}{b\,dt} = R \quad \text{und} \quad Q - \frac{dP}{b\,dt} = S,$$

damit man erhält

$$\frac{1}{b} x^{\frac{2k}{2k+1}} u = \frac{R\cos.(bt+\zeta) - S\sin.(bt+\zeta)}{P\sin.(bt+\zeta) + Q\cos.(bt+\zeta)},$$

so wird

$$P = t^k - \frac{k(k^2-1)(k+2)}{2\cdot 4\cdot b^2}\,t^{k-2} + \frac{k(k^2-1)(k^2-4)(k^2-9)(k+4)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot b^4}\,t^{k-4} - \ldots,$$

$$Q = \frac{k(k^2+1)}{2b}\,t^{k-1} - \frac{k(k^2-1)(k^2-4)(k+3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot b^3}\,t^{k-3} + \frac{k(k^2-1)(k^2-4)(k^2-9)(k^2-16)(k+5)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot b^5}\,t^{k-5} - \ldots,$$

$$R = t^k - \frac{k(k^2-1)(k-2)}{2\cdot 4\cdot b^2}\,t^{k-2} + \frac{k(k^2-1)(k^2-4)(k^2-9)(k-4)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot b^4}\,t^{k-4} - \ldots,$$

$$S = \frac{k(k-1)}{2b}\,t^{k-1} - \frac{k(k^2-1)(k^2-4)(k-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot b^3}\,t^{k-3} + \frac{k(k^2-1)(k^2-4)(k^2-9)(k^2-16)(k-5)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot b^5}\,t^{k-5} - \ldots,$$

und dieses Integrale ist das vollständige, weil wir den Winkel z in die Rechnung eingeführt haben.

Zusatz 1.

§. 962. Die Werthe der vier Größen P, Q, R, S hängen demnach so von einander ab, daß man zuerst

$$R = P + \frac{dQ}{b\,dt} \quad \text{und} \quad S = Q - \frac{dP}{b\,dt}$$

erhält, dann aber erhellt auch, daß

$$dP + dR = \frac{2kR\,dt}{t} \quad \text{und} \quad dQ + dS = \frac{2kS\,dt}{t}$$

seyn werde.

Zusatz 2.

§. 963. Hieraus folgert man aber auch, daß $PR + QS = t^{2k}$ seyn werde, welche Gleichung sich auch aus den Formeln der vorhergehenden Aufgabe ergibt, wenn $c^2 = -b^2$ gesetzt wird, denn dann verwandeln sich Q und S in $Q\sqrt{-1}$ und $S\sqrt{-1}$.

Zusatz 3.

§. 964. Dieser Fall unterscheidet sich von dem vorhergehenden auch dadurch, daß sich hier keine particulären Integralien in einer algebraischen Form darbieten; denn was man auch immer für einen Werth dem constanten Winkel z beylegen mag, so enthält das Integrale doch immer den Sinus und Cosinus irgend eines Winkels.

Anmerkung 1.

§. 965. Da alſo der Gleichung

$$du + u^2 dx + b^2 x^{\frac{-4k}{2k+1}} dx = 0,$$

wenn $t = (2k+1)\, x^{\frac{1}{2k+1}}$ geſetzt wird, das vollſtändige Integ

$$\frac{1}{b}\, x^{\frac{2k}{2k+1}} u = \frac{R \cos.(bt+\zeta) - S \sin.(bt+\zeta)}{P \sin.(bt+\zeta) + Q \cos.(bt+\zeta)}$$

zugehört, ſo ergeben ſich für die einzelnen Werthe der Zahl k d
the für t und P, Q, R, S auf folgende Art. Erſtlich wird für
$P=1$, $Q=0$, $R=1$ und $S=0$, und $t=x$, ſo daß man
Integrale die Gleichung

$$\frac{1}{b}\, u = \frac{\cos.(bx+\zeta)}{\sin.(bx+\zeta)}$$

erhält. Die übrigen Fälle enthält nachſtehende Tafel:

$k = -1;\quad t = -\frac{1}{x}$	$k = 1;\quad t = 3x^{\frac{1}{3}}$
$P = \frac{1}{t};\quad Q = 0$	$P = t;\quad Q = \frac{1}{b}$
$R = \frac{1}{t};\quad S = \frac{1}{bt^2}$	$R = t;\quad S = 0$
$k = -2;\quad t = \frac{-3}{x^{\frac{1}{3}}}$	$k = 2;\quad t =$
$P = \frac{1}{t^2};\quad Q = \frac{1}{bt^3}$	$P = t^2 - \frac{3}{b^2};\quad Q =$
$R = \frac{1}{t^2} - \frac{3}{b^2 t^6};\quad S = \frac{3}{bt^3}$	$R = t^2;\quad S =$
$k = -3;\quad t = \frac{-5}{x^{\frac{1}{5}}}$	$k = 3;\quad t = 7x^{\frac{1}{7}}$
$P = \frac{1}{t^3} - \frac{1.3}{b^2 t^5}$	$P = t^3 - \frac{3.5}{b^2} t$
$Q = \frac{3}{bt^4}$	$Q = \frac{6}{b} t^2 - \frac{3.5}{b^3}$
$R = \frac{1}{t^3} - \frac{3.5}{b^2 t^5}$	$R = t^3 - \frac{5.3}{b^2} t$
$S = \frac{6}{bt^4} - \frac{3.5}{b^3 t^6}$	$S = \frac{3}{b} t^2$

$k = -4;\quad t = \frac{-7}{x^{\frac{1}{7}}}$

$$P = \frac{1}{t^4} - \frac{3.5}{b^2 t^6}$$

$$Q = \frac{6}{b t^5} - \frac{3.5}{b^3 t^7}$$

$$R = \frac{1}{t^4} - \frac{3.3.5}{b^2 t^6} + \frac{3.5.7}{b^4 t^8}$$

$$S = \frac{10}{b t^5} - \frac{3.5.7}{b^3 t^7}$$

$k = 4;\quad t = 9x^{\frac{1}{9}}$

$$P = t^4 - \frac{3.3.5}{b^2} t^2 + \frac{3.5.7}{b^4}$$

$$Q = \frac{10}{b} t^3 - \frac{3.5.7}{b^3 t}$$

$$R = t^4 - \frac{3.5}{b^2} t^2$$

$$S = \frac{6}{b} t^3 - \frac{3.5}{b^2} t$$

$k = -5;\quad t = \frac{-9}{x^{\frac{1}{9}}}$

$$P = \frac{1}{t^5} - \frac{3.3.5}{b^2 t^7} + \frac{3.5.7}{b^4 t^9}$$

$$Q = \frac{10}{b t^6} - \frac{3.5.7}{b^3 t^8}$$

$$R = \frac{1}{t^5} - \frac{3.5.7}{b^2 t^7} + \frac{3.5.7.9}{b^4 t^9}$$

$$S = \frac{15}{b t^6} - \frac{4.3.5.7}{b^3 t^8} + \frac{3.5.7.9}{b^5 t^{10}}$$

$k = 5;\quad t = 11x^{\frac{1}{11}}$

$$P = t^5 - \frac{3.5.7}{b^2} t^3 + \frac{3.5.7.9}{b^4} t$$

$$Q = \frac{15}{b} t^4 - \frac{4.3.5.7}{b^3} t^2 + \frac{3.5.7.9}{b^5}$$

$$R = t^5 - \frac{3.3.5}{b^2} t^3 + \frac{3.5.7}{b^4} t$$

$$S = \frac{10}{b} t^4 - \frac{3.5.7}{b^3} t^2$$

$k = -6;\quad t = \frac{-11}{x^{\frac{1}{11}}}$

$$P = \frac{1}{t^6} - \frac{3.5.7}{b^2 t^8} + \frac{3.5.7.9}{b^4 t^{10}}$$

$$Q = \frac{15}{b t^7} - \frac{4.3.5.7}{b^3 t^9} + \frac{3.5.7.9}{b^5 t^{11}}$$

$$R = \frac{1}{t^6} - \frac{2.3.5.7}{b^2 t^8} + \frac{5.3.5.7.9}{b^4 t^{10}} - \frac{3.5.7.9.11}{b^6 t^{12}}$$

$$S = \frac{21}{b t^7} - \frac{4.5.7.9}{b^3 t^9} + \frac{3.5.7.9.11}{b^5 t^{11}}$$

$k = 6;\quad t = 13x^{\frac{1}{13}}$

$$P = t^6 - \frac{2.3.5.7}{b^2} t^4 + \frac{5.3.5.7.9}{b^4} t^2 - \frac{3.5.7.9.11}{b^6}$$

$$Q = \frac{21}{b} t^5 - \frac{4.5.7.9}{b^3} t^3 + \frac{3.5.7.9.11}{b^5} t$$

$$R = t^6 - \frac{3.5.7}{b^2} t^4 + \frac{3.5.7.9}{b^4} t^2$$

$$S = \frac{15}{b} t^5 - \frac{4.3.5.7}{b^3} t^3 + \frac{3.5.7.9}{b^5} t.$$

Anmerkung 2.

§. 966. Der gefundene Integralausdruck bietet uns ein Mittel dar, die vorgelegte Gleichung

$$du + u^2 dx + A x^{\frac{-4k}{2k+1}} dx = 0$$

auf eine einfachere Form zurückzuführen. Denn man ſetze erſtlich

$$x^{\frac{2k}{2k+1}} u = v \quad \text{oder} \quad u = x^{\frac{-2k}{2k+1}} v,$$

ſo wird man erhalten

$$x^{\frac{-2k}{2k+1}} dv - \frac{4k}{2k+1} x^{\frac{-4k-1}{2k+1}} v dx + x^{\frac{-4k}{2k+1}} v^2 dx + A x^{\frac{-4k}{2k+1}} dx = 0$$

oder

$$dv - \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{v dx}{x} + x^{\frac{-2k}{2k+1}} v^2 dx + A x^{\frac{-2k}{2k+1}} dx = 0.$$

Setzt man ferner $t = (2k+1) x^{\frac{1}{2k+1}}$, ſo wird

$$dt = x^{\frac{-2k}{2k+1}} dx \quad \text{und} \quad \frac{dt}{t} = \frac{1}{2k+1} \cdot \frac{dx}{x},$$

alſo erhält man

$$dv - \frac{2k v dt}{t} + v^2 dt + A dt = 0.$$

Überdieß ſey $v = \frac{k}{t} + z$, damit man habe

$$-\frac{k dt}{t^2} + dz - \frac{2k^2 dt}{t^2} - \frac{2kz dt}{t} + \frac{k^2 dt}{t^2} + \frac{2kz dt}{t} + z^2 dt + A dt = 0$$

oder

$$dz + z^2 dt - \frac{k(k+1) dt}{t^2} + A dt = 0,$$

welche Gleichung demnach integrabel wird, wenn k eine ganze Zahl iſt.

Auf ähnliche Art läßt ſich auch die Gleichung

$$du + u^2 dx + A x^n dx = 0$$

allgemeiner auf folgende Art transformiren:

Wird $u = x^\lambda v$ und $v = z - \frac{1}{2}\lambda x^{-\lambda-1}$ geſetzt, ſo erhält man

$$dz + x^\lambda z^2 dx + \tfrac{1}{4}\lambda(\lambda+2) x^{-\lambda-2} dx + A x^{n-\lambda} dx = 0,$$

wird ferner

$$x^{\lambda}\,dx = dt \quad \text{oder} \quad x^{\lambda+1} = (\lambda+1)t$$

ist, so geht die letzte Gleichung über in folgende:

$$+ z^2\,dt + \frac{\lambda(\lambda+2)\,dt}{4(\lambda+1)^2 t^2} + A(\lambda+1)^{\frac{n-2\lambda}{\lambda+1}}\, t^{\frac{n-2\lambda}{\lambda+1}}\,dt = 0.$$

Diese Gleichung ist integrabel, wenn $n = \frac{-4k}{2k+1}$ ist, und daher lassen sich unzählige Formen darstellen, wenn man der Zahl λ beliebige Werthe beylegt. Wird $\lambda = -1$ genommen, so findet man $t = lx$ und

$$dz + z^2\,dt - \tfrac{1}{4}dt + A\,e^{(n+2)t}\,dt = 0.$$

Kapitel VIII.

Von der Auflösung anderer Differenzialgleichungen des zweyten Grades mittelst unendlicher Reihen.

Aufgabe 123.

§. 967. **Die allgemeine Form jener Differenzialgleichungen des zweyten Grades, welche sich bequem mittelst Reihen auflösen lassen, darzustellen, und ihre Integralien aufzufinden.**

Auflösung.

Erstlich kann man nur jene Gleichungen bequem mittelst Reihen auflösen, bey welchen die eine Veränderliche y mit ihren Differenzialien dy und d^2y nicht mehr als eine Dimension hat, weil wir durch die Substitution einer unendlichen Reihe für y auf zu mühsame Rechnungen stoßen würden, wenn irgend wo höhere Potenzen vorkämen. Derley Gleichungen sind demnach unter der Form

$$d^2y + Mdxdy + Nydx^2 = Xdx^2$$

enthalten. Damit aber dann jedes Glied der für y angenommenen Reihe bloß durch das unmittelbar vorhergehende bestimmt werde, welches der merkwürdigste Fall der Auflösung ist, so müssen rücksichtlich der andern Veränderlichen x nur zweyerley Arten von Gliedern in der Gleichung erscheinen, wenn wir die Dimensionen, welche x mit seinem Differenziale dx enthält, berücksichtigen. Läßt man demnach anfangs das Glied Xdx^2 außer Acht, so haben die auf diese Art auflösbaren Gleichungen folgende Form

$$x^2(a + bx^n)d^2y + x(c + ex^n)dxdy + (f + gx^n)ydx^2 = 0$$

Um nun die Auflösung dieser Gleichung zu erhalten, nehmen wir an, daß

$$y = Ax^\lambda + Bx^{\lambda+n} + Cx^{\lambda+2n} + Dx^{\lambda+3n} + \ldots$$

sey, und dann muß nach gehöriger Substitution die folgende Summe von Reihen verschwinden:

$$\lambda-1)Aax^{\lambda}+(\lambda+n)(\lambda+n-1)Bax^{\lambda+n}+(\lambda+2n)(\lambda+2n-1)Cax^{\lambda+2n}+\ldots$$
$$+\lambda(\lambda-1)Ab \quad +(\lambda+n)(\lambda+n-1)Bb$$
$$-\lambda Ac \quad +(\lambda+n)Bc \quad +(\lambda+2n)Cc$$
$$+\lambda Ae \quad +(\lambda+n)Be$$
$$-Af \quad +Bf \quad +Cf$$
$$+Ag \quad +Bg.$$

Es muß alſo zuerſt der Exponent λ ſo genommen werden, daß

$$\lambda(\lambda-1)a+\lambda c+f=0$$

ird; dann aber muß man für die übrigen Coefficienten ſetzen

$$[(\lambda+n)(\lambda+n-1)a+(\lambda+n)c+f]B=-[\lambda(\lambda-1)b+\lambda e+g]A,$$
$$[(\lambda+2n)(\lambda+2n-1)a+(\lambda+2n)c+f]C=$$
$$=-[(\lambda+n)(\lambda+n-1)b+(\lambda+n)e+g]B,$$
$$[(\lambda+3n)(\lambda+3n-1)a+(\lambda+3n)c+f]D=$$
$$=-[(\lambda+2n)(\lambda+2n-1)b+(\lambda+2n)e+g]C$$
$$\text{ꝛc.} \quad \text{ꝛc.}$$

Da nun alſo

$$\lambda(\lambda-1)a+\lambda c+f=0$$

ſt, ſo werden wir, wenn Kürze halber

$$\lambda(\lambda-1)b+\lambda e+g=h$$

eſetzt wird, folgende Gleichungen erhalten:

$$n(n+2\lambda-1)a+nc]B=-hA,$$
$$2n(2n+2\lambda-1)a+2nc]C=-[n(n+2\lambda-1)b+ne+h]B,$$
$$3n(3n+2\lambda-1)a+3nc]D=-[2n(2n+2\lambda-1)b+2ne+h]C$$
$$\text{ꝛc.} \quad \text{ꝛc.}$$

Weil alſo, wenn nicht $a=0$ iſt, für λ zwey Werthe gefunden erden, nämlich

$$\lambda=\frac{a-c\pm\sqrt{(a-c)^2-4af}}{2a},$$

erhält man zwey Reihen für y, welche auf irgend eine Weiſe mit nander verbunden das vollſtändige Integrale der Gleichung darbietheu.

Andere Auflöſung.

Wenn die Gleichung

$$(a+bx^n)d^2y+x(c+ex^n)dxdy+(f+gx^n)ydx^2=0$$

ngelegt iſt, ſo kann man auch umgekehrt folgende Reihe annehmen:

$$y=Ax^{\lambda}+Bx^{\lambda-n}+Cx^{\lambda-2n}+Dx^{\lambda-3n}+\ldots,$$

woraus man durch die Reduction auf o erhält:

$$+\lambda(\lambda-1)Abx^{\lambda+n}+(\lambda-n)(\lambda-n-1)Bbx^{\lambda}+(\lambda-2n)(\lambda-2n-1)Cbx^{\lambda-n}.$$
$$+\lambda(\lambda-1)Aa \quad +(\lambda-n)(\lambda-n-1)Ba$$
$$+\lambda Ae \quad +(\lambda-n)Be \quad +(\lambda-2n)Ce$$
$$+\lambda Ac \quad +(\lambda-n)Bc$$
$$+Ag \quad +Bg \quad +Cg$$
$$+Af \quad +Bf$$

Hier muß man alſo den Exponenten λ ſo nehmen, daß

$$\lambda(\lambda-1)b+\lambda e+g=o$$

wird, und wenn wir dann

$$\lambda(\lambda-1)a+\lambda c+f=h$$

ſetzen, ſo ergibt ſich die Beſtimmung der Coefficienten aus folgend Gleichungen:

$$n[(n-2\lambda+1)b-e]B=-hA,$$
$$2n[(2n-2\lambda+1)b-e]C=-[n(n-2\lambda+1)a-nc+h]$$
$$3n[(3n-2\lambda+1)b-e]D=-[2n(2n-2\lambda+1)a-2nc+h]$$
$$\text{ꝛc.} \quad \text{ꝛc.}$$

Zuſatz 1.

§. 968. Bezeichnet k eine ganze poſitive Zahl, ſo wird die i der erſten Auflöſung angenommene Reihe irgendwo abbrechen, wenn

$$kn(kn+2\lambda-1)b+kne+h=o \quad \text{oder}$$
$$(\lambda+kn)(\lambda+kn-1)b+(\lambda+kn)e+g=o$$

wird, das iſt wenn

$$\left.\begin{matrix}\lambda^2 b+\lambda(2kn-1)b+kn(kn-1)b\\ +\lambda e \qquad\qquad +kne+g\end{matrix}\right\}=o.$$

Zuſatz 2.

§. 969. Unſere Gleichung läßt alſo die Integration zu, wenn i Größen f und g ſo beſchaffen ſind, daß

$$f=-\lambda(\lambda-1)a-\lambda c \quad \text{und}$$
$$g=-(\lambda+kn)(\lambda+kn-1)b-(\lambda+kn)e$$

wird, oder wenn zwey Zahlen μ und ν ſo gewählt werden, daß ν- theilbar wird durch den Exponenten n, und wenn dann

$$f=-\mu(\mu-1)a-\mu c \quad \text{und}$$
$$g=-\nu(\nu-1)b-\nu e \quad \text{wird.}$$

Zuſatz 3.

§. 970. Weil demnach

$$\mu = \frac{a - c \pm \sqrt{(a-c)^2 - 4af}}{2a} \quad \text{und}$$

$$\nu = \frac{b - e \pm \sqrt{(b-e)^2 - 4bg}}{2b}$$

iſt, ſo wird die Gleichung ein algebraiſches Integrale haben, wenn $\nu - \mu = kn$ iſt, wobey k eine ganze poſitive Zahl bezeichnet, das iſt, wenn

$$kn = \frac{c}{2a} - \frac{e}{2b} \pm \frac{\sqrt{(b-e)^2 - 4bg}}{2b} \mp \frac{\sqrt{(a-c)^2 - 4af}}{2a}.$$

Zuſatz 4.

§. 971. Wenn es ſich aber bey der Beſtimmung der Reihe ereignet, daß der Exponent λ imaginär wird, ſo iſt zu bemerken, daß

$$x^{\alpha+\beta\sqrt{-1}} = x^{\alpha}.e^{\beta\sqrt{-1}.lx} = x^{\alpha}(\cos.\beta lx + \sqrt{-1}\sin.\beta lx),$$

und daher wird man die beyden Reihen ſo verbinden können, daß das Integrale eine reelle Form erhält.

Anmerkung.

§. 972. Beyde Auflöſungen im Allgemeinen betrachtet geben eine doppelte Reihe für die Veränderliche y, weil der Exponent λ zwey Werthe hat; die Verbindung beyder Reihen gibt das vollſtändige Integrale. Die erſte Auflöſung gibt nämlich für den Exponenten λ folgende zwey Werthe:

$$\lambda = \frac{a - c \pm \sqrt{(a-c)^2 - 4af}}{2a};$$

die zweyte Auflöſung dagegen gibt

$$\lambda = \frac{b - e \pm \sqrt{(b-e)^2 - 4bg}}{2b},$$

ſo daß alſo auf dieſe Weiſe das vollſtändige Integrale auf doppelte Art ausgedrückt werden kann. Sind gleichwohl dieſe beyden Formen ſehr von einander verſchieden, ja ſchreitet auch zuweilen die eine nach imaginären Exponenten fort, während die andere nur reelle Exponenten hat, ſo ſind ſie dennoch für gleichgeltend zu halten. Ja es kann ſich ſogar ereignen, daß die eine Auflöſung oder auch beyde zur Darſtellung des vollſtändigen Integrales untauglich ſind, wenn ſie nur eine einzige Reihe darbiethen. Dieſe Unbequemlichkeit kann bey beyden Auflöſungen auf

zweyerley Weise sich ereignen; bey der ersten Auflösung nämlich, bey welcher man den Exponenten λ aus der Gleichung

$$\lambda(\lambda-1)a+\lambda c+f=0$$

bestimmen muß, ergibt sich aus dieser nur ein einziger Werth für λ, wenn $a=0$, oder wenn $4af=(a-c)^2$ ist. Im erstern Falle wird bloß $\lambda=-\frac{f}{c}$, während der andere Werth von λ gleichsam ins Unendliche übergeht. Im letztern Falle aber werden die beyden Werthe von λ einander gleich, nämlich $\lambda=\frac{a-c}{2a}$. Dieselbe Unbequemlichkeit findet auch bey der zweyten Auflösung Statt, wenn entweder $b=0$ oder $4bg=(b-e)^2$ ist. Hieraus leuchtet nun die Möglichkeit ein, daß die eine Auflösung eine solche Unbequemlichkeit darbiethet, während dieß bey der andern der Fall nicht ist, ja daß sogar beyde Auflösungen auf dieselbe führen. Es wird deßhalb zweckmäßig seyn, zu zeigen, wie man auch in diesen Fällen das vollständige Integrale suchen müsse. Ferner wollen wir auch den Fall anführen, in welchen beyde Werthe von λ imaginär werden, und wo zur Beseitigung der imaginären Form ein besonderer Kunstgriff erforderlich ist. Endlich biethen aber auch die beyden Reihen, die für y aufzustellen sind, Schwierigkeiten dar, so oft die beyden Werthe von λ eine durch den Exponenten n theilbare Differenz geben. Die Entwickelung dieser Fälle verdient eine weitere Auseinandersetzung.

Aufgabe 124.

§. 973. **Wenn die Differenzialgleichung des zweyten Grades**

$$x^2(a+bx^n)d^2y+x(c+ex^n)\,dxdy+(f+gx^n)ydx^2=0$$

vorgelegt wird, und es ereignet sich, daß die beyden für y angenommenen steigenden Reihen entweder in eine zusammenfallen, oder daß eine derselben unmöglich wird, das vollständige Integrale durch Reihen darzustellen.

Auflösung.

Nimmt man die Reihe

$$y=Ax^{\lambda}+Bx^{\lambda+n}+Cx^{\lambda+2n}+Dx^{\lambda+3n}+\ldots,$$

und es ereignet sich, daß die beyden Werthe von λ, welche sich aus der

Gleichung

$$\lambda(\lambda-1)a+\lambda c+f=0$$

ergeben, entweder einander gleich werden, oder eine durch den Exponenten n theilbare Differenz darbiethen, ſo wird der Werth von y auſſer den Potenzen von x auch noch den Logarithmus von x enthalten. Um nun zur Auflöſung unſerer Gleichung zu gelangen, ſetzen wir ſogleich $y=u+v\,lx$, ſo daß $y=u+v\,lx+\alpha v$ werde, wobey α irgend eine conſtante Größe bezeichnet. Man wird demnach erhalten

$$dy=du+\frac{v\,dx}{x}+dv\,lx \quad \text{und}$$

$$d^2y=d^2u+\frac{2\,dx\,dv}{x}-\frac{v\,dx^2}{x^2}+d^2v\,lx.$$

Werden nun dieſe Werthe ſubſtituirt, ſo wird unſere Gleichung folgende Form erhalten:

$$\left.\begin{array}{l} x^2(a+bx^n)d^2u+2x(a+bx^n)\,dx\,dv-(a+bx^n)\,vdx^2 \\ \qquad +x(c+ex^n)\,dx\,du+(c+ex^n)\,vdx^2 \\ \qquad\qquad +(f+gx^n)\,udx^2 \\ +[x^2(a+bx^n)d^2v+x(c+ex^n)\,dx\,dv+(f+gx^n)\,vdx^2]\,lx \end{array}\right\}=0;$$

hier muß der letzte Theil, welcher den Logarithmus enthält, für ſich gleich Null geſetzt werden.

Man ſetze daher

$$v=Ax^{\lambda}+Bx^{\lambda+n}+Cx^{\lambda+2n}+Dx^{\lambda+3n}+\ldots,$$

und gebe dem Exponenten λ aus der Gleichung

$$\lambda(\lambda-1)a+\lambda c+f=0$$

jenen Werth, welcher auf keine Unbequemlichkeit führt, ſo erhält man für die übrigen Coefficienten, indem man

$$\lambda(\lambda-1)b+\lambda e+g=nh$$

ſetzt, folgende Gleichungen:

$$[(n+2\lambda-1)a+c]B+hA=0,$$
$$2[(2n+2\lambda-1)a+c]C+[(n+2\lambda-1)b+e]B+hB=0,$$
$$3[(3n+2\lambda-1)a+c]D+2[(2n+2\lambda-1)b+e]C+hC=0,$$
$$4[(4n+2\lambda-1)a+c]E+3[(3n+2\lambda-1)b+e]D+hD=0$$
$$\text{ꝛc.} \quad \text{ꝛc.}$$

Hat man auf dieſe Art die Coefficienten beſtimmt, von welchen der erſte A willkürlich bleibt, ſo ſetze man

$$u=\mathfrak{A}+\mathfrak{A}x^{\lambda}+\mathfrak{B}x^{\lambda+n}+\mathfrak{C}x^{\lambda+2n}+\mathfrak{D}x^{\lambda+3n}+\ldots$$

Wird nun dieſer Werth in der erſteren Gleichung mit der für v gefundenen Reihe ſubſtituirt, ſo müſſen folgende Reihen verſchwinden:

$$x^2(a+bx^n)\frac{d^2\Delta}{dx^2} + \lambda(\lambda-1)\mathfrak{A}ax^\lambda + (\lambda+n)(\lambda+n-1)\mathfrak{B}ax^{\lambda+n} + (\lambda+2n)(\lambda+2n-1)\mathfrak{C}ax^{\lambda+2n} + \ldots$$

$$+ x(c+ex^n)\frac{d\Delta}{dx} \quad + \lambda(\lambda-1)\mathfrak{A}b \quad + (\lambda+n)(\lambda+n-1)\mathfrak{B}b$$

$$+ \lambda\mathfrak{A}c \quad + (\lambda+n)\mathfrak{B}c \quad + (\lambda+2n)\mathfrak{C}c$$

$$+ (f+gx^n)\Delta \quad + \lambda\mathfrak{A}e \quad + (\lambda+n)\mathfrak{B}e$$

$$+ \mathfrak{A}f \quad + \mathfrak{B}f \quad + \mathfrak{C}f$$

$$+ \mathfrak{A}g \quad + \mathfrak{B}g$$

$$+ 2\lambda Aa \quad + 2(\lambda+n)Ba \quad + 2(\lambda+2n)Ca$$

$$+ A(c-a) \quad + 2\lambda Ab \quad + 2(\lambda+n)Bb$$

$$+ B(c-a) \quad + C(c-a)$$

$$+ A(e-b) \quad + B(e-b).$$

Weil nun aber $\lambda(\lambda-1)a+\lambda c+f=o$ und $\lambda(\lambda-1)b+\lambda e+g=nh$ iſt, ſo wird dieſer Ausdruck folgende Form annehmen:

$$x^2(a+bx^n)\frac{d^2\Delta}{dx^2} + x(c+ex^n)\frac{d\Delta}{dx} + (f+gx^n)\Delta$$

$$[(2\lambda-1)a+c]Ax^\lambda + [(2n+2\lambda-1)a+c]Bx^{\lambda+n} + [(4n+2\lambda-1)a+c]Cx^{\lambda+2n}$$

$$+ [(2\lambda-1)b+e]A \quad + [(2n+2\lambda-1)b+e]B$$

$$+ n[(n+2\lambda-1)a+c]\mathfrak{B} \quad + 2n[(2n+2\lambda-1)a+c]\mathfrak{C}$$

$$+ nh\mathfrak{A} \quad + n[(n+2\lambda-1)b+e]\mathfrak{B}$$

$$+ nh\mathfrak{B},$$

bey Δ jene Glieder bezeichnet, welche der Reihe

$$\mathfrak{A}x^{\lambda} + \mathfrak{B}x^{\lambda+n} + \ldots$$

ausgehen müſſen, ſo daß, wenn man rückwärts geht:

$$\Delta = ax^{\lambda-n} + bx^{\lambda-2n} + cx^{\lambda-3n} + \ldots + fx^{\lambda-kn}.$$

Wie nun dieſer Anfang der Reihe in jedem Falle zu nehmen ſey, ieren folgende Vorſchriften.

I. Dieſe Anfangsglieder können nur dann genommen werden, wenn

$$(\lambda - kn)(\lambda - kn - 1)a + (\lambda - kn)c + f = 0$$

Da alſo

$$\lambda(\lambda - 1)a + \lambda c + f = 0,$$

, ſo ergibt ſich hieraus:

$$\lambda = kn + \frac{a - c - \sqrt{(a-c)^2 - 4af}}{2a},$$

un aber iſt

$$\lambda = \frac{a - c + \sqrt{(a-c)^2 - 4af}}{2a}.$$

Dieſe beyden Werthe können der Gleichung nicht entſprechen, wenn ht im erſten Werthe das Wurzelzeichen negativ, im letztern aber po- iv genommen wird. Werden aber dieſe Werthe einander gleich ge- ıt, ſo wird

$$kn = \frac{1}{a}\sqrt{(a-c)^2 - 4af} \quad \text{oder}$$

$$k^2n^2a^2 = (a-c)^2 - 4af,$$

und daher $f = \frac{(a-c)^2}{4a} - \frac{1}{4}k^2n^2a,$

alſo iſt $\lambda = \frac{a-c}{2a} + \frac{1}{2}kn.$

Iſt demnach die vorgelegte Gleichung ſo beſchaffen, daß

$$kna = \sqrt{(a-c)^2 - 4af}$$

d, und man nimmt

$$\lambda = \frac{a-c}{2a} + \frac{1}{2}kn,$$

v aber die Reihe

$$v = Ax^{\lambda} + Bx^{\lambda+n} + \ldots,$$

nuß die andere Reihe u auf folgende Art gebildet werden:

$$= fx^{\lambda-kn} + \ldots + ax^{\lambda-n} + \mathfrak{A}x^{\lambda} + \mathfrak{B}x^{\lambda+n} + \mathfrak{C}x^{\lambda+2n} + \ldots$$

Hier haben wir nun den Fall, wo die beyden Werthe von λ, welche aus der Gleichung

$$\lambda(\lambda - 1)\,a + \lambda c + f = 0$$

gefunden werden, eine durch n theilbare Differenz haben, wobey bemerkt werden muß, daß die Reihe für v mit dem größern Werthe von λ, die Reihe für u aber mit dem kleinern Werthe von λ beginnen müsse.

II. Die Anfangsglieder Δ können nicht außer Acht gelassen werden, wenn nicht

$$(2\lambda - 1)\,a + c = 0$$

ist, in welchem Falle $\lambda = \frac{a - c}{2}$ wird. Hier haben wir also den Fall, in welchem die Gleichung

$$\lambda(\lambda - 1)\,a + \lambda c + f = 0$$

zwey gleiche Wurzeln gibt, und daher ist $f = \frac{(a - c)^2}{4a}$. Es ist also dieser Fall in dem vorhergehenden enthalten, wenn dort $k = 0$ gesetzt wird. Auf diese Art lassen sich daher jene Fälle auflösen, in welchen die beyden Werthe von λ entweder einander gleich werden, oder eine durch den Exponenten n theilbare Differenz geben. So findet man nun das vollständige Integrale durch zwey steigende Reihen v und u ausgedrückt, von welchen die erstere, nämlich v, mit lx multiplicirt wird.

Zusatz 1.

§. 974. Wenn also in der vorgelegten Gleichung die Coefficienten a, c und f so gebildet sind, daß $\lambda = \mu$ und $\lambda = \mu - kn$ die beyden Wurzeln der Gleichung $\lambda(\lambda - 1)\,a + \lambda c + f = 0$ sind, wobey k eine ganze positive Zahl bezeichnet, so wird das vollständige Integrale folgende Form erhalten:

$$y = u + \alpha v + v\,lx.$$

Zusatz 2.

§. 975. Hier aber lassen sich die beyden Größen v und u aus den Gleichungen

$$\text{I. } x^2(a + bx^n)\,d^2v + x(c + ex^n)\,dx\,dv + (f + gx^n)\,v\,dx^2 = 0,$$

$$\text{II. } \left.\begin{aligned} &x^2(a + bx^n)\,d^2u + x(c + ex^n)\,dx\,du + (f + gx^n)\,u\,dx^2 \\ &+ 2x(a + bx^n)\,dx\,dv - (a + bx^n)\,v\,dx^2 \\ &+ (c + ex^n)\,v\,dx^2 \end{aligned}\right\} = 0$$

so bestimmen, daß man

$$v = Ax^{\mu} + Bx^{\mu+n} + Cx^{\mu+2n} + Dx^{\mu+3n} + \ldots$$
$$u = \mathfrak{A}x^{\mu-kn} + \mathfrak{B}x^{\mu-kn+n} + \mathfrak{C}x^{\mu-kn+2n} + \mathfrak{D}x^{\mu-kn+3n} + \ldots$$

Werden nämlich diese Reihen substituirt, so kann man dann alle Coefficienten aus einem einzigen bestimmen.

Anmerkung.

§. 976. Nimmt man also den Logarithmus von x zu Hülfe, so kann man in den Fällen, deren wir bisher erwähnt haben, das vollständige Integrale der vorgelegten Gleichung mittelst Reihen, die nach den steigenden Potenzen der Veränderlichen fortschreiten, darstellen, während ohne diesen Kunstgriffen bloß ein particuläres Integrale gefunden wird; denn wenn die Gleichung $\lambda(\lambda-1)a + \lambda c + f = 0$ zwey Wurzeln hat, deren Unterschied durch den Exponenten n theilbar ist, wenn nämlich $\lambda = \mu$ und $\lambda = \mu - kn$ ist, so kann, nach der ersten Methode, bloß die Reihe bestimmt werden, welche mit der Potenz x^{μ} beginnt, denn wenn man die andere Reihe, deren erstes Glied $x^{\mu-kn}$ ist, für y nehmen wollte, so würde der Coefficient irgend eines Gliedes unendlich werden, und daher würden auch alle folgenden unendlich seyn, welcher Übelstand jedoch durch die Einführung vom Logarithmus x glücklich beseitigt wird. Es wird also gut seyn, den Gebrauch dieser Auflösung durch einige Beyspiele zu erläutern.

Beyspiel 1.

§. 977. Das vollständige Integrale der Differenzialgleichung des zweyten Grades

$$xd^2y + dxdy + gx^{n-1}ydx^2 = 0$$

durch steigende Reihen darzustellen.

Reduciren wir diese Gleichung auf unsere Form, so erhalten wir

$$x^2d^2y + xdxdy + gx^nydx^2 = 0,$$

wo also $a=1$, $b=0$, $c=1$, $e=0$ und $f=0$ ist, und daher $\lambda(\lambda-1)+\lambda = 0$ oder $\lambda^2 = 0$, so daß also die beyden Werthe einander gleich und $=0$ sind. Wird daher $y = u + \alpha v + vlx$ gesetzt, so muß man folgende Gleichungen auflösen:

$$\text{I. } x^2d^2v + xdxdv + gx^nvdx^2 = 0$$
$$\text{II. } \left.\begin{array}{l} x^2d^2u + xdxdu + gx^nudx^2 \\ \quad + 2xdxdv \end{array}\right\} = 0$$

Setzen wir also

$$v = A + Bx^n + Cx^{2n} + Dx^{3n} + \ldots \text{ und}$$
$$u = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x^n + \mathfrak{C}x^{2n} + \mathfrak{D}x^{3n} + \ldots,$$

so gibt die erstere Gleichung:

$$\left.\begin{array}{llll} n(n-1)Bx^n + 2n(2n-1)Cx^{2n} + 3n(3n-1)Dx^{3n} + \ldots \\ + nB + 2nC + 3nD \\ + Ag + Bg + Cg \end{array}\right\} =$$

und daher wird

$$B = \frac{-Ag}{n^2},\quad C = \frac{-Bg}{4n^2},\quad D = \frac{-Cg}{9n^2},\quad E = \frac{-Dg}{16n^2};\ \ldots$$

Dann aber ergibt sich aus der zweyten Gleichung:

$$\left.\begin{array}{llll} n^2\mathfrak{B}x^n + 4n^2\mathfrak{C}x^{2n} + 9n^2\mathfrak{D}x^{3n} + \ldots \\ + \mathfrak{A}g + \mathfrak{B}g + \mathfrak{C}g \\ + 2nB + 4nC + 6nD \end{array}\right\} = 0,$$

und hieraus folgern wir:

$$\mathfrak{B} = \frac{-\mathfrak{A}g}{n^2} - \frac{2B}{n},\quad \mathfrak{C} = \frac{-\mathfrak{B}g}{4n^2} - \frac{2C}{2n},\quad \mathfrak{D} = \frac{-\mathfrak{C}g}{9n^2} - \frac{2D}{3n},$$

Hier aber können wir mit Sicherheit $\mathfrak{A} = 0$ setzen, weil die Gl der, welche aus $\mathfrak{A}$ entstehen werden, in dem Ausdrucke αv enthalt sind. Da nun also

$$B = \frac{-Ag}{n^2},\quad C = \frac{+Ag^2}{1.4.n^4},\quad D = \frac{-Ag^3}{1.4.9.n^6},\quad E = \frac{+Ag^4}{1.4.9.16.n^8};$$

so wird man folgende Werthe erhalten:

$$\mathfrak{B} = \frac{2Ag}{n^3},\quad \mathfrak{C} = \frac{-2Ag^2}{4n^5} - \frac{2Ag^2}{2.1.4.n^5} = \frac{-6Ag^2}{2.1.4.n^5},$$

$$\mathfrak{D} = \frac{6Ag^3}{2.1.4.9.n^7} + \frac{2Ag^3}{3.1.4.9.n^7} = \frac{22Ag^3}{2.3.1.4.9.n^7},$$

$$\mathfrak{E} = \frac{-22Ag^4}{2.3.1.4.9.16.n^9} - \frac{2Ag^4}{4.1.4.9.16.n^9} = \frac{-100Ag^4}{2.3.4.1.4.9.16.n^9},$$

$$\mathfrak{F} = \frac{100Ag^5}{2.3.4.1.4.9.16.25.n^{11}} + \frac{2Ag^5}{5.1.4.9.16.25.n^{11}} = \frac{548Ag^5}{2.3.4.5.1.4.9.16.25.n^{11}},$$

und so ergeben sich nachstehende Gleichungen:

$$\mathfrak{B} = \frac{2Ag}{n^3},\quad \mathfrak{C} = \frac{-6Ag^2}{1.8.n^5},\quad \mathfrak{D} = \frac{22Ag^3}{1.8.27.n^7},$$

$$\mathfrak{E} = \frac{-100Ag^4}{1.8.27.64.n^9},\quad \mathfrak{F} = \frac{548Ag^5}{1.8.27.64.125.n^{11}},\quad \mathfrak{G} = \frac{-3528Ag^6}{1.8.27.64.125.216.n^{13}};\ \ldots$$

wo jeder der Zähler, 2, 6, 22, 100, 548, 3528, ... sich aus d

beyden unmittelbar vorhergehenden nach folgendem Bildungsgesetz ergibt:

$10 = 3.2 - 1.0$; $22 = 5.6 - 4.2$; $100 = 7.22 - 9.6$; $548 = 9.100 - 16.22$; $3528 = 11.548 - 25.100$; ...

Folglich wird sich das Integrale unter folgender Form darstellen:

$$P = \frac{2Ag}{n^3}x^n - \frac{6Ag^2}{1.8.n^5}x^{2n} + \frac{22Ag^3}{1.8.27.n^7}x^{3n} - \frac{100Ag^4}{1.8.27.64.n^9}x^{4n} + \ldots$$
$$+ A\left[\left(1 - \frac{g}{n^2}x^n + \frac{g^2}{1.4.n^4}x^{2n} - \frac{g^3}{1.4.9.n^6}x^{3n} + \frac{g^4}{1.4.9.16.n^8}x^{4n} - \ldots\right)lx\right.$$
$$\left. + \alpha - \frac{\alpha g}{n^2}x^n + \frac{\alpha g^2}{1.4.n^4}x^{2n} - \frac{\alpha g^3}{1.4.9.n^6}x^{3n} + \frac{\alpha g^4}{1.4.9.16.n^8}x^{4n} - \ldots\right],$$

wo die beyden Größen A und α willkürliche Constanten bezeichnen.

Beyspiel 2.

§. 978. Das vollständige Integrale der Differenzialgleichung des zweyten Grades:

$$x(1 - x^2)\,d^2y - (1 + x^2)\,dx\,dy + xy\,dx^2 = 0,$$

durch steigende Reihen darzustellen.

Führen wir diese Gleichung auf unsere Form zurück, so erhalten wir:

$$x^2(1 - x^2)\,d^2y - x(1 + x^2)\,dx\,dy + x^2y\,dx^2 = 0,$$

so daß $n = 2$, $a = 1$, $b = -1$, $c = -1$, $e = -1$, $f = 0$ und $g = 1$ wird, und daher $\lambda = 0$ und $\lambda = 2$ die Wurzeln der Gleichung

$$\lambda(\lambda - 1) - \lambda = 0$$

sind, deren Differenz durch $n = 2$ dividirt, 1 zum Quotienten gibt. Wird also $y = u + \alpha v + vlx$ gesetzt, so muß man nehmen

$$v = Ax^2 + Bx^4 + Cx^6 + Dx^8 + \ldots \text{ und}$$
$$u = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x^2 + \mathfrak{C}x^4 + \mathfrak{D}x^6 + \mathfrak{E}x^8 + \ldots,$$

welche Reihen aus folgenden Gleichungen zu bestimmen sind:

I. $x^2(1 - x^2)\,d^2v - x(1 + x^2)\,dx\,dv + x^2v\,dx^2 = 0,$

II. $x^2(1 - x^2)\,d^2u - x(1 + x^2)\,dx\,du + x^2u\,dx^2 + 2x(1 - x^2)\,dx\,dv - 2v\,dx^2 = 0.$

Es wird daher für die Bestimmung der ersten Reihe

$$\left.\begin{array}{rrrrr} 2Ax^2 & + 12Bx^4 & + 30Cx^6 & + 56Dx^8 & + \ldots \\ & - 2A & - 12B & - 30C & + \ldots \\ - 2A & - 4B & - 6C & - 8D & - \ldots \\ & - 2A & - 4B & - 6C & - \ldots \\ & + A & + B & + C & + \ldots \end{array}\right\} = 0,$$

und daher ist

$$2.4.B = 1.3.A,\quad 4.6.C = 3.5.B,\quad 6.8.D = 5.7C,\ \ldots$$

oder

$$B = \frac{1.3}{2.4}A,\quad C = \frac{1.3.3.5}{2.4.4.6}A,\quad D = \frac{1.3.3.5.5.7}{2.4.4.6.6.8}A,\ldots$$

Aus der andern Gleichung aber findet man:

$$\left.\begin{array}{llllll}
2\mathfrak{B}x^2 & +\ 12\mathfrak{C}x^4 & +\ 30\mathfrak{D}x^6 & +\ 56\mathfrak{E}x^8 & +\ \ldots \\
 & -\ 2\mathfrak{B} & -\ 12\mathfrak{C} & -\ 30\mathfrak{D} & \\
-\ 2\mathfrak{B} & -\ 4\mathfrak{C} & -\ 6\mathfrak{D} & -\ 8\mathfrak{E} & \\
 & -\ 2\mathfrak{B} & -\ 4\mathfrak{C} & -\ 6\mathfrak{D} & \\
+\ \mathfrak{A} & +\ \mathfrak{B} & +\ \mathfrak{C} & +\ \mathfrak{D} & \\
+\ 4A & +\ 8B & +\ 12C & +\ 16D & \\
 & -\ 4A & -\ 8B & -\ 12C & \\
-\ 2A & -\ 2B & -\ 2C & -\ 2D &
\end{array}\right\} = 0;$$

es muß also seyn:

$$\mathfrak{A} + 2A = 0,\quad 2.4.\mathfrak{C} - 1.3.\mathfrak{B} + 6B - 4A = 0,$$
$$4.6.\mathfrak{D} - 3.5.\mathfrak{C} + 10C - 8B = 0,$$
$$6.8.\mathfrak{E} - 5.7.\mathfrak{D} + 14D - 12C = 0,\ \ldots$$

oder weil

$$B = \frac{1.3}{2.4}A,\quad C = \frac{3.5}{4.6}B,\quad D = \frac{5.7}{6.8}C,\ \ldots$$

so wird $\mathfrak{A} = -2A$, und ferner

$$2.4.\mathfrak{C} - 1.3.\mathfrak{B} - \frac{2.7}{2.4}A = 0,\quad \mathfrak{C} = \frac{1.3}{2.4}\mathfrak{B} + \frac{2.7}{2^2.4^2}A$$
$$4.6.\mathfrak{D} - 3.5.\mathfrak{C} - \frac{2.21}{4.6}B = 0,\quad \mathfrak{D} = \frac{3.5}{4.6}\mathfrak{C} + \frac{2.21}{4^2.6^2}B$$
$$6.8.\mathfrak{E} - 5.7.\mathfrak{D} - \frac{2.43}{6.8}C = 0,\quad \mathfrak{E} = \frac{5.7}{6.8}\mathfrak{D} + \frac{2.43}{6^2.8^2}C$$
$$8.10.\mathfrak{F} - 7.9.\mathfrak{E} - \frac{2.73}{8.10}D = 0,\quad \mathfrak{F} = \frac{7.9}{8.10}\mathfrak{E} + \frac{2.73}{8^2.10^2}D.$$

Nimmt man also $\mathfrak{A} = -2A$, so kann man die Größe $\mathfrak{B}$ nach Belieben annehmen, und man kann ohne Anstand dieselbe $= 0$ setzen, wenn nämlich eben die Constante α in die Rechnung eingeführt worden ist.

Beyspiel 3.

§. 979. Das vollständige Integrale der Differenzialgleichung des zweyten Grades

$x^2(1+bx^2)d^2y + x(-5+ex^2)dxdy + (5+gx^2)ydx^2 = 0$

durch ſteigende Reihen zu entwickeln.

Weil hier $a=1$, $c=-5$ und $f=5$ iſt, ſo hat die Gleichung

$$\lambda(\lambda-1) - 5\lambda + 5 = 0 \quad \text{oder}$$
$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$$

die Wurzeln $\lambda=1$ und $\lambda=5$, deren Unterſchied 4 durch $n=2$ theilbar iſt. Nimmt man alſo $y = u + \alpha v + vlx$, und ſetzt

$$v = Ax^5 + Bx^7 + Cx^9 + Dx^{11} + Ex^{13} + \ldots,$$
$$u = \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}x^3 + \mathfrak{C}x^5 + \mathfrak{D}x^7 + \ldots,$$

ſo wird man folgende Gleichungen aufzulöſen haben:

I. $x^2(1+bx^2)d^2v + x(-5+ex^2)dxdv + (5+gx^2)vdx^2 = 0$

und

II. $\left.\begin{array}{r} x^2(1+bx^2)d^2u + x(-5+ex^2)dxdu + (5+gx^2)udx^2 \\ +2x(1+bx^2)dxdv - (1+bx^2)vdx^2 \\ +(-5+ex^2)vdx^2 \end{array}\right\} = 0.$

Die erſtere dieſer Gleichungen führt auf folgende:

$$\left.\begin{array}{rrrrr} 5.4Ax^5 & +7.6Bx^7 & +9.8Cx^9 & +11.10Dx^{11} & +\ldots \\ -5.5A & -5.7B & -5.9C & -5.11D & \\ +5A & +5B & +5C & +5D & \\ & +5.4Ab & +7.6Bb & +9.8Cb & \\ & +5Ae & +7Be & +9Ce & \\ & +Ag & +Bg & +Cg & \end{array}\right\} = 0;$$

die letzte Gleichung aber gibt:

$$\left.\begin{array}{rrrrr} & +2.3\mathfrak{B}x^3 & +4.5\mathfrak{C}x^5 & +6.7\mathfrak{D}x^7 & +8.9\mathfrak{E}x^9+\ldots \\ -5\mathfrak{A}x & -5.3\mathfrak{B} & -5.5\mathfrak{C} & -5.7\mathfrak{D} & -5.9\mathfrak{E} \\ -5A & +5\mathfrak{B} & +5\mathfrak{C} & +5\mathfrak{D} & +5\mathfrak{E} \\ & & +2.3\mathfrak{B}b & +4.5\mathfrak{C}b & +6.7\mathfrak{D}b \\ & +\mathfrak{A}e & +3\mathfrak{B}e & +5\mathfrak{C}e & +7\mathfrak{D}e \\ & +\mathfrak{A}g & +\mathfrak{B}g & +\mathfrak{C}g & +\mathfrak{D}g \\ & & +2.5A & +2.7B & +2.9C \\ & & -6A & -6B & -6C \\ & & & +2.5Ab & +2.7Bb \\ & & & -Ab & -Bb \\ & & & +Ae & +Be \end{array}\right\} = 0,$$

und demnach wird

	oder
$12B + A(20b + 5e + g) = 0$	$2.6B + A(4.5b + 5e + g) = 0$
$32C + B(42b + 7e + g) = 0$	$4.8C + B(6.7b + 7e + g) = 0$
$60D + C(72b + 9e + g) = 0$	$6.10D + C(8.9b + 9e + g) = 0$
ꝛc.	ꝛc.

Ferner findet man:

$$-4\mathfrak{B} + \mathfrak{A}(e + g) = 0,$$
$$9\mathfrak{C} + \mathfrak{B}(2.3b + 3e + g) + 4A = 0,$$
$$2.6\mathfrak{D} + \mathfrak{C}(4.5b + 5e + g) + 8B + A(9b + e) = 0,$$
$$4.8\mathfrak{E} + \mathfrak{D}(6.7b + 7e + g) + 12C + B(13b + e) = 0$$
ꝛc. ꝛc.

Aus den ersteren Formeln findet man B, C, D... durch A ausgedrückt, aus der zweyten der letzteren Gleichungen aber findet man $\mathfrak{B} = \frac{-4A}{2.3b + 3e + g}$, aus der ersteren aber $\mathfrak{A} = \frac{4\mathfrak{B}}{e + g}$, und dann kann man C nach Belieben annehmen, woraus sich dann die übrigen Coefficienten D, E, F,... ergeben.

Anmerkung.

§. 980. Dieses Beyspiel gibt uns Gelegenheit, einige besondere Erscheinungen zu bemerken. Obgleich nämlich das vollständige Integrale im Allgemeinen lx enthält, so erscheint dieses dennoch in gewissen Fällen frey von diesem Logarithmus; wenn nämlich erstens $g = -e$ ist, so wird $\mathfrak{B} = 0$, während $\mathfrak{A}$ unbestimmt bleibt; dann aber muß man, weil $\mathfrak{B} = 0$ ist, $A = 0$, $C = 0$,... und daher auch $v = 0$ nehmen. Ferner aber wird seyn:

$$2.6\mathfrak{D} + 4\mathfrak{C}(5b + e) = 0,$$
$$4.8\mathfrak{E} + 6\mathfrak{D}(7b + e) = 0,$$
$$6.10\mathfrak{F} + 8\mathfrak{E}(9b + e) = 0,$$
ꝛc.

wo $\mathfrak{C}$ die zweyte willkürliche Constante bezeichnet, und es wird der Gleichung

$$x^2(1 + bx^2)\,d^2y + x(-5 + ex^2)\,dx\,dy + (5 - ex^2)\,y\,dx^2 = 0$$

folgendes vollständige Integrale entsprechen:

$$y = \mathfrak{A}x + \mathfrak{C}x^5 + \mathfrak{D}x^7 + \mathfrak{E}x^9 + \mathfrak{F}x^{11} + \ldots;$$

welches sogar in einen endlichen Ausdruck übergeht, wenn

$$e = -(2k+5)b$$

wird, wo für k die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, ... zu nehmen ſind.

Zweytens, wenn

$$2.3b + 3e + g = 0 \quad \text{oder} \quad g = -6b - 3e$$

iſt, ſo wird $\mathfrak{B} = -\frac{1}{2}\mathfrak{A}(3b+e)$, dann aber iſt $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, ... alſo auch $v = 0$. Ferner aber findet man

$\mathfrak{D} = -\frac{1}{8}\mathfrak{C}(7b+e)$, $\mathfrak{E} = -\frac{1}{8}\mathfrak{D}(9b+e)$, $\mathfrak{F} = -\frac{1}{10}\mathfrak{E}(11b+e)$, ...

und daher wird

$$y = \mathfrak{A}x - \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}(3b+e)x^3 + \mathfrak{C}x^5 + \mathfrak{D}x^7 + \mathfrak{E}x^9 + \ldots,$$

wo $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ unſerer Willkür überlaſſen bleiben.

Drittens, wenn

$$4.5b + 5e + g = 0 \quad \text{oder} \quad g = -20b - 5e$$

iſt, wird erſtens $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$, ... und daher $v = Ax^5$, dann aber iſt

$\mathfrak{B} = -\mathfrak{A}(5b+e)$; $-\mathfrak{B}(14b+2e) + 4\mathfrak{A} = 0$ oder $\mathfrak{B} = \frac{2A}{7b+e}$

und daher $A = -\frac{1}{2}\mathfrak{A}(5b+e)(7b+e)$, ferner

$$2.6\mathfrak{D} + A(9b+e) = 0,$$
$$4.8\mathfrak{E} + 2\mathfrak{D}(11b+e) = 0,$$
$$6.10\mathfrak{F} + 2\mathfrak{E}(13b+e) = 0,$$
$$\text{&c.}$$

Durch $\mathfrak{A}$ beſtimmen ſich alſo die Coefficienten $\mathfrak{B}$, A, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, ... und $\mathfrak{C}$ bleibt ebenfalls unſerer Willkür überlaſſen; alſo wird in dieſem Falle das vollſtändige Integrale ſeyn:

$$y = Ax^5lx + \mathfrak{C}x^3 + \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}x^3 + * + \mathfrak{D}x^7 + \mathfrak{E}x^9 + \ldots,$$

welcher Ausdruck endlich wird, ſo oft $(2k+5)b + e = 0$ iſt.

Beyſpiel 4.

§. 981. Wenn in dem vorhergehenden Beyſpiele $e = -7b$ und $g = 15b$ iſt, ſo ſoll das vollſtändige Integrale der Gleichung:

$$(1+bx^2)d^2y - x(5+7bx^2)dxdy + 5(1+3bx^2)ydx^2 = 0,$$

in einer algebraiſchen Form aufgeſtellt werden.

Es wird alſo ſeyn: $\mathfrak{B} = +2\mathfrak{A}b$, $A = 0$, $\mathfrak{D} = 0$, $\mathfrak{E} = 0$, und daher $v = 0$ und $u = \mathfrak{A}x + 2\mathfrak{A}bx^3 + \mathfrak{C}x^5$. Nimmt man da-

her für A und C was immer für conſtante Größen, ſo wird da
ſtändige Integrale ſeyn:

$$y = Ax(1 + 2bx^2) + Cx^5.$$

Alſo ſind

$y = ax(1 + 2bx^2)$; $y = ax^5$; $y = ax(1 + bx^2$
particuläre Integralien.

Zuſatz 1.

§. 982. Wird $y = e^{\int z\,dx}$ geſetzt, ſo daß $z = \frac{dy}{y\,dx}$ iſt,
die Differenzialgleichung des erſten Grades

$$x^2(1 + bx^2)\,dz + x^2(1 + bx^2)\,z^2\,dx - x(5 + 7bx^2) + 5(1 + 3bx^2)\,dx$$

zum vollſtändigen Integrale die Gleichung:

$$z = \frac{A(1 + 6bx^2) + 5Cx^4}{Ax(1 + 2bx^2) + Cx^5}.$$

Zuſatz 2.

§. 983. Die vorgelegte Differenzialgleichung des zweyten
des aber wird integrabel gemacht, wenn man ſie durch $x^2(1 +$
dividirt, und das vollſtändige Integrale wird ſeyn:

$$\frac{x\,dy - 5y\,dx}{x(1 + bx^2)} = C\,dx \text{ oder } dy - \frac{5y\,dx}{x} = C\,dx(1 +$$

und wenn man dieſe durch x^5 dividirt, ſo erhält man zum Integr

$$\frac{y}{x^5} = \frac{-C}{4x^4} - \frac{bC}{2x^2} + D \text{ oder}$$

$$y = -\tfrac{1}{4}Cx(1 + 2bx^2) + Dx^5,$$

wie vorhin.

Anmerkung.

§. 984. Es mangelt uns aber noch die vollſtändige Integr
unſerer allgemeinen Gleichung mittelſt ſteigender Reihen, für den
wo $a = 0$ und daher $\lambda c + f = 0$ iſt, woraus für den Expon
λ der einzige Werth $\lambda = \frac{-f}{c}$ gefunden wird, welcher nur ein
culäres Integrale gibt, und auch dieß wird der Fall nicht ſeyn,
$c = 0$ iſt. Weil aber in dieſen Fällen $a = 0$ iſt, ſo muß nothw
der Coefficient b vorhanden ſeyn, aus welchem ſich das vollſtä
Integrale durch fallende Reihen wird ableiten laſſen, da die Gleic

$\lambda - 1) b + \lambda c + g = 0$ immer zwey Wurzeln enthält, aus chen dann eine doppelte Reihe gefunden wird. Es wird ſich aber h hier eine ähnliche Unbequemlichkeit entgegenſtellen, wenn die bey- Wurzeln oder Werthe von λ entweder gleich ausfallen, oder eine ch den Exponenten n theilbare Differenz darbiethen. Aber auch ſem Übelſtande kann auf ähnliche Weiſe, wie wir es in dieſem Pro- me ſchon gethan haben, dadurch abgeholfen werden, daß wir eine $l x$ multiplicirte Reihe einführen; und es würde überflüſſig ſeyn, e Entwickelung hier zu wiederholen. Es bleibt uns demnach nur h zu zeigen übrig, wie man das vollſtändige Integrale durch unend- e Reihen ausdrücken müſſe, wenn die beyden Werthe von λ ſowohl ſteigende als auch für fallende Reihen unmöglich werden.

Aufgabe 125.

§. 985. Wenn die Differenzialgleichung des zwey- n Grades

$$(a + bx^n)\, d^2y + x(c + ex^n)\, dxdy + (f + gx^n)\, ydx^2 = 0$$

geben iſt, und es ereignet ſich, daß die Gleichung

$$\lambda(\lambda - 1)\, a + \lambda c + f = 0$$

aginäre Wurzeln hat, das vollſtändige Integrale r vorgelegten Gleichung durch ſteigende Reihen zu drücken.

Auflöſung.

Aus dem (§. 971) Angeführten folgt, daß man in dieſem Falle en müſſe:

$$y = v \sin. \mu lx + u \cos. \mu lx,$$

daher wird

$$y = \left(dv - \frac{\mu u\, dx}{x}\right) \sin. \mu lx + \left(\frac{\mu v\, dx}{x} + du\right) \cos. \mu lx$$

$$y = \left(d^2v - \frac{2\mu\, dx\, du}{x} + \frac{\mu u\, dx^2}{x^2} - \frac{\mu^2 v\, dx^2}{x^2}\right) \sin. \mu lx$$

$$+ \left(d^2u + \frac{2\mu\, dx\, dv}{x} - \frac{\mu v\, dx^2}{x^2} - \frac{\mu^2 u\, dx^2}{x^2}\right) \cos. \mu lx.$$

Werden dieſe Werthe nun ſubſtituirt, und läßt man ſowohl jene lieder, welche $\sin. \mu lx$, als auch jene, welche $\cos. \mu lx$ als Factor halten, für ſich verſchwinden, ſo wird man die zwey nachſtehende leichungen erhalten:

$$\left.\begin{array}{l} \text{I. } x^2(a+bx^n)d^2v + x(c+ex^n)dxdv + (f+gx^n)vdx^2 \\ \qquad -2\mu x(a+bx^n)dxdu - \mu^2(a+bx^n)vdx^2 \\ \qquad +\mu(a+bx^n)udx^2 \\ \qquad -\mu(c+ex^n)udx^2 \end{array}\right\} = 0.$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{II. } x^2(a+bx^n)d^2u + x(c+ex^n)dxdu + (f+gx^n)udx^2 \\ \qquad +2\mu x(a+bx^n)dxdv - \mu^2(a+bx^n)udx^2 \\ \qquad -\mu(a+bx^n)vdx^2 \\ \qquad +\mu(c+ex^n)vdx^2 \end{array}\right\} = 0.$$

Nun wollen wir für v und u folgende steigende Reihen annehmen:

$$v = Ax^\lambda + Bx^{\lambda+n} + Cx^{\lambda+2n} + Dx^{\lambda+3n} + \ldots$$
$$u = \mathfrak{A}x^\lambda + \mathfrak{B}x^{\lambda+n} + \mathfrak{C}x^{\lambda+2n} + \mathfrak{D}x^{\lambda+3n} + \ldots$$

so verwandelt sich durch Substitution dieser Reihen die erstere Gleichung in folgende:

$$\begin{array}{lll} \lambda(\lambda-1)Aax^\lambda & +(\lambda+n)(\lambda+n-1)Bax^{\lambda+n} & +(\lambda+2n)(\lambda+2n-1)Cax^{\lambda+2n} \\ & +\lambda(\lambda-1)Ab & +(\lambda+n)(\lambda+n-1)Bb \\ +\lambda Ac & +(\lambda+n)Bc & +(\lambda+2n)Cc \\ & +\lambda Ae & +(\lambda+n)Be \\ +Af & +Bf & +Cf \\ & +Ag & +Bg \\ -2\mu\lambda\mathfrak{A}a & -2\mu(\lambda+n)\mathfrak{B}a & -2\mu(\lambda+2n)\mathfrak{C}a \\ & -2\mu\lambda\mathfrak{A}b & -2\mu(\lambda+n)\mathfrak{B}b \\ -\mu^2Aa & -\mu^2Ba & -\mu^2Ca \\ & -\mu^2Ab & -\mu^2Bb \\ +\mu\mathfrak{A}a & +\mu\mathfrak{B}a & +\mu\mathfrak{C}a \\ & +\mu\mathfrak{A}b & +\mu\mathfrak{B}b \\ -\mu\mathfrak{A}c & -\mu\mathfrak{B}c & -\mu\mathfrak{C}c \\ & -\mu\mathfrak{A}e & -\mu\mathfrak{B}e. \end{array}$$

Hieraus erhält man nun leicht die zweyte Gleichung, wenn man die lateinischen und deutschen Buchstaben mit einander vertauscht, und überdieß das Zeichen der Zahl μ verändert.

In beyden Fällen erfordert also die erste Potenz x^λ die Gleichungen

$$A[\lambda(\lambda-1)a + \lambda c + f - \mu^2 a] - \mu\mathfrak{A}(2\lambda a - a + c) = 0,$$
$$\mathfrak{A}[\lambda(\lambda-1)a + \lambda c + f - \mu^2 a] + \mu A(2\lambda a - a + c) = 0,$$

dann aber müssen nothwendig die zwey Relationen Statt finden:

$$2\lambda a - a + c = 0 \quad \text{und}$$
$$\lambda(\lambda-1)a + \lambda c + f - \mu^2 a = 0.$$

Es wird daher $\lambda = \frac{1}{2} - \frac{c}{2a}$, und die Substitution dieses Wer-

thes gibt

$$-a\left(\frac{1}{4}-\frac{c^2}{4a^2}\right)+\frac{c}{2}-\frac{c^2}{2a}+f=\mu^2 a=-\frac{a}{4}+\frac{c}{2}-\frac{c^2}{4a}+f$$

oder

$$\mu^2 a=\frac{4af-(a-c)^2}{4a}, \text{ und daher}$$

$$\mu=\frac{\sqrt{4af-(a-c)^2}}{2a} \text{ und } \lambda=\frac{a-c}{2a}.$$

Hieraus ist klar, daß diese Auflösung Statt finde, wenn $4af > (a-c)^2$ ist, in welchem Falle die vorhergehende Auflösung unmöglich wurde. Hier aber bleiben die Größen A und $\mathfrak{A}$ willkürlich.

Das Glied, welches $x^{\lambda+n}$ enthält, erfordert aber in beyden Fällen folgende Gleichungen:

$$B[(\lambda+n)(\lambda+n-1)a+(\lambda+n)c+f-\mu^2 a]$$
$$+A[\lambda(\lambda-1)b+\lambda e+g-\mu^2 b]$$
$$-\mu\mathfrak{B}[2(\lambda+n)a-a+c]-\mu\mathfrak{A}(2\lambda b-b+e)=0,$$

und

$$\mathfrak{B}[(\lambda+n)(\lambda+n-1)a+(\lambda+n)c+f-\mu^2 a]$$
$$+\mathfrak{A}[\lambda(\lambda-1)b+\lambda e+g-\mu^2 b]$$
$$+\mu B[2(\lambda+n)a-a+c]+\mu A(2\lambda b-b+e)=0.$$

Sey Kürze halber

$$(\lambda+n)(\lambda+n-1)a+(\lambda+n)c+f-\mu^2 a=\alpha,$$
$$\lambda(\lambda-1)b+\lambda e+g-\mu^2 b=\beta,$$
$$2(\lambda+n)a-a+c=2na=\gamma,$$
$$2\lambda b-b+e=\delta,$$

so erhalten wir

$$B\alpha+A\beta-\mu\mathfrak{B}\gamma-\mu\mathfrak{A}\delta=0 \text{ und}$$
$$\mathfrak{B}\alpha+\mathfrak{A}\beta+\mu B\gamma+\mu A\delta=0,$$

und hieraus folgt:

$$B=\frac{-A(\alpha\beta+\mu^2\gamma\delta)+\mu\mathfrak{A}(\alpha\delta-\beta\gamma)}{\alpha^2+\mu^2\gamma^2} \text{ und}$$
$$\mathfrak{B}=\frac{-\mathfrak{A}(\alpha\beta+\mu^2\gamma\delta)-\mu A(\alpha\delta-\beta\gamma)}{\alpha^2+\mu^2\gamma^2}.$$

Aus den angenommenen Werthen aber erhält man;

$$\alpha=n^2 a;\quad \beta=\frac{(ae-bc)(a-c)}{2a^2}-\frac{bf}{a}+g;\quad \gamma=2na;$$
$$\delta=\frac{ae-bc}{a};$$

daher laſſen ſich aus den für A und $\mathfrak{A}$ angenommenen Werthen die Größen B und $\mathfrak{B}$ beſtimmen, und hieraus ferner die Größen C, $\mathfrak{C}$, D, $\mathfrak{D}$, u. ſ. w.

Beyſpiel 1.

§. 986. Sey $c = a$ und $f = a$, damit $\mu = 1$ werde; man beſtimme das Integrale der Gleichung

$$x^2(a + bx^n)\,d^2y + x(a + ex^n)\,dx\,dy + (a + gx^n)\,y\,dx^2 = 0.$$

Hier wird alſo $\lambda = 0$ und $\mu = 1$ ſeyn; wird daher

$$y = v \sin. lx + u \cos. lx$$

geſetzt, und nimmt man für v und u die Reihen

$$v = A + Bx^n + Cx^{2n} + Dx^{3n} + \ldots$$
$$u = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x^n + \mathfrak{C}x^{2n} + \mathfrak{D}x^{3n} + \ldots$$

ſo kann man die Coefficienten A und $\mathfrak{A}$ nach Belieben annehmen. Weil

$$\alpha = n^2a, \quad \beta = g - b, \quad \gamma = 2na \quad \text{und} \quad \delta = e - b$$

iſt, ſo erhält man zuerſt aus jenen Gleichungen

$$B = \frac{-A[n^2a(g-b) + 2na(e-b)] + \mathfrak{A}[n^2a(e-b) - 2na(g-b)]}{n^4a^2 + 4n^2a^2}$$

oder

$$B = \frac{-A[n(g-b) + 2(e-b)] + \mathfrak{A}[n(e-b) - 2(g-b)]}{na(n^2+4)}$$

und

$$\mathfrak{B} = \frac{-\mathfrak{A}[n(g-b) + 2(e-b)] - A[n(e-b) - 2(g-b)]}{na(n^2+4)}.$$

Für die folgenden Coefficienten werden wir erhalten:

$$C[2n(2n-1)a + 2na + a - a] + B[n(n-1)b + ne + g - b]$$
$$- \mathfrak{C}(4na - a + a) - \mathfrak{B}(2nb - b + e) = 0, \text{ oder}$$
$$4n^2Ca + B[(n^2 - n - 1)b + ne + g] - 4n\mathfrak{C}a$$
$$- \mathfrak{B}[(2n-1)b + e] = 0 \text{ und}$$
$$4n^2\mathfrak{C}a + \mathfrak{B}[(n^2 - n - 1)b + ne + g] + 4nCa$$
$$+ B[(2n-1)b + e] = 0.$$

Multiplicirt man die erſtere dieſer beyden Gleichungen mit n und addirt ſie zu der zweyten, ſo findet man

$$4n(n^2+1)Ca + B[(n^3 - n^2 + n - 1)b + (n^2+1)e + ng]$$
$$+ \mathfrak{B}[-(n^2+1)b + g] = 0, \text{ alſo iſt}$$

$$C = \frac{-B[(n-1)(n^2+1)b + (n^2+1)e + ng] + \mathfrak{B}[(n^2+1)b - g]}{4na(n^2+1)}$$

und

$$\mathfrak{C} = \frac{-\mathfrak{B}[(n-1)(n^2+1)b+(n^2+1)e+ng]-B[(n^2+1)h-g]}{4na(n^2+1)}.$$

Ferner wird man erhalten:

$$9n^2Da + C[(4n^2-2n-1)b+2ne+g] - 6nDa - \mathfrak{C}[(4n-1)b+e] = 0,$$

$$9n^2Da + \mathfrak{C}[(4n^2-2n-1)b+2ne+g] + 6nDa + C[(4n-1)b+e] = 0.$$

Multiplicirt man die erste Gleichung mit $3n$, die zweyte aber mit 2, so erhält man durch Verbindung der beyden Producte:

$$3n(9n^2+4)Da + C[(12n^3-6n^2+5n-2)b+2(3n^2+1)e+3ng] + \mathfrak{C}[(-4n^2-n-2)b+ne+2g] = 0,$$

und hieraus folgern wir

$$D = \frac{\{-C[(12n^3-6n^2+5n-2)b+2(3n^2+1)e+3ng] + \mathfrak{C}[(4n^2+n+2)b-nc-2g]\}}{3n(9n^2+4)a},$$

$$\mathfrak{D} = \frac{\{-\mathfrak{C}[(12n^3-6n^2+5n-2)b+2(3n^2+1)e+3ng] - C[(4n^2+n+2)b-ne-2g]\}}{3n(9n^2+4)a}.$$

Im Allgemeinen aber werden durch was immer für zwey Coefficienten M und $\mathfrak{M}$ die folgenden N und $\mathfrak{N}$ durch nachstehende Formeln bestimmt:

$$kn(k^2n^2+4)Na + M\{[k(k-1)^2n^3-k(k-1)n^2+(3k-4)n-2]b + k(k-1)n^2e+2e+kng] - \mathfrak{M}[[2(k-1)n^2+(k-2)n+2]b-(k-2)ne-2g] = 0,$$

$$kn[k^2n^2+4]\mathfrak{N}a + \mathfrak{M}[[k(k-1)^2n^3-k(k-1)n^2+(3k-4)n-2]b + k(k-1)n^2e+2e+kng] + M[[2(k-1)n^2+(k-2)n+2]b-(k-2)ne-2g] = 0.$$

Zusatz 1.

§. 987. Sind die Größen b, e, g so beschaffen, daß zwey zusammengehörige Größen N und $\mathfrak{N}$ verschwinden, so werden alle folgenden verschwinden, und das vollständige Integrale wird in einer endlichen Form erscheinen. Sollen B und $\mathfrak{B}$ verschwinden, so muß man

$$2(g-b) = n(e-b) \quad \text{und} \quad n(g-b) = -2(e-b)$$

ſetzen; dann wird $g = e = b$, und die vorgelegte Gleichung wird den Factor $a + bx^n$ enthalten.

Zuſatz 2.

§. 988. Im Allgemeinen aber wird das Integrale eine endliche Form annehmen, wenn k irgend eine ganze poſitive Zahl bezeichnet, und

$$g = [(k-1)n^2 + \tfrac{1}{2}(k-2)n + 1]b - \tfrac{1}{2}(k-2)ne$$

iſt; dann iſt

$$e = -[2(k-1)n - 1]b,$$

und daher wird

$$g = [(k-1)^2 n^2 + 1]b.$$

Beyſpiel 2.

§. 989. Wenn für $n = 1$, $e = -b$ und $g = 2b$ wird, ſo ſuche man das vollſtändige Integrale folgender Gleichung:

$$x^2(a+bx)\,d^2y + x(a-bx)\,dx\,dy + (a+2bx)\,y\,dx^2 = 0.$$

Aus den ſo eben gefundenen Formeln erhalten wir

$$B = \frac{-A(g+2e-3b) + \mathfrak{A}(e+b-2g)}{5a} = \frac{3Ab - 4\mathfrak{A}b}{5a}$$

und

$$\mathfrak{B} = \frac{3\mathfrak{A}b + 4Ab}{5a};$$ dann aber wird

$$C = \frac{-B(2e+g) + \mathfrak{B}(2b-g)}{8a} = 0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{C} = 0.$$

Wir werden deßhalb erhalten:

$$v = A + \frac{(3A - 4\mathfrak{A})b}{5a}x \quad \text{und} \quad u = \mathfrak{A} + \frac{(3\mathfrak{A} + 4A)b}{5a}x,$$

und hieraus ergibt ſich als vollſtändiges Integrale die Gleichung:

$$y = A\,\text{sin.}\,lx + \mathfrak{A}\,\text{cos.}\,lx + \frac{bx}{5a}[(3A - 4\mathfrak{A})\,\text{sin.}\,lx + (3\mathfrak{A} + 4A)\,\text{cos.}\,lx].$$

Zuſatz 1.

§. 990. Für $\mathfrak{A} = 0$ erhält man das particuläre Integrale

$$y = A\left[\text{sin.}\,lx + \frac{3bx}{5a}\,\text{sin.}\,lx + \frac{4bx}{5a}\,\text{cos.}\,lx\right];$$

aber $A = o$, ſo erhält man ein anderes particuläres Integrale, nämlich:

$$y = A\left[\cos. lx - \frac{4bx}{5a}\sin. lx + \frac{3bx}{5a}\cos. lx\right].$$

Zuſatz 2.

§. 991. Wird $y = e^{\int s\,dx}$ geſetzt, ſo verwandelt ſich unſere Gleichung in folgende:

$$(a + bx)\,ds + x^2(a + bx)\,s^2\,dx + x(a - bx)\,s\,dx + (a + 3bx)\,dx = o,$$

deren Integrale erhalten wird, wenn man hieraus $s = \frac{dy}{y\,dx}$ beſtimmt. Dieſe Gleichung iſt noch mehrerer anderer Formen fähig.

Anmerkung.

§. 992. Auf ähnliche Art bewerkſtelliget man auch die Integration durch fallende Reihen, wenn die Exponenten der einzelnen Glieder imaginär werden ſollten; allein es wird gar nicht nothwendig ſeyn, ſie abgeſondert auseinander zu ſetzen. Das Geſagte lehrt deutlich genug, welche Vorſichten man bey der Auflöſung der Gleichungen mittelſt unendlicher Reihen anzuwenden habe. Der vorzüglichſte Nutzen dieſer Entwickelungen beſteht darin, daß man Differenzialgleichungen des höhern Grades aufſtellen kann, von denen ſich wenigſtens ein particuläres Integrale in algebraiſcher Form angeben läßt, welche Fälle wir oben, §. 969, angegeben haben. Eine ſolche Integration mittelſt unendlicher Reihen kann auf gleiche Weiſe ausgedehnt werden auf Gleichungen von der Form:

$$(a + bx^n + \beta x^{2n})\,d^2y + x(c + ex^n + \varepsilon x^{2n})\,dx\,dy + (f + gx^n + \gamma x^{2n})\,y\,dx^2 = o.$$

Hier wird aber jedes Glied der geſuchten Reihe durch die zwey vorhergehenden Glieder beſtimmt, ſo daß wenn zwey Nachbarglieder verſchwinden, auch alle nachfolgenden Theile $= b$ werden. Wenn aber ein von y freyes Glied erſcheinen ſollte, ſo wird die Auflöſung in jenen leichter, weßhalb wir uns dabey nicht aufhalten wollen. Wäre z. B. die Gleichung gegeben:

$$x^2d^2y - x\,dx\,dy + ax^ny\,dx^2 = bx^m\,dx^2,$$

muß die Reihe mit der Potenz x^m beginnen, indem man

$$y = Ax^m + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} + Dx^{m+3n} + \ldots$$

ſetzt, und daher wird

$$m(m-1)Ax^{m}+(m+n)(m+n-1)Bx^{m+n}+(m+2n)(m+2n-1)Cx^{m+2n}+\ldots$$
$$-mA\quad-(m+n)B\qquad-(m+2n)C$$
$$-b\quad+Aa\qquad+Ba,$$

folglich

$$A=\frac{b}{m(m-2)};\quad B=\frac{-Aa}{(m+n)(m+n-2)};\quad C=\frac{-Ba}{(m+2n)(m+2n-2)};$$

u. ſ. w.;

wobey zwar vieles zu bemerken iſt, was aber nach den oben ertheilten Vorſchriften keine Schwierigkeit mehr machen kann. Es iſt aber hierbey vorzüglich gut, die vorgelegte Gleichung mittelſt einer Subſtitution in andere zu verwandeln, deren Auflöſung mittelſt Reihen einfacher wird; weil aber dieſer Zweck auf verſchiedene Arten erreicht werden kann, ſo glaubte ich dieſen Gegenſtand im nächſten Kapitel mit beſonderer Sorgfalt behandeln zu müſſen, und zwar die Gleichungen von der Form

$$Ld^{2}y+Mdxdy+Nydx^{2}=0$$

näher zu betrachten, weil für Gleichungen von anderen Formen eine ſolche Transformation ſelten Statt findet.

Kapitel IX.

Von der Transformation der Differenzialgleichungen des zweyten Grades von der Form:

$$Ld^2y + Mdxdy + Nydx^2 = o.$$

Aufgabe 126.

§. 993. Die Differenzialgleichung des zweyten Grades von der Form

$$Ld^2y + Mdxdy + Nydx^2 = o,$$

in welcher die Größen L, M, N beliebige Functionen von x bezeichnen, und wo das Element dx constant gesetzt ist, durch Hülfe der Substitution $y = e^{\int P dx} z$ auf eine andere Form zu bringen.

Auflösung.

Da hier $\frac{dy}{y} = Pdx + \frac{dz}{z}$ ist, so wird man durch Differenziation erhalten:

$$\frac{d^2y}{y} - \frac{dy^2}{y^2} = dxdP + \frac{d^2z}{z} - \frac{dz^2}{z^2}, \text{ also}$$

$$\frac{d^2y}{y} = \frac{d^2z}{z} + \frac{2Pdxdz}{z} + dxdP + P^2dx^2.$$

Weil nun unsere Gleichung

$$\frac{Ld^2y}{y} + \frac{Mdxdy}{y} + Ndx^2 = o$$

ist, so erhält man nach gemachter Substitution:

$$\frac{Ld^2z}{z} + \frac{2LPdxdz}{z} + LdxdP + LP^2dx^2 + \frac{Mdxdz}{z} + MPdx^2 + Ndx^2 = o,$$

oder wenn man mit z multiplicirt:

$$Ld^2z + (2LP + M)\,dxdz + zdx(LdP + LP^2dx + MPdx + Ndx) = o,$$

wo man für P jede beliebige Function von x nehmen kann, und daher werden zwischen den zwey Veränderlichen x und z unzählige Gleichungen erhalten.

Zusatz 1.

§. 994. Wenn man also diese transformirte Gleichung integriren, oder durch eine Reihe auflösen kann, so wird man aus dem gefundenen Werthe für z erhalten $y = e^{\int P dx} z$.

Zusatz 2.

§. 995. Die transformirte Gleichung ist der vorgelegten ähnlich, weil in derselben die Veränderliche z mit ihren Differenzialien dz und $d^2 z$ durchaus nur eine Dimension hat; gerade so, wie y in der vorgelegten Gleichung.

Zusatz 3.

§. 996. Wenn es sich ereignen sollte, daß beyde Gleichungen, sowohl die vorgelegte als die transformirte, sich gleich bequem mittelst Reihen auflösen lassen, so können dann auf diese Art mehrere Auflösungen derselben Gleichung aufgestellt werden.

Anmerkung. 1.

§. 997. Da die Gleichungen, welche bequem mittelst Reihen auflösbar sind, unter folgende Form subsumirt werden können:

$x^2 (a + bx^n) d^2 y + x(c + ex^n) dx dy + (f + gx^n) y dx^2 = 0$

wobey

$L = x^2 (a + bx^n)$; $M = x(c + ex^n)$; $N = f + gx^n$

ist, so muß man, um der transformirten Gleichung eine ähnliche Form zu verschaffen,

$$LP = x(\mu + \nu x^n), \quad \text{also} \quad P \frac{\mu + \nu x^n}{x(a + bx^n)}$$

setzen, es wird daher seyn:

$$dP = \frac{-\mu a - \mu(n+1) bx^n + \nu(n-1) ax^n - \nu bx^{2n}}{x^2 (a + bx_n)^2} dx,$$

und demnach $LdP + LP^2 dx + MPdx =$

$$\frac{\left\{\begin{array}{llll} -\mu a & -(n+1)\mu bx^n & +(n-1)\nu ax^n & -\nu bx^{2n} \\ +\mu^2 & +2\mu\nu x^n & & +\nu^2 x^{2n} \\ +\mu c & +\mu ex^n & +\nu cx^n & +\nu ex^{2n} \end{array}\right\}}{a + bx^n}$$

wo der Zähler durch $a + bx^n$ theilbar seyn muß. Man setze den Quotienten $= \mu h + \nu k x^n$, so wird man erhalten

$$\mu = a - c + ah; \quad \nu = b - e + bk,$$

und überdieß

$$\mu\nu - (n+1)\mu b + (n-1)\nu a + \mu e + \nu c = \mu bh + \nu ak.$$

Werden hier die erſteren Werthe ſubſtituirt, ſo findet man:

$$(h - k + n)(bc - ae) = nab(h - k) + ab(h - k)^2,$$

und daher wird entweder

$$h - k = \frac{bc - ae}{ab} \quad \text{oder} \quad h - k = -n.$$

Eine der Größen h und k bleibt alſo willkürlich, und die transformirte Gleichung wird

$$(a + bx^n)\, d^2z + x\,[2\mu + c + (2\nu + e)\,x^n]\, dx\,dz + [f + \mu h + (g + \nu k)\,x^n]\, z\,dx^2 = 0.$$

Die Auflöſung dieſer Gleichung erfordert dieſelben Potenzen von x, man mag ſteigende oder fallende Reihen nehmen. Man hat aber folgende Subſtitution zu machen:

$$y = x^{\frac{a-c}{a} + h}\,(a + bx^n)^{\frac{bc - ae}{nab} - \frac{(h-k)}{n}}\, z,$$

wo man $h - k = -n$ nehmen muß, damit nicht eine Potenz von x darin erſcheint. Es iſt hier gleichgültig wie man h nimmt; ſetzt man alſo $h = 0$, ſo wird $k = n$, und man hat die Subſtitution zu machen:

$$y = x^{\frac{a-c}{a}}\,(a + bx^n)^{\frac{bc - ac}{nab} + 1}\, z,$$

wodurch man auf folgende Gleichung geleitet wird:

$$(a + bx^n)\, d^2z + x\,[2a - c + [2(n+1)b - e]\,x^n]\, dx\,dz + [f + [n(n+1)b - ne + g]\,x^n]\, z\,dx^2 = 0.$$

Anmerkung 2.

§. 998. Wir haben oben, §. 970, geſehen, daß die zwiſchen x und y vorgelegte Gleichung ein algebraiſches Integrale zulaſſe, wenn

$$\frac{c}{2a} - \frac{e}{2b} \cdot\cdot \frac{\sqrt{(a-c)^2 - 4af}}{2a} \cdot\cdot \frac{\sqrt{(b-e)^2 - 4bg}}{2b} = k : n,$$

und wenn dieſe Gleichung nach der Transformation auf eine ähnliche Art behandelt wird, ſo wird ſich ein algebraiſches Integrale angeben laſſen, wenn

$$-\frac{c}{2a} + \frac{e}{2b} \cdot\cdot \frac{\sqrt{(a-c)^2 - 4af}}{2a} \cdot\cdot \frac{\sqrt{(b-e)^2 - 4bg}}{2b} - n = k : n$$

iſt. Verbindet man dieſe beyden Bedingungen mit einander, ſo kann

man ſchließen, daß ein algebraiſches Integrale Genüge leiſte, w nur die Formel

$$\frac{bc-ae}{2ab} \cdot \frac{\sqrt{(a-c)^2-4af}}{2a} \cdot \frac{\sqrt{(b-e)^2-4bg}}{2b}$$

durch den Exponenten n theilbar iſt. Ich habe hier das Zeiche gebraucht, um die Zweydeutigkeit des Wurzelzeichens (den poſit und negativen Werth) anzudeuten. Setzen wir daher

$$f = \frac{(a-c)^2-h^2}{4a} \quad \text{und} \quad g = \frac{(b-e)^2-k^2}{4b},$$

ſo findet die Integrabilität Statt, ſo oft der Ausdruck

$$\frac{bc-ae \pm bh \pm ak}{2nab}$$

eine ganze poſitive oder negative Zahl bezeichnet.

Beyſpiel.

§. 999. Es ſey die Gleichung gegeben

$x^2(1-x^2)d^2y + x(1+2mx^2)dxdy - m(m+1)x^2ydx^2 =$

man beſtimme die Fälle, in welchen man ein algeb ſches, wenigſtens particuläres Integrale angeben ka

Hier iſt $a = 1$, $b = -1$, $c = 1$, $e = 2m$, $f = g = -m(m+1)$ und $n = 2$; hieraus finden wir

$$h = \sqrt{(a-c)^2-4af} = 0, \text{ und}$$

$$k = \sqrt{(b-e)^2-4bg} = \sqrt{(2m+1)^2-4m(m+1)}$$

das iſt $k = \pm 1$.

Der Ausdruck $\frac{-1-2m\pm 1}{-4}$ iſt alſo gleich einer ganzen Z und hieraus ergeben ſich für m zwey Fälle; es iſt nämlich entweda

$$2m+2 = \pm 4k' \quad \text{oder} \quad 2m = \pm 4k';$$

das iſt, entweder

$$m = \pm 2k' - 1 \quad \text{oder} \quad m = \pm 2k';$$

wenn demnach m eine ganze poſitive oder negative Zahl iſt, ſo k ein particuläres Integrale in algebraiſcher Form dargeſtellt werd Die Subſtitution aber, durch welche die transformirte Gleichung halten wird, iſt folgende:

$$y = (1-x^2)^{\frac{-1-2m}{-2}+1} z = (1-x^2)^{\frac{2m+3}{2}} z;$$

transformirte Gleichung ſelbſt aber iſt:

$$(1-x^2)\,d^2z + x[1-2(m+3)x^2]\,dx\,dz - (m+2)(m+3)x^2 z\,dx^2 = 0.$$

Es iſt einleuchtend, daß dieſe Gleichung aus jener entſteht, wenn $m-m-3$ ſtatt m ſchreibt. Dieſe Integralien ſelbſt aber wer- gefunden, wenn man wegen $\lambda^2 = 0$

$$y = A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6 + Ex^8 + \ldots$$

t, und daher wird

$$\left.\begin{array}{rrrrr} 2Bx^2 & +12Cx^4 & +30Dx^6 & +56Ex^8 & +\ldots \\ & -2B & -12C & -30D & \\ +2B & +4C & +6D & +8E & \\ & +4mB & +8mC & +12mD & \\ m(m+1)A & -m(m+1)B & -m(m+1)C & -m(m+1)D & \end{array}\right\} = 0.$$

Die Coefficienten beſtimmen ſich alſo auf folgende Art:

$$= \frac{m(m+1)}{4}A;\quad C = \frac{(m-1)(m-2)}{16}B;\quad D = \frac{(m-3)(m-4)}{36}C;\ldots$$

wenn

$$z = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x^2 + \mathfrak{C}x^4 + \mathfrak{D}x^6 + \mathfrak{E}x^8 + \ldots$$

ht wird, ſo erhält man:

$$= \frac{(m+2)(m+3)}{4}\mathfrak{A};\quad \mathfrak{C} = \frac{(m+4)(m+5)}{16}\mathfrak{B};\quad \mathfrak{D} = \frac{(m+6)(m+7)}{36}\mathfrak{C};\ldots$$

Aufgabe 127.

§. 1000. Die Differenzialgleichung des zweyten :abes

$$Ld^2y + Mdxdy + Nydx^2 = 0$$

t Hülfe der Subſtitution $\frac{dy}{y} = \frac{Pzdx^2}{dz}$ in eine andere n derſelben Form zu verwandeln.

Auflöſung.

Es fragt ſich hier nämlich, welche Function von x für P genom- n werden müſſe, damit, nach gemachter Subſtitution, die Verän- liche z mit ihren Differenzialien dz und d^2z durchaus nur eine Di- ſion erhalte. Da alſo $\frac{dy}{y} = \frac{Pzdx^2}{dz}$ iſt, ſo wird man durch Dif- nziation erhalten:

$$\frac{d^2y}{y} - \frac{dy^2}{y^2} = \frac{-Pzdx^2d^2z}{dz^2} + \frac{zdx^2dP}{dz} + Pdx^2 \text{ und}$$

$$\frac{d^2y}{y} = \frac{-Pzdx^2d^2z}{dz^2} + \frac{zdx^2dP}{dz} + Pdx^2 + \frac{P^2z^2dx^4}{dz^2};$$

durch Substitution dieser Werthe aber wird:

$$\frac{-LPzdx^2d^2z}{dz^2} + \frac{Lzdx^2dP}{dz} + LPdx^2 + \frac{LP^2z^2dx^4}{dz^2}$$

$$+ \frac{MPzdx^3}{dz} + Ndx^2 = 0$$

Setzen wir also $LP + N = 0$ oder $P = \frac{-N}{L}$, und multipliciren durch $\frac{-dz^2}{Pzdx^2}$, so werden wir erhalten:

$$Ld^2z - \frac{LdPdz}{P} - LPzdx^2 - Mdxdz = 0, \text{ oder}$$

$$Ld^2z - Mdxdz - \frac{LdNdz}{N} + dLdz + Nzdx^2 = 0.$$

Die vorgelegte Gleichung wird also durch die Substitution

$$\frac{dy}{y} = \frac{-Nzdx^2}{Ldz}$$

in nachstehende transformirt:

$$Ld^2z + \left(\frac{dL}{dx} - M - \frac{LdN}{Ndx}\right) dxdz + Nzdx^2 = 0.$$

Läßt sich also der Werth von z hieraus entwickeln, so wird man auch den Werth von y durch x ausgedrückt erhalten.

Zusatz 1.

§. 1001. Wird umgekehrt in dieser transformirten Gleichung $\frac{dz}{z} = \frac{-Nydx^2}{Ldy}$ gesetzt, so entsteht die vorgelegte Gleichung selbst. Diese beyden Gleichungen hängen also so unter einander zusammen, daß die eine aus der andern durch eine ähnliche Substitution abgeleitet wird.

Zusatz 2.

§. 1002. Setzt man in der transformirten Gleichung nach der erstern Substitution $\frac{dz}{z} = Qdx + \frac{dv}{y}$, so erhält man folgende neue transformirte Gleichung:

$$Ld^2v + \left(2LQ + \frac{dL}{dx} - M - \frac{LdN}{Ndx}\right) dxdv$$
$$+ vdx\left(LdQ + LQ^2dx + QdL - MQdx - \frac{LQdN}{N} + Ndx\right) = 0,$$

welche demnach aus der vorgelegten Gleichung selbst abgeleitet wird, wenn man $\frac{dy}{y} = \frac{-Nvdx^2}{L(dv+Qvdx)}$ setzt.

Anmerkung 1.

§. 1003. Wenn wir die beyden Substitutionen, deren wir uns in den beyden vorhergehenden Aufgaben bedient haben, mit einander verbinden, so erhalten wir die allgemeine Substitutionsformel

$$\frac{dy}{y} = \frac{Pdz + Qzdx}{Rdz + Szdx} dx,$$

und wird diese in der vorgelegten Gleichung

$$Ld^2y + Mdxdy + Nydx^2 = 0$$

substituirt, so müssen die Functionen P, Q, R, S so bestimmt werden, daß in der Gleichung, welche zum Vorschein kömmt, die Veränderliche mit ihren Differenzialien in keinem Gliede mehr als Eine Dimension hat. Es erscheinen aber Glieder, die mit dem Quadrate dz^2 multiplicirt sind, und um diese zu tilgen, muß man setzen

$$dx(P^2 + QR - PS) + L(RdP - PdR) + MPRdx + NR^2dx = 0, \text{ oder}$$

$$Q = \frac{PS}{R} - \frac{P^2}{R} - \frac{dP}{dx} + \frac{PdR}{Rdx} - \frac{MP}{L} - \frac{NR}{L},$$

nun aber kömmt man auf folgende Gleichung:

$$d^2z(PS - QR) + Ldz(RdQ - QdR + SdP - PdS)$$
$$+ Lzdx(SdQ - QdS + Q^2dx)$$
$$+ dxdz(2LPQ + M(QR + PS) + 2NRS)$$
$$+ Szdx^2(MQ + NS) = 0.$$

Leichter aber wird man auf diese allgemeine Gleichung geleitet, wenn diese beyden Substitutionen nach und nach gemacht werden.

Anmerkung 2.

§. 1004. Die hier erörterte Transformation ist um so merkwürdiger, weil, obgleich die transformirte Gleichung die Auflösung zuläßt, die vorgelegte dadurch doch nur sehr mühsam aufgelöst wird. Denn

da eine Function von x gefunden worden ist, welche statt z substi der transformirten Gleichung Genüge leistet, so muß man zur An dung des Werthes von y überdieß das Integrale der Gleich $\frac{dy}{y} = \frac{-Nzdx^2}{Ldz}$ suchen; wo, obgleich die Veränderlichen x un von einander abgesondert sind, bey der Integration selbst dennoch sondere Schwierigkeiten sich entgegenstellen können. Man wird in manchen Fällen mit Hülfe dieser Substitution die Integralien sol Gleichungen bestimmen können, welche man auf directem Wege kau finden vermag. Wenn es sich nämlich ereignet, daß das Integrale transformirten Gleichung entweder mit Hülfe einer der oben erklärten thoden gefunden, oder durch eine geschlossene Reihe ausgedrückt wer kann, dann wird auch das Integrale der vorgelegten Gleichung selbst kannt seyn; denn obgleich man in dem letztern Falle nur ein particul Integrale kennen lernt, so läßt sich dennoch aus demselben, bey di Gattung von Gleichungen, immer das vollständige Integrale auffind Denn wenn der Gleichung

$$Ld^2y + Mdxdy + Nydx^2 = o$$

der Werth $y = X$ als particuläres Integrale Genüge leistet, so man $y = Xv$, und man wird erhalten:

$$\left.\begin{array}{l} LXd^2v + 2LdXdv + Lvd^2X \\ + MXdxdv + Mvdxd X \\ + NXvdx^2 \end{array}\right\} = o.$$

Weil aber $X = y$ der Gleichung der Voraussetzung gemäß nüge leistet, so wird

$$Ld^2X + Mdxd X + NXdx^2 = o \text{ und}$$
$$LXd^2v + (2LdX + MXdx)\,dv = o, \text{ oder}$$
$$\frac{d^2v}{dv} + \frac{2dX}{X} + \frac{Mdx}{L} = o,$$

und daher findet man durch Integration:

$$X^2 dv = Ce^{-\int \frac{Mdx}{L}} dx, \text{ ferner}$$
$$v = \int \frac{Cdx}{X^2} e^{-\int \frac{Mdx}{L}},$$

so daß man zum vollständigen Integrale erhält:

$$y = CX \int \frac{dx}{X^2} e^{-\int \frac{Mdx}{L}},$$

welches also auch aus jedem particulären Integrale $y=X$ bestimmt werden kann.

Beyspiel.

§. 1005. Die Differenzialgleichung des zweyten Grades

$$x^2(a+bx^n)d^2y + x(c+ex^n)dxdy + fydx^2 = 0$$

zu transformiren, und mittelst einer Reihe zu integriren.

Da hier $L=x^2(a+bx^n)$, $M=x(c+ex^n)$ und $N=f$ ist, so muß man sich der Substitution

$$\frac{dy}{y} = \frac{-fzdx^2}{x^2(a+bx^n)dz}$$

bedienen, wodurch unsere Gleichung folgende Form erhält:

$$x^2(a+bx^n)d^2z + x[2a-c+(n+2)b-e]x^n]dxdz + fzdx^2 = 0;$$

setzt man nun, um diese Gleichung aufzulösen,

$$z = Ax^\lambda + Bx^{\lambda+n} + Cx^{\lambda+2n} + \ldots,$$

so muß $\lambda(\lambda-1)a + \lambda(2a-c) + f = 0$ oder

$$\lambda^2 a + \lambda(a-c) + f = 0, \text{ folglich}$$

$$\lambda = \frac{-a+c \pm \sqrt{(a-c)^2-4af}}{2a}$$

werden. Die Reihe wird aber, dem §. 970 zu Folge, abbrechen, wenn der Ausdruck

$$-\frac{c}{2a} + \frac{e}{2b} - \frac{n}{2} \pm \left(\frac{e}{2b} - \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\right) \pm \frac{\sqrt{(a-c)^2-4af}}{2a} = k'n,$$

wobey k' eine ganze positive Zahl bezeichnet, das ist, wenn

entweder $$-\frac{c}{2a} + \frac{e}{b} - \frac{1}{2} - n \pm \frac{\sqrt{(a-c)^2-4af}}{2a} = k'n$$

oder $$-\frac{c}{2a} + \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{(a-c)^2-4af}}{2a} = k'n$$

wird. Wenn aber die vorgelegte Gleichung selbst auf diese Weise in eine Reihe aufgelöst wird, so wird diese abbrechen, wenn

$$\frac{c}{2a} - \frac{e}{2b} \pm \frac{(b-e)}{2b} \pm \frac{\sqrt{(a-c)^2-4af}}{2a} = k'n,$$

das ist, wenn

entweder $$\frac{c}{2a} - \frac{e}{b} + \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{(a-c)^2-4af}}{2a} = k'n$$

oder $\frac{c}{2a} - \frac{\beta}{\gamma} \pm \frac{\sqrt{(a-c)^2 - 4af}}{2a} = k/n$

ist. Hieraus erhellt nun, daß das Integrale in einem endlichen Ausdrucke dargestellt werden könne, es mag die ganze Zahl k/ positiv oder negativ seyn. Allein schon die früher §. 998 gebrauchte Substitution hat uns auf diese Zweydeutigkeit geführt, so daß wir durch diese neue Substitution auf keine neuen integrablen Fälle geleitet werden.

Anmerkung 1.

§. 1006. Um jedoch zu zeigen, wie man aus dem endlichen Werthe von z einen endlichen Werth für y entwickeln könne, wollen wir folgenden Fall betrachten:

$$x^2(a + bx^2)\,d^2y + x(3a + ex^2)\,dx\,dy - 24ay\,dx^2 = 0,$$

wo $n = 2$, $c = 3a$ und $f = -24a$ ist. Diese Gleichung verwandelt sich durch die Substitution $\frac{dy}{y} = \frac{24az\,dx^2}{x^2(a+bx^2)\,dz}$ in folgende:

$$x^2(a+bx^2)\,d^2z + x[-a+(4b-e)x^2]\,dx\,dz - 24az\,dx^2 = 0,$$

wo für die steigende Reihe

$$\lambda^2 - 2\lambda - 24 = 0 = (\lambda - 6)(\lambda + 4)$$

wird. Man setze also

$$z = Ax^{-4} + Bx^{-2} + C + Dx^2 + \ldots,$$

so erhält man:

$$\left.\begin{array}{llll} 20Aax^{-4} & + 6Bax^{-2} & * & + 2Dax^2 \\ & + 20Ab & + 6Bb & * \\ + 4Aa & + 2Ba & * & - 2Da \\ & - 4A(4b-e) & - 2B(4b-e) & * \\ - 24Aa & - 24Ba & - 24Ca & - 24Da \end{array}\right\} = 0.$$

Da also $D = 0$ ist, so fallen alle folgenden Glieder weg, dann aber ist

$$16Ba = 4A(b+e), \quad 24Ca = -2Bb + 2Be,$$

folglich $B = \frac{b+e}{4a}A$, $C = \frac{e-b}{12a}B = \frac{e^2-b^2}{48a^2}A$,

und daher ist

$$z = A\left(\frac{1}{x^4} + \frac{b+e}{4ax^2} + \frac{e^2-b^2}{48a^2}\right)$$

$$= \frac{A[48a^2 + 12a(b+e)x^2 + (e^2-b^2)x^4]}{48a^2x^4},$$

und hieraus folgt

$$dz = Adx\left(\frac{-4}{x^5} - \frac{b-e}{2ax^3}\right) = \frac{-Adx}{2ax^5}\,[8a + (b+e)x^2],$$

$$\text{also } \frac{dy}{y} = \frac{-[48a^2 + 12a(b+e)x^2 + (e^2-b^2)x^4]}{x(a+bx^2)\,[8a+(b+e)x^2]}\,dx,$$

oder, wenn man diesen Ausdruck in Partialbrüche zerlegt:

$$\frac{dy}{y} = \frac{-6dx}{x} + \frac{(5b-e)xdx}{a+bx^2} + \frac{2(b+e)xdx}{8a+(b+e)x^2},$$

und demnach gibt die Integration

$$y = \frac{A}{x^6}\,(a+bx^2)^{\frac{5b-e}{2b}}\,[8a+(b+e)x^2].$$

Anmerkung 2.

§. 1007. Weil es hier durch Zufall geschehen zu seyn scheint, daß sich aus dem für z gefundenen Werthe die Größe y bequem bestimmen ließ, so kann auf folgende Art im Allgemeinen gezeigt werden, daß dieses nothwendig immer der Fall seyn müsse; denn da die vorgelegte Gleichung

$$Ld^2y + Mdxdy + Nydx^2 = 0$$

mit Hülfe der Substitution $\frac{dy}{y} = \frac{-Nzdx^2}{Ldz}$ in folgende Gleichung transformirt wurde

$$Ld^2z - Mdxdz - \frac{LdNdz}{N} + dLdz + Nzdx^2 = 0,$$

so erhält man aus dieser durch Division mit Ldz

$$\frac{d^2z}{dz} - \frac{Mdx}{L} - \frac{dN}{N} + \frac{dL}{L} = -\frac{Nzdx^2}{Ldz} = \frac{dy}{y},$$

woraus durch Integration gefunden wird:

$$y = \frac{aLdz}{Ndx}\,e^{-\int\frac{Mdx}{L}},$$

und diese Gleichung gibt nach der Bestimmung des Werthes von z sogleich den Werth von y ohne weitere Integration.

Da ferner $dy = \frac{-Nyzdx^2}{Ldz}$

ist, so wird man erhalten

$$dy = -azdx\,.\,e^{-\int\frac{Mdx}{L}},$$

$$\text{und demnach } ydy = \frac{-a^2Lzdz}{N}\,e^{-2\int\frac{Mdx}{L}}.$$

Diese Relationen sind um so merkwürdiger, weil aus ihnen die vorgelegte Gleichung nur durch mehrere Umwege auf die transformirte zurückgeführt werden kann. Denn die für y substituirte Formel führt auf eine Differenzialgleichung des dritten Grades, welche aber offenbar die Integration zuläßt, und die hier gefundene Gleichung selbst gibt. Wir haben daher hier Gelegenheit, solche Substitutionen aufzufinden, welche zwar Differenzialien des dritten Grades enthalten, sich jedoch durch Integration auf Differenzialien des zweyten Grades zurückführen lassen.

Aufgabe 128.

§. 1008. Die Differenzialgleichung des zweyten Grades

$$Ld^2y + Mdxdy + Nydx^2 = 0$$

mit Hülfe der Substitution $y = \frac{Pdz}{dx}$ in eine andere Differenzialgleichung, die ebenfalls vom zweyten Grade ist, zu transformiren.

Auflösung.

Weil $y = \frac{Pdz}{dx}$ ist, so wird

$$dy = \frac{Pd^2z + dPdz}{dx} \text{ und } d^2y = \frac{Pd^3z + 2dPd^2z + dzd^2P}{dx};$$

durch Substitution dieser Formeln erhält man folgende Differenzialgleichung des dritten Grades:

$$LPd^3z + 2LdPd^2z + Ldzd^2P + MPdxd^2z + MdxdPdz + NPdx^2dz = 0,$$

und wir wollen annehmen, diese Gleichung sey so beschaffen, daß sie durch eine Function von x, welche Q heißen mag, integrabel wird; es sey also folgende Gleichung integrabel

$$LPQd^3z + 2LQdPd^2z + MPQdxd^2z + LQdzd^2P + MQdxdPdz + NPQdx^2dz = 0,$$

und das Integrale hiervon sey:

$$LPQd^2z + Sdxdz + Tzdx^2 = Cdx^2;$$

hieraus folgt nun

$$d^2z(2LQdP + MPQdx) = d^2z(d.LPQ + Sdx),$$
$$dz(LQd^2P + MQdxdP + NPQdx^2) = dz(dxdS + Tdx^2) \text{ und}$$
$$zdx^2dT = 0,$$

lglich ist T eine constante Größe. Hieraus aber ergibt sich folgende elation:

$$Sdx = LQdP - LPdQ - PQdL + MPQdx,$$

raus der zweyten Bedingung gemäß folgt:

$$dx^2 = LQd^2P + MQdxdP + NPQdx^2 - LQd^2P - LdPdQ - QdPdL$$
$$+ LPd^2Q + LdPdQ + PdQdL + PQd^2L + PdQdL + QdPdL$$
$$- MPdxdQ - MQdxdP - PQdxdM \text{ oder}$$
$$dx^2 = Pd^2.LQ - Pdxd.MQ + PNQdx^2.$$

Da nun T eine constante Größe ist, so setze man $T = \alpha$, so wird is der letzten Gleichung auf eine bequeme Weise die Function P bemmt, man findet nämlich

$$P = \frac{\alpha dx^2}{d^2.LQ - dxd.MQ + NQdx^2}.$$

Wird nun dieser Werth für P genommen, so wird die vorgelegte leichung mittelst der Substitution $y = \frac{Pdz}{dx}$ in folgende transfor- irt:

$$PQd^2z + dz(LQdP - LPdQ - PQdL + MPQdx)$$
$$+ \alpha zdx^2 = Cdx^2;$$

d da hier die Größe z um eine constante Größe vermehrt werden nn, so kann man die Unveränderliche C außer Acht lassen. Dividirt n also diese Gleichung durch PQ, so wird man erhalten

$$d^2z + dz\left(\frac{LdP}{P} - \frac{LdQ}{Q} - dL + Mdx\right) + \frac{\alpha zdx^2}{PQ} = o;$$

er, wenn man in dem letzten Gliede den Werth von P substituirt:

$$d^2z + dz\left(\frac{LdP}{P} - \frac{d.LQ}{Q} + Mdx\right)$$
$$+ \frac{z}{Q}(d^2.LQ - dxd.MQ + NQdx^2) = o,$$

d hier kann man für Q jede beliebige Function von x nehmen.

Zusatz 1.

§. 1009. Hieraus wird die vorhergehende Substitution abgeleitet, nn man

$$d^2.LQ - dxd.MQ = o, \text{ also}$$
$$d.LQ - MQdx = Cdx \text{ oder}$$
$$e^{-\int\frac{Mdx}{L}}.LQ = C\int e^{-\int\frac{Mdx}{L}}dx + D$$

setzt; denn wenn man hier $C = o$ nimmt, so wird

$$Q = \frac{D}{L} e^{+\int \frac{M dx}{L}} \quad \text{und} \quad P = \frac{\alpha dx^2}{NQ dx^2} = \frac{\alpha}{NQ}, \text{ oder}$$

$$P = \frac{\alpha L}{N} e^{-\int \frac{M dx}{L}}, \text{ wie vorhin.}$$

Zusatz 2.

§. 1010. Setzt man aber

$$d^2 . LQ - dx d . MQ = dX dx, \text{ so daß}$$

$$P = \frac{\alpha dx}{dX + NQ dx}$$

wird, so erhält man

$$d . LQ - MQ dx = X dx + A dx;$$

ferner findet man durch Integration:

$$e^{-\int \frac{M dx}{L}} LQ = \int e^{-\int \frac{M dx}{L}} dx (X + A) + B \text{ und}$$

$$Q = \frac{1}{L} e^{\int \frac{M dx}{L}} \int e^{-\int \frac{M dx}{L}} dx (X + A) + \frac{B}{L} e^{\int \frac{M dx}{L}}.$$

Zusatz 3.

§. 1011. Man setze

$$e^{-\int \frac{M dx}{L}} X dx = e^{-\int \frac{M dx}{L}} V$$

und $A = o$, $B = o$, so wird

$$X = \frac{dV}{dx} - \frac{MV}{L} \quad \text{und} \quad Q = \frac{V}{L}, \text{ folglich}$$

$$P = \frac{\alpha dx}{\frac{d^2 V}{dx} - \frac{M}{L} dV - V d . \frac{M}{L} + \frac{N}{L} V dx}.$$

Wenn demnach $V = \alpha$ ist, so wird $Q = \frac{\alpha}{L}$,

$$P = \frac{L^2 dx}{LN dx - L dM + M dL},$$

und die hieraus sich ergebende Gleichung ist:

$$L d^2 z + dz \left(\frac{L dP}{P} + M dx \right) + \frac{z dx (LN dx - L dM + M dL)}{L} = 0$$

Anmerkung.

§. 1012. Diese Untersuchungen sind aber zu allgemein, als d sich hieraus etwas für den gewöhnlichen Gebrauch erschließen ließ

ie man aber übrigens auch die Transformation vornehmen, und die ansformirte Gleichung in eine Reihe auflöſen mag, ſo ſcheint dieſe ch nur in jenen Fällen abzubrechen, in welchen die vorgelegte Gleiung ſelbſt, und die hieraus mittelſt der erſten Subſtitution abgeleitete f eine irgendwo begränzte Reihe zurückgeführt wird. Hieraus ſieht an nun, daß man mit Hülfe ſolcher Transformationen ſchwerlich neue tegrable Fälle entdecken könne. Wir haben bisher für die Veränderhe y eine andere Variable z durch Subſtitution in die Rechnung einführt, und die andere x, nach deren Potenzen die Reihen fortſchrit-, beybehalten. Nun wollen wir auch ganz kurz unterſuchen, wie an durch Einführung einer andern Veränderlichen t ſtatt der VariaIn x die Transformation vornehmen müſſe, wobey vorzüglich bemerkt rden muß, daß in der transformirten Gleichung das Element d t s conſtant anzuſehen ſey, da früher das Element d x als unveränrlich angeſehen wurde. Wir werden alſo hier für irgend eine bemmte Function von x die Veränderliche t ſetzen, welche aber ſo beaffen ſeyn muß, daß die erhaltene Gleichung nicht gar zu verwickelt rde.

Aufgabe 129.

§. 1013. Sey gegeben die Differenzialgleichung s zweyten Grades

$$L d^2 y + M dx dy + N y dx^2 = o;$$

an führe ſtatt der Größe x eine andere Veränderche t ein, welche irgend einer Function von x gleich

Auflöſung.

Dividirt man die Gleichung durch d x, ſo ſtellt ſie ſich in folgen- Form dar:

$$L d . \frac{dy}{dx} + M dy + N y dx = o,$$

daß wir jetzt das Element d x, welches als conſtant betrachtet wurde, ht weiter zu berückſichtigen haben. Da t irgend eine Function von ezeichnet, ſo ſetze man $dt = P dx$ oder $dx = \frac{dt}{P}$, ſo erhalten

$$L d . \frac{P dy}{dt} + M dy + \frac{N y dt}{P} = o;$$

wenn das Element d t conſtant genommen wird:

$$LPd^2y + LdPdy + Mdtdy + \frac{Nydt^2}{P} = 0,$$

wo wir nur noch in den endlichen Größen, welche die Veränderliche x enthalten, die Variable t ſtatt x in Rechnung zu bringen brauchen.

Beyſpiel.

§. 1014. Sey folgende Gleichung gegeben:

$$x^2(a + bx^n)d^2y + x(c + ex^n)dxdy + (f + gx^n)ydx^2 = 0,$$

in welcher $h + kx^n = t$ ſeyn ſoll.

Da alſo $t = h + kx^n$, ſo wird $dt = nkx^{n-1}dx$, und daher

$$P = nkx^{n-1} \text{ und } dP = n(n-1)kx^{n-2}dx = \frac{(n-1)dt}{x};$$

folglich werden wir erhalten:

$$nkx^{n+1}(a + bx^n)d^2y + (n-1)xdtdy(a + bx^n) + x(c + ex^n)dtdy + \frac{(f + gx^n)ydt^2}{nkx^{n-1}} = 0,$$

oder

$$nk(a + bx^n)d^2y + \frac{(n-1)dtdy(a + bx^n) + dtdy(c + ex^n)}{x^n} + \frac{(f + gx^n)ydt^2}{nkx^{2n}} = 0.$$

Nun iſt aber $x^n = \frac{t-h}{k}$, und die Subſtitution dieſes Werthes gibt:

$$n(ak - bh + bt)d^2y + \frac{(n-1)dtdy(ak - bh + bt) + dtdy(ck - eh + et)}{t-h} + \frac{(fk - gh + gt)ydt^2}{n(t-h)^2} = 0.$$

Weil aber hier durchaus $t - h$ erſcheint, ſo wird die Gleichung einfacher, wenn man u ſtatt $t - h$ ſetzt, und dieß iſt dann eben ſo viel, als hätten wir die Größe u ſtatt der Potenz x^n geſchrieben; hieraus läßt ſich alſo gar kein Gewinn für die Entwickelung neuer Reihen ableiten.

Zuſatz.

§. 1015. Wenn wir in der allgemeinen Gleichung t ſtatt x^m ſchreiben wollen, ſo erhalten wir

$$dt = mx^{m-1}dx \text{ und } P = mx^{m-1},$$

und weil $dP = m(m-1)x^{m-2}dx = \frac{(m-1)dt}{x}$,

ſo ergibt ſich die Gleichung

$$n\,Lx^{m-1}\,d^2y + \frac{(m-1)\,L\,dt\,dy}{t} + M\,dt\,dy + \frac{N\,y\,dt^2}{m\,x^{m-1}} = 0 \text{ oder}$$

$$n\,L\,d^2y + \frac{(m-1)\,L\,dt\,dy}{t} + \frac{M\,x\,dt\,dy}{t} + \frac{N\,x^2\,y\,dt^2}{m\,t^2} = 0.$$

Anmerkung.

§. 1016. Es scheint überflüssig zu seyn, diese Transformationen der Gleichungen ausführlicher zu behandeln, da wir hieraus ohne Schwierigkeit alle Transformationen ableiten können, welche für die Anwendung geeignet sind. Es gibt aber noch eine andere ganz eigenthümliche Methode, die Integralien solcher Differenzialgleichungen des zweyten Grades auszudrücken, und zwar mittelst Integralformeln, welche zwey veränderliche Größen enthalten, von denen die eine bey der Integration als constant behandelt wird. Wäre z. B. P irgend eine Function zweyer Veränderlichen x und u, und man setzt $y = \int P\,dx$, während man bey der Integration u als unveränderlich ansieht, so wird dieses Integrale $\int P\,dx$ eine Function von x und u selbst seyn. Wird dieses nun so bestimmt, daß es für $x = 0$ verschwindet, und man setzt dann $x = a$, so wird man eine Function von u erhalten, welche gleich y ist, und wenn diese irgend einer zwischen u und y vorgelegten Differenzialgleichung Genüge leistet, so wird diese Gleichung durch die Formel $y = \int P\,dx$ aufgelöst werden, und diese Formel kann als das Integral jener Gleichung angesehen werden. Auf diese Art lassen sich die Integralien unzähliger Gleichungen des zweyten Grades bestimmen, welche nach andern Methoden geradezu unauflösbar zu seyn scheinen. Läßt sich aber gleichwohl die Formel $\int P\,dx$, wenn die Größe u als constant betrachtet wird, nicht wirklich integriren, so kann dennoch das Integrale derselben bey dieser Rechnung als bekannt angesehen werden, weil man dessen Werth wenigstens näherungsweise anzugeben vermag. Bezeichnet nämlich x eine Abscisse, und man betrachtet dann P als die ihr zugehörige senkrechte Ordinate, so wird die Formel $\int P\,dx$ den Flächenraum eben dieser Curve, die der Abscisse x zugehört, bezeichnen, und für $x = a$ erhält man eine bestimmte Fläche, welche dem Werthe $y = \int P\,dx$ gleich ist, wie wir eben festgesetzt haben, und welche also durch die Quadratur der Curven, wie man sich auszudrücken pflegt, angegeben werden kann.

Diese Integrationsmethode nennt man daher bequem die Construction durch Quadratur. Man muß hier aber besonders auf jene Beziehung aufmerksam seyn, durch welche wir die Integralien in Par-

ticulare und Vollſtändige eingetheilt haben; man hat ſich daher sor
tig in Acht zu nehmen, daß man nicht die auf dieſe Weiſe gefun
Integralien für vollſtändige nimmt, wenn ſie nicht zwey willkü
Conſtanten enthalten. Da nun derſelben Differenzialgleichung u
lige particuläre Integralien entſprechen, ſo darf es uns nicht wun
wenn wir hier für die vorgelegte Gleichung mehrere verſchiedene
gralien finden. Dieſer Gegenſtand iſt beynahe ganz neu, und iſt,
Ausnahme einiger Unterſuchungen, welche ich ebenfalls längſt bei
gemacht habe, noch von Niemanden behandelt worden. Es iſt
nicht zu zweifeln, daß dieſe Methode, wenn man dieſelbe einer
fältigern Aufmerkſamkeit würdiget, vielleicht mit der Zeit vortref
Beyträge zur Analyſis liefern werde.

Kapitel X.

Von der Construction der Differenzialgleichungen des zweyten Grades mittelst der Quadratur der Curven.

Aufgabe 130.

§. 1017. Sey $y = \int V dx$, wobey V irgend eine Function der beyden Veränderlichen x und u bezeichnet, von welchen aber die letztere u bey der Integration als constant betrachtet wird; nach der Integration aber setze man $x = a$, damit y irgend einer Function von u gleich werde; dann aber nehme man u als veränderlich, und bestimme den Werth des Quotienten $\frac{dy}{du}$.

Auflösung.

Da $\int V dx$ irgend eine Function der beyden Veränderlichen x und u bezeichnet, deren Differenziale, wenn u constant genommen wird, $= V dx$ ist, so wird, wenn sowohl u als x als veränderlich behandelt werden, das Differenziale der Gleichung $y = \int V dx$ folgende Form haben

$$dy = V dx + U du,$$

wobey, weil das Differenziale richtig ist, die Relation $\left(\frac{dV}{du}\right) = \left(\frac{dU}{dx}\right)$ Statt finden muß. Da aber V eine gegebene Function von x und u ist, so setze man

$$dV = P dx + Q du,$$

so wird $\left(\frac{dV}{du}\right) = Q$, also $\left(\frac{dU}{dx}\right) = Q$. Betrachtet man nun u wieder als constant, so wird

$$dU = Q dx \quad \text{und} \quad U = \int Q dx,$$

bey welcher Integration bloß x als veränderlich zu nehmen ist. Wenn wir daher den Werth $\int Q dx$ als bekannt ansehen, weil wir denselben durch Quadratur angeben können, so wird

$$dy = V dx + du \int Q dx.$$

Wir suchen aber das Differenziale von y, welches bloß aus der Veränderlichkeit von u allein hervorgeht, und da dieses $dy = du \int Q dx$ ist,

so wird der gesuchte Werth $\frac{dy}{du} = \int Q\,dx$ seyn, wenn man nä
nach der Integration $x = a$ setzt.

Zusatz 1.

§. 1018. Da $y = \int V\,dx$ eine Function von x und u ist, i
die Integration der Formel $V\,dx$ aber, in welcher u als constan
gesehen wird, irgend eine Function von u statt der Constanten b
fügt werden kann, so wird die Function y an sich unbestimmt
wird aber sogleich bestimmt werden, wenn man das Integrale $\int$
so nimmt, daß es für $x = 0$ verschwindet.

Zusatz 2.

§. 1019. Berücksichtiget man diese Bedingung, so wird
$x = 0$ verschwinden, welchen Werth man auch der andern Größe u
legen mag, es wird also auch die Gleichung Statt finden

$$y + du\left(\frac{dy}{du}\right) = 0,$$

wenn $x = 0$ ist, folglich ist auch $\left(\frac{dy}{du}\right) = 0$. Hieraus geht nun
vor, daß man das Integrale $\int Q\,dx = \left(\frac{dy}{du}\right)$ auch so nehmen
daß es für $x = 0$ verschwindet.

Zusatz 3.

§. 1020. Da $y = \int V\,dx$ ist, so wird $\left(\frac{dy}{dx}\right) = V$ seyn,
$\left(\frac{d^2y}{du\,dx}\right) = \left(\frac{dV}{du}\right)$. Wenn man aber $\left(\frac{dy}{du}\right) = Z$ setzt, so
auch $\left(\frac{d^2y}{du\,dx}\right) = \left(\frac{dZ}{dx}\right)$, also $\left(\frac{dZ}{dx}\right) = \left(\frac{dV}{du}\right)$. Wird der
u als constant betrachtet, so findet man

$$dZ = dx\left(\frac{dV}{du}\right) \quad \text{und} \quad Z = \int dx\left(\frac{dV}{du}\right),$$

folglich $\left(\frac{dy}{du}\right) = \int dx\left(\frac{dV}{du}\right)$.

Zusatz 4.

§. 1021. Hat man also die Integrationen so ausgeführt, d
Integralien für $x = 0$ verschwinden, und man setzt dann $x =$

rd ſowohl der Werth $y = \int V\,dx$, als auch $\left(\frac{dy}{du}\right) = \int dx \left(\frac{dV}{du}\right)$ e beſtimmte Function von u ſeyn.

Zuſatz 5.

§. 1022. Geht man auf ähnliche Weiſe weiter fort, ſo wird $\left[\frac{d^2y}{du^2}\right] = \int dx \left(\frac{d^2V}{du^2}\right)$. Wenn daher L, M und N was immer für ctionen von u bezeichnen, ſo wird

$$\frac{Ly}{} + \frac{M\,dy}{du} + Ny = \int dx \left[L\left(\frac{d^2V}{du^2}\right) + M\left(\frac{dV}{du}\right) + NV\right],$$

es kömmt nur noch darauf an, daß dieſe Formel die Integration äßt.

Anmerkung.

§. 1023. Sind Functionen von u, nämlich L, M und N gege , ſo muß die Function V der beyden Veränderlichen x und u ſo be mt werden, daß, wenn u als conſtant angeſehen wird, die Formel

$$\left[L\left(\frac{d^2V}{du^2}\right) + M\left(\frac{dV}{du}\right) + NV\right] dx$$

grabel werde. Damit aber dieſes Integrale beſtimmt ſey, nehme es ſo, daß es für $x = o$ verſchwindet; dann aber ſetze man $x = a$, verſchwindet jenes Integrale auch in dieſem Falle, ſo wird

$$\frac{L\,d^2y}{du^2} + \frac{M\,dy}{du} + Ny = o,$$

daher leiſtet der Werth $y = \int V dx$ der Gleichung Genüge, wenn em angegebenen Geſetze gemäß genommen wird. Allein das Pro , die Function V zu finden, wenn die Functionen L, M und N eben ſind, iſt völlig unbeſtimmt, und man hat bis jetzt noch keine hode gefunden, dasſelbe allgemein aufzulöſen; es wird daher zweck ig ſeyn, dieſes Problem umgekehrt zu behandeln, ſo nämlich, daß n die Functionen L, M und N aufſucht, wenn die Function V als annt betrachtet wird. Wir werden daher Differenzialgleichungen des ten Grades erhalten, deren Integralien wir auf dieſe Weiſe wer angeben können; und wenn ſich dieſe nicht nach andern Methoden handeln laſſen, ſo werden ſie uns einen bedeutenden Vortheil gewäh n. Wenn das Integrale

$$\int \left[L\left(\frac{d^2V}{du^2}\right) + M\left(\frac{dV}{du}\right) + NV\right] dx$$

für $x = a$ nicht verschwindet, sondern eine bekannte Function U von x darstellt, so wird der Werth $y = \int V dx$ folgender Gleichung entsprechen:

$$\frac{L d^2 y}{du^2} + \frac{M dy}{du} + Ny = U.$$

Da nun diese Gleichung auf unzählige Arten auf andere Formen gebracht werden kann, so werden auch die Integralien dieser Gleichungen bekannt seyn, wobey zugleich noch die Bequemlichkeit eintritt, daß obgleich das Integrale nur als ein particuläres erhalten wird, hieraus dennoch gewöhnlich das vollständige Integrale ohne Schwierigkeit abgeleitet werden kann.

Aufgabe 131.

§. 1024. Solche Differenzialgleichungen des zweyten Grades von der Form

$$\frac{L d^2 y}{du^2} + \frac{M dy}{du} + Ny = U,$$

wo L, M, N und U Functionen von u seyn sollen, deßen Element du hier constant genommen wird, zu bestimmen, daß sich das Integrale derselben mit Hülfe der Construction durch Quadratur auffinden läßt.

Auflösung.

Man nehme irgend eine Function zweyer Veränderlichen u und x, welche wir mit V bezeichnen wollen, und nehme das Integrale $\int V dx$, indem man die Größe u als constant ansieht, so daß es für $x = o$ verschwindet; dann aber setze man $x = a$, wo a eine beliebige constante Größe bezeichnet, so daß nun $\int V dx$ irgend eine Function von u allein bezeichnet, welcher die Größe y gleich seyn soll, so daß $y = \int V dx$ wird. Da nun

$$\left(\frac{dy}{du}\right) = \int dx \left(\frac{dV}{du}\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{d^2 y}{du^2}\right) = \int dx \left(\frac{d^2 V}{du^2}\right),$$

welche Integralien ebenfalls so genommen werden sollen, daß sie für $x = o$ verschwinden, so setze man $x = a$, und suche solche Functionen L, M und N von u, daß die Formel

$$\int dx \left[L \left(\frac{d^2 V}{du^2}\right) + M \left(\frac{dV}{du}\right) + NV \right]$$

integrabel werde, und bestimme das Integrale derselben so, daß es

ich U wird, wenn man x=a ſetzt. Hat man dieſen Zweck erreicht, ſo einleuchtend, daß der Differenzialgleichung des zweyten Grades

$$\frac{L\,d^2y}{du^2} + \frac{M\,dy}{du} + Ny = U$$

angenommene Formel $y = \int V\,dx$ Genüge leiſtet.

Zuſatz 1.

§. 1025. Wir können alſo die Function V nicht ganz willkürlich nehmen, ſondern haben hierbey vorzüglich darauf zu ſehen, daß der Ausdruck

$$\int dx\left[L\left(\frac{d^2V}{du^2}\right) + M\left(\frac{dV}{du}\right) + NV\right]$$

Charakter der Integrabilität erhält.

Zuſatz 2.

§. 1026. Es werden alſo hier ſogleich unzählige Formen, die für ern Zweck unnütz ſind, ausgeſchloſſen; dieſe ſind nämlich enthalten dem Ausdrucke $V = UP$, wobey U bloß eine Function von u, und nur eine Function von x iſt, denn dann wäre

$$= U\int P\,dx;\quad \frac{dy}{du} = \frac{dU}{du}\int P\,dx \quad \text{und} \quad \frac{d^2y}{du^2} = \frac{d^2U}{du^2}\int P\,dx,$$

il dieſe dasſelbe Integrale ausdrücken, ſo daß durch die Verbindung rſelben keine abſolut integrable Formel erhalten werden könnte.

Beyſpiel 1.

§. 1027. Sey

$$V = x^n\sqrt{\frac{u^2+x^2}{c^2-x^2}} \quad \text{und} \quad y = \int x^n\,dx\sqrt{\frac{u^2+x^2}{c^2-x^2}},$$

elches Integrale für x=o verſchwindet; dann aber ße man x=a.

Es wird alſo ſeyn

$$\left(\frac{dV}{du}\right) = x^n\frac{u}{\sqrt{(u^2+x^2)(c^2-x^2)}} \quad \text{und} \quad \left(\frac{d^2V}{du^2}\right) = x^n\frac{x^2}{(u^2+x^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{c^2-x^2}},$$

an muß daher folgenden Ausdruck integrabel machen:

$$dx\left[\frac{Lx^2}{(u^2+x^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{c^2-x^2}} + \frac{Mu}{\sqrt{u^2+x^2}(c^2-x^2)} + N\sqrt{\frac{u^2+x^2}{c^2-x^2}}\right] \text{ oder}$$

$$\frac{x^n\,dx}{(u^2+x^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{c^2-x^2}}\left[Lx^2 + Mu(u^2+x^2) + N(u^2+x^2)^2\right].$$

Man setze das Integrale $= \frac{x^{n+1}\sqrt{c^2-x^2}}{\sqrt{u^2+x^2}}$, so ist das Differenziale dieses Ausdruckes

$$\frac{(n+1)x^n(c^2-x^2)(u^2+x^2) - x^{n+2}(u^2+x^2) - x^{n+2}(c^2-x^2)}{(u^2+x^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{c^2-x^2}}\,dx$$

oder

$$\frac{x^n\,dx}{(u^2+x^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{c^2-x^2}}\Big\{(n+1)c^2u^2+(n+1)c^2x^2-(n+1)u^2x^2-(n+1)x^4$$
$$-c^2x^2 \qquad -u^2x^2$$

und vergleicht man diesen Ausdruck mit dem vorgelegten, so erhält man

$$Mu^3 + Nu^4 = (n+1)c^2u^2,$$
$$L + Mu + 2Nu^2 = nc^2 - (n+2)u^2 \quad \text{und}$$
$$N = -(n+1),$$

und hieraus folgt

$Mu = (n+1)(c^2+u^2)$ oder $M = \frac{(n+1)(c^2+u^2)}{u}$, und

$L = -(n+1)(c^2+u^2)+2(n+1)u^2+nc^2-(n+2)u^2$ oder

$L = -c^2 - u^2$.

Wir erhalten daher

$$\frac{(c^2+u^2)\,d^2y}{du^2} + \frac{(n+1)(c^2+u^2)\,dy}{u\,du} - (n+1)y = \frac{a^{n+1}\sqrt{c^2-a^2}}{\sqrt{a^2+u^2}},$$

welcher Gleichung der Ausdruck $y = \int x^n\,dx\sqrt{\frac{u^2+x^2}{c^2-x^2}}$ entspricht, wenn die Integration auf die oben angezeigte Weise ausgeführt wird.

Zusatz 1.

§. 1028. Wird also $a = c$ gesetzt, so wird die Integralformel $y = \int x^n\,dx\sqrt{\frac{u^2+x^2}{c^2-x^2}}$, wenn nach der Integration $x = c$ gesetzt wird, das Integrale folgender Gleichung darstellen:

$$u(c^2+u^2)\,d^2y - (n+1)(c^2+u^2)\,du\,dy + (n+1)u\,y\,du^2 = 0$$

oder $d^2y - \frac{(n+1)\,du\,dy}{u} + \frac{(n+1)\,y\,du^2}{c^2+u^2} = 0.$

Zusatz 2.

§. 1029. Ist $n = 1$, so erhält man durch Integration

$$\int x\,dx\sqrt{\frac{u^2+x^2}{c^2-x^2}} = \tfrac{1}{4}(c^2+u^2)\,\text{arc. sin.}\,\frac{2x^2-c^2+u^2}{c^2+u^2}$$
$$-\tfrac{1}{2}\sqrt{c^2u^2+c^2x^2-u^2x^2-x^4}$$
$$-\tfrac{1}{4}(c^2+u^2)\,\text{arc. sin.}\,\frac{-c^2+u^2}{c^2+u^2}+\tfrac{1}{2}cu,$$

und setzt man $x=c$, so findet man

$$y=\tfrac{1}{4}(c^2+u^2)\,\text{arc. cos.}\,\frac{u^2-c^2}{c^2+u^2}+\tfrac{1}{2}cu,$$

und daher

$$\frac{y}{u}=\tfrac{1}{2}u\,\text{arc. cos.}\,\frac{u^2-c^2}{c^2+u^2}\quad\text{und}\quad\frac{d^2y}{du^2}=\tfrac{1}{2}\,\text{arc. cos.}\,\frac{u^2-c^2}{c^2+u^2}-\frac{cu}{c^2+u^2},$$

welche Formeln offenbar der Gleichung

$$d^2y-\frac{2\,du\,dy}{u}+\frac{2y\,du^2}{c^2+u^2}=0$$

Genüge leisten.

Zusatz 3.

§. 1030. In diesem Falle kann das Integrale auch auf folgende Art ausgedrückt werden:

$$y=\tfrac{1}{4}(c^2+u^2)\,\text{arc. sin.}\,\frac{2cu}{c^2+u^2}+\tfrac{1}{2}cu;$$

aber, weil jedes Vielfache dieses Ausdruckes eben so Genüge leistet:

$$y=(c^2+u^2)\,\text{arc. sin.}\,\frac{2cu}{c^2+u^2}+2cu.$$

Es leistet aber auch $y=c^2+u^2$ Genüge, und daher ist das vollständige Integrale

$$y=\alpha(c^2+u^2)\,\text{arc. sin.}\,\frac{2cu}{c^2+u^2}+2\alpha cu+\beta(c^2+u^2).$$

Anmerkung.

§. 1031. Daß der Werth $y=c^2+u^2$ Genüge leistet, läßt sich aus dem gefundenen Integrale erschließen. Denn weil $\text{arc. sin.}\,\frac{2cu}{c^2+u^2}$ eine vieldeutige Function ist, und mit dem Gliede 2π vermehrt werden kann, so kann man dem Integrale selbst das Glied $2\pi(c^2+u^2)$ beyfügen. Im Allgemeinen aber leistet auch die Differenz zweyer Integralen Genüge, also muß auch $y=2\pi(c^2+u^2)$, und allgemein $y=\beta(c^2+u^2)$ Genüge leisten. Aus diesem Falle läßt sich ersehen, ob der angenommene Werth der allgemeinen Gleichung entspricht, obgleich er durch Integration nicht entwickelt werden kann. Es ist aber einleuchtend, daß $(n+1)$ eine positive Zahl seyn müsse, weil sonst die

Bedingung nicht erfüllt werden kann, daß das Integrale für x=0 verſchwindet.

Beyſpiel 2.

§. 1032. Man ſetze

$$V = x^{n-1}(u^2+x^2)^{\mu}(c^2-x^2)^{\nu}, \text{ ſo wird}$$

$$\left(\frac{dV}{du}\right) = 2\mu u x^{n-1}(u^2+x^2)^{\mu-1}(c^2-x^2)^{\nu} \text{ und}$$

$$\left(\frac{d^2V}{du^2}\right) = 2\mu x^{n-1}(c^2-x^2)^{\nu}[(u^2+x^2)^{\mu-1} + 2(\mu-1)u^2(u^2+x^2)^{\mu-2}$$

$$= 2\mu x^{n-1}(c^2-x^2)^{\nu}(u^2+x^2)^{\mu-2}[(2\mu-1)u^2+x^2].$$

Es wird alſo folgende Formel integrabel zu machen ſeyn:

$$\int x^{n-1}\,dx\,(c^2-x^2)^{\nu}(u^2+x^2)^{\mu-2} \times$$
$$[2\mu[(2\mu-1)u^2+x^2]L + 2\mu u(u^2+x^2)M + (u^2+x^2)^2 N]$$

oder

$$\int x^{n-1}\,dx\,(c^2-x^2)^{\nu}(u^2+x^2)^{\mu-2}\left\{\begin{matrix} 2\mu(2\mu-1)Lu^2+2\mu Lx^2+Nx^4 \\ +2\mu Mu^3 \qquad +2\mu Mux^2 \\ +Nu^4 \qquad +2Nu^2x^2 \end{matrix}\right\}$$

Man ſetze, das Integrale ſey $x^n(u^2+x^2)^{\mu-1}(c^2-x^2)^{\nu+1}$, deſſen Differenziale

$$x^{n-1}\,dx\,(u^2+x^2)^{\mu-2}(c^2-x^2)^{\nu} \times$$
$$[n(u^2+x^2)(c^2-x^2)+2(\mu-1)x^2(c^2-x^2)-2(\nu+1)x^2(u^2+x^2)$$

iſt, ſo wird

$$2\mu(2\mu-1)Lu^2 + 2\mu Mu^3 + Nu^4 = nc^2u^2,$$
$$2\mu L + 2\mu Mu + 2Nu^2 = nc^2 - nu^2 + 2(\mu-1)c^2 - 2(\nu+1)u^2,$$
$$N = -n - 2(\mu-1) - 2(\nu+1) = -n - 2\mu - 2\nu.$$

Zieht man von der erſten Gleichung

$$2\mu(2\mu-1)L + 2\mu Mu + Nu^2 = nc^2$$

die zweyte ab, ſo erhält man

$$4\mu(\mu-1)L - Nu^2 = (n+2\nu+2)u^2 - 2(\mu-1)c^2 \text{ oder}$$
$$4\mu(\mu-1)L = -2(\mu-1)(u^2+c^2), \text{ und daher}$$
$$L = \frac{-c^2-u^2}{2\mu}.$$

Subſtituirt man dieſen Werth in den erſten Ausdruck, ſo findet man

$$-(2\mu-1)(c^2+u^2) + 2\mu Mu - (n+2\mu+2\nu)u^2 = nc^2 \text{ oder}$$

$$2\mu M u = (n+2\mu-1)c^2 + (n+4\mu+2\nu-1)u^2,$$

$$\text{ſo} \quad M = \frac{(n+2\mu-1)(c^2+u^2)}{2\mu u} + \frac{(\mu+\nu)}{\mu} u.$$

Wenn $n>0$ iſt, ſo verſchwindet das obige Integrale für $x=0$; gen wir daher $x=a$, ſo wird folgende Gleichung zum Vorſchein mmen:

$$\frac{(c^2+u^2)d^2y}{2\mu du^2} + \frac{(n+2\mu-1)(c^2+u^2)dy}{2\mu u du} + \frac{(\mu+\nu)udy}{\mu du} - (n+2\mu+2\nu)y$$
$$= a^n (a^2+u^2)^{\mu-1} (c^2-a^2)^{\nu+1},$$

ren Integrale

$$y = \int x^{n-1} dx (u^2+x^2)^{\mu} (c^2-x^2)^{\nu}$$

:, wenn man dieſes Integrale ſo nimmt, daß es für $x=0$ verſchwin- :t, dann aber $x=a$ ſetzt.

Zuſatz 1.

§. 1033. Nimmt man $a=c$, damit der letzte Theil $=0$ wird, enn der Exponent $\nu+1$ größer als Null iſt, ſo wird die Formel

$$y = \int x^{n-1} dx (u^2+x^2)^{\mu} (c^2-x^2)^{\nu}$$

as Integrale der Gleichung

$$(c^2+u^2)d^2y - (n+2\mu-1)(c^2+u^2)du\,dy - 2(\mu+\nu)u^2 du\,dy$$
$$+ 2\mu(n+2\mu+2\nu)uy\,du^2 = 0$$

ynu, wenn die Integration ſo ausgeführt wird, daß für $x=0$ auch $=0$ wird, und dann $x=c$ geſetzt wird.

Zuſatz 2.

§. 1034. Sey $n+2\mu-1=\alpha$; $n+4\mu+2\nu-1=\beta$;) wird $2\mu = \alpha+1-n$ und

$$2\nu = \beta+1-n-2\alpha-2+2n = \beta-1+n-2\alpha$$

erden, und dann wird die Gleichung

$$(c^2+u^2)d^2y - (\alpha c^2+\beta u^2)du\,dy + (\alpha+1-n)(\beta-\alpha+n)uydu^2 = 0$$

lgendes Integrale haben

$$y = \int x^{n-1} dx (u^2+x^2)^{\frac{+1-n}{2}} (c^2-x^2)^{\frac{\beta-1+n-2\alpha}{2}}$$

ür $x=c$, wenn nur $n>0$ und $\beta-1+n>2\alpha$.

Anmerkung.

§. 1035. Dieſe Conſtruction erſtreckt ſich im weiteſten Sinne auf ie Gleichung:

$x^2(a+bx^n)\,d^2z + x(c+ex^n)\,dx\,dz + (f+gx^n)\,z\,dx^2 = 0$

denn erſtlich kann man hier, ohne der Allgemeinheit Eintrag zu thun, $n=2$ nehmen, indem man $x^n = u^2$ ſetzt; dann aber wird, wie wir oben (§. 997) geſehen haben, durch die Subſtitution

$$z = x^{\frac{a-c}{a}+h}\,(a+bx^n)^{\frac{bc-ae}{nab}+1}\,.\,y$$

jene Gleichung übergehen in

$$x^2(a+bx^n)\,d^2y + x[2a-c+2ah+(2b-e+2nb+2bh)x^n]\,dx\,dy$$
$$+[f+ah-ch+ah^2+[g+(b-e+nb+bh)(n+h)]\,x^n]\,ydx^2=0,$$

und wenn hier h ſo genommen wird, daß

$$ah^2 + (a-c)\,h + f = 0$$

iſt, ſo erſcheint eine Gleichung von der Form, deren Conſtruction wir ſchon angegeben haben. In beſondern Fällen aber können ſich Schwierigkeiten darbiethen, zu deren Beſeitigung die folgenden Beyſpiele dienen.

Beyſpiel 3.

§. 1036. Sey $V = e^{mux}\,x^n\,(c-x)^\nu$; ſo wird

$$\left(\frac{dV}{du}\right) = me^{mux}\,x^{n+1}\,(c-x)^\nu \text{ und } \left(\frac{d^2V}{du^2}\right) = m^2\,e^{mux}\,x^{n+2}\,(c-x)^\nu$$

ſeyn.

Man muß alſo folgende Formel integrabel machen:

$$e^{mux}\,x^n\,dx\,(c-x)^\nu\,(m^2Lx^2 + mMx + N),$$

deren Integrale $= e^{mux}\,x^{n+1}\,(c-x)^{\nu+1}$ ſeyn ſoll, ſo muß das Differenziale dieſes Ausdruckes jener Formel gleich werden. Da dieſes nun

$$e^{mux}x^n\,dx\,(c-x)^\nu\,[mux(c-x) + (n+1)(c-x) - (\nu+1)x]$$

iſt, ſo wird ſeyn

$$N = (n+1)c;\quad mM = mcu - (n+\nu+2);\quad m^2L = -mu.$$

Man ſetze nun $x=a$, ſo wird die Formel

$$y = \int e^{mux}\,x^n\,dx\,(c-x)^\nu$$

das Integrale folgender Gleichung bezeichnen:

$$-\frac{u\,d^2y}{m\,du^2} + \frac{c\,u\,dy}{du} - \frac{(n+\nu+2)\,dy}{m\,du} + (n+1)\,cy = e^{mau}\,a^{n+1}\,(c-a)^{\nu+1}$$

Hier kann $m=1$ genommen werden, und wenn $c=a$ geſetzt wird, ſo entſpricht der Gleichung

$$u\,d^2y - au\,du\,dy + (n+\nu+2)\,du\,dy - (n+1)\,ay\,du^2 = 0$$

ls Integrale der Werth

$$y = \int e^{ux} x^n \, dx \, (a - x)^\nu,$$

enn nach der Integration $x = a$ geſetzt wird, in ſo fern $\nu + 1 > 0$ nd $n + 1 > 0$ iſt, damit man das Integrale für $x = 0$ verſchwinen laſſen kann.

Zuſatz 1.

§. 1037. Setzt man hier $y = e^{\int z \, du}$, ſo wird

$dz + uz^2 \, du - au z \, du + (n + \nu + 2) z \, du - (n + 1) a \, du = 0,$

nd das Integrale dieſer Gleichung iſt

$$z = \frac{dy}{y \, du} = \frac{\int e^{ux} x^{n+1} \, dx \, (a - x)^\nu}{\int e^{ux} x^n \, dx \, (a - x)^\nu}.$$

Jene Gleichung aber verwandelt ſich durch die Subſtitution $= \frac{1}{2} a + v$ in

$dv + uv^2 \, du + (n + \nu + 2) v \, du - \frac{1}{4} a^2 u \, du - \frac{1}{2} (n - \nu) a \, du = 0,$

elche, wenn $v = u^{-n-\nu-2} s$ geſetzt wird, übergeht in

$u^{-n-\nu-1} ds + u^{-2n-2\nu-3} s^2 \, du - \frac{1}{4} a^2 u \, du - \frac{1}{2} (n - \nu) a \, du = 0.$

Zuſatz 2.

§. 1038. Sey ferner

$u^{-n-\nu-2} \, du = dt$ oder $u^{-n-\nu-1} = -(n + \nu + 1) t,$

daß alſo

$ds + s^2 \, dt - \frac{1}{4} a^2 u^{2n+2\nu+4} \, dt - \frac{1}{2} (n - \nu) u^{2n+2\nu+3} \, dt = 0$

ird, welche Gleichung ſich demnach auch conſtruiren läßt. Oder es ſey

$(n + \nu + 1) t = r$, ſo wird

$$s - \frac{s^2 \, dr}{n+\nu+1} + \frac{a^2 r^{\frac{-2n-2\nu-4}{n+\nu+1}} \, dr}{4(n+\nu+1)} + \frac{(n-\nu) r^{\frac{-2n-2\nu-3}{n+\nu+1}} \, dr}{2(n+\nu+1)} = 0,$$

elche Gleichung für $s = -(n + \nu + 1) q$ übergeht in

$$q + q^2 \, dr - \frac{a^2 r^{\frac{-2n-2\nu-4}{n+\nu+1}} \, dr - 2(n-\nu) r^{\frac{-2n-2\nu-3}{n+\nu+1}} \, dr}{4(n+\nu+1)^2} = 0,$$

nd hier iſt

$$u = r^{\frac{-1}{n+\nu+1}} \quad \text{und} \quad z = \frac{n}{2} - (n + \nu + 1) r^{\frac{n+\nu+2}{n+\nu+1}} q.$$

Anmerkung.

§. 1039. Da der Differenzialgleichung des zweyten Grades

$$\frac{d^2 y}{du} - a \, dy + \frac{(n + \nu + 2) \, dy}{u} - \frac{(n + 1) a y \, du}{u} = 0$$

als Integrale die Gleichung

$$y = \int e^{ux} x^n \, dx \, (a - x)^\nu$$

entſpricht, ſo wollen wir nun ſehen, wie ſich eben dieſe Gleichung auf andere Formen bringen läßt. Sey erſtlich

$$u = \alpha t^\lambda, \quad \text{alſo} \quad du = \alpha\lambda t^{\lambda-1} dt,$$

ſo wird durch Subſtitution

$$\frac{1}{\alpha\lambda} d \cdot \frac{dy}{t^{\lambda-1} dt} + a dy + \frac{(n+\nu+2) dy}{\alpha t^\lambda} - \frac{\lambda(n+1) a y dt}{t} =$$

und wenn nun das Element dt conſtant genommen wird, ſo erhält man

$$\frac{d^2 y}{\alpha\lambda t^{\lambda-1} dt} - \frac{(\lambda-1) dy}{\alpha\lambda t^\lambda} - a dy + \frac{(n+\nu+2) dy}{\alpha t^\lambda} - \frac{\lambda(n+1) a y dt}{t} =$$

oder

$$d^2 y - \alpha\lambda a t^{\lambda-1} dt dy + \frac{(\lambda n + \lambda\nu + \lambda + 1) dt \cdot dy}{t} - \alpha\lambda^2 (n+1) a t^{\lambda-2} y dt^2 =$$

und das entſprechende Integrale iſt:

$$y = \int e^{\alpha t^\lambda x} x^n dx (a - x)^\nu.$$

Man ſetze ferner

$$\frac{dy}{y} = P dt + \frac{dz}{z}, \quad \text{und es ſey} \quad z = e^{-\int P dt} y,$$

ſo wird man erhalten

$$d^2 z + 2P dt dz - \alpha\lambda a t^{\lambda-1} dt dz + (\lambda n + \lambda\nu + \lambda + 1) \frac{dt dz}{t} + z dt$$

$$+ z dt^2 \left[P^2 - \alpha\lambda a t^{\lambda-1} P + \frac{(\lambda n + \lambda\nu + \lambda + 1) P}{t} - \alpha\lambda^2 (n+1) a t^{\lambda-2} \right] =$$

Um nun die Glieder, welche mit dz multiplicirt ſind, wegzuſchaffen, ſetze man

$$P = \tfrac{1}{2} \alpha\lambda a t^{\lambda-1} - \frac{(\lambda n + \lambda\nu + \lambda + 1)}{2t},$$

und es wird folgende Gleichung zum Vorſchein kommen:

$$d^2 z - z dt^2 \left[\frac{(\lambda n + \lambda\nu + \lambda)^2 - 1}{4t^2} + \tfrac{1}{2} \alpha\lambda^2 (n - \nu) a t^{\lambda-2} \right.$$

$$\left. + \tfrac{1}{4} \alpha^2 \lambda^2 a^2 t^{2\lambda-2} \right] =$$

welcher folgendes Integrale entſpricht:

$$z = e^{-\frac{1}{2}\alpha a t^\lambda} t^{\frac{\lambda n + \lambda\nu + \lambda + 1}{2}} \int e^{\alpha t^\lambda x} x^n dx (a - x)^\nu.$$

Wenn nun alſo

$$\nu = n; \quad \lambda^2(2n+1)^2 - 1 = 0, \text{ oder}$$

$$\lambda = \frac{\pm 1}{2n+1} \text{ und } \alpha = \pm\frac{2}{\lambda} = \pm 2(2n+1),$$

erhält man die Gleichung

$$d^2z - a^2 z\, t^{\frac{\pm 2}{2n+1} - 2}\, dt^2 = 0,$$

d dieſer entſpricht das Integrale

$$= e^{\pm(2n+1)at^{\frac{\pm 1}{2n+1}}}\, t^{\pm\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} \int e^{\pm 2(2n+1)t^{\frac{\pm 1}{2n+1}}x}\, x^n\, dx\,(a-x)^n.$$

Oder es gehört zur Gleichung

$$d^2z - a^2 t^{2\lambda-2} z\, dt^2 = 0$$

s Integrale

$$z = e^{-\frac{a}{\lambda}t^\lambda}\, t \int e^{\frac{2x}{\lambda}t^\lambda}\, x^{\pm\frac{1}{2\lambda}-\frac{1}{2}}\, dx\,(a-x)^{\pm\frac{1}{2\lambda}-\frac{1}{2}},$$

d wir ergreifen daher dieſe Gelegenheit, ſolche Integrationen allgeiner auszuführen.

Beyſpiel 4.

§. 1040. Bezeichnen P und Q beliebige Functionen n u, und man nimmt

$$y = P \int e^{Qx}\, x^{n-1}\, dx\,(a-x)^{\nu-1},$$

nn nämlich nach der Integration $x = a$ geſetzt wird, wird dieſer Werth von y das Integrale irgend ei- Differenzialgleichung des zweyten Grades

$$\frac{L\,d^2y}{du^2} + \frac{M\,dy}{du} + Ny = 0$$

yn, und dieſe Gleichung iſt zu ſuchen.

Zur Abkürzung der Rechnung ſetzen wir

$$dP = P'du; \quad dP' = P''du; \text{ eben ſo}$$

$$dQ = Q'du; \quad dQ' = Q''du.$$

Es wird demnach ſeyn

$$= P' \int e^{Qx}\, x^{n-1}\, dx\,(a-x)^{\nu-1} + PQ' \int e^{Qx}\, x^n\, dx\,(a-x)^{\nu-1}$$

d

$$\frac{d^2y}{du^2} = P''\int e^{Qx}x^{n-1}dx(a-x)^{\nu-1} + 2P'Q'\int e^{Qx}x^n dx(a-x)^{\nu-1}$$
$$+ PQ''\int e^{Qx}x^n dx(a-x)^{\nu-1} + PQ'^2\int e^{Qx}x^{n+1}dx(a-x)^{\nu-1},$$

und hieraus folgt dann

$$\frac{L\,d^2y}{du^2} + \frac{M\,dy}{du} + Ny =$$
$$= \int e^{Qx}x^{n-1}dx(a-x)^{\nu-1}\left\{\begin{matrix} LP'' + 2LP'Q'x + LPQ''x + LPQ'^2x^2 \\ + MP' + MPQ'x + NP \end{matrix}\right\}$$

welches Integrale $= e^{Qx}x^n(a-x)^\nu$ seyn soll, so daß es für $x=a$ verschwindet, wenn nur $\nu > 0$, so wie es auch für $x=0$ verschwindet, wenn nur $n > 0$ ist. Das Differenziale dieses Ausdruckes ist:

$$e^{Qx}x^{n-1}dx(a-x)^{\nu-1}[Qx(a-x) + na - (n+\nu)x],$$

und die Vergleichung dieses Differenziales mit der oben gefundenen Form führt auf nachstehende Relationen:

$$LP'' + MP' + NP = na,$$
$$2LP'Q' + LPQ'' + MPQ' = aQ - (n+\nu) \text{ und}$$
$$LPQ'^2 = -Q, \text{ also } L = -\frac{Q}{PQ'^2}, \text{ folglich ist}$$
$$M = \frac{aQ}{PQ'} - \frac{(n+\nu)}{PQ'} + \frac{2P'Q}{P'^2Q'^2} + \frac{QQ''}{PQ'^3} \text{ und}$$
$$N = \frac{na}{P} + \frac{P''Q}{P^2Q'^2} - \frac{MP'}{P},$$

und so ist denn die gesuchte Differenzialgleichung des zweyten Grades bekannt.

Zusatz 1.

§. 1041. Wollen wir $M=0$ setzen, so wird seyn

$$aQ - (n+\nu) + \frac{2P'Q}{PQ'} + \frac{QQ''}{Q'^2} = 0,$$

welche Gleichung durch die Multiplication mit $\frac{Q'du}{Q}$ in folgende übergeht:

$$\frac{2dP}{P} + a\,dQ - \frac{(n+\nu)\,dQ}{Q} + \frac{dQ'}{Q'} = 0,$$

und das Integrale derselben ist

$$\frac{e^{aQ}P^2Q'}{Q^{n+\nu}} = \text{Const. oder}$$
$$P = Ce^{-\frac{1}{2}aQ}Q^{\frac{n+\nu}{2}}\sqrt{\frac{du}{dQ}}.$$

Zuſatz 2.

§. 1042. Sey $Q = 2\alpha u^{\lambda}$, ſo wird man erhalten:

$$Q' = 2\alpha\lambda u^{\lambda-1} \quad \text{und}$$

$$P = Ce^{-\alpha a u^{\lambda}} \cdot u^{\frac{\lambda(n+\nu-1)+1}{2}}, \quad \text{daher}$$

$$L = -\frac{1}{2\alpha\lambda^2} e^{\alpha a u^{\lambda}} \cdot u^{\frac{-\lambda(n+\nu+1)+3}{2}} \quad \text{und}$$

$$N = \frac{n\alpha}{P} + \frac{Q\,d^2P}{P^2\,dQ^2}.$$

Es iſt aber

$$\frac{Q}{dQ^2} = \frac{u^{-\lambda+2}}{2\alpha\lambda^2\,du^2}, \quad \text{und weil}$$

$$\frac{dP}{P} = -\alpha\lambda a u^{\lambda-1}\,du + \frac{\lambda(n+\nu-1)+1}{2}\cdot\frac{du}{u}$$

, ſo wird man finden

$$\frac{P}{-} = -\alpha\lambda(\lambda-1)a u^{\lambda-2}du^2 - \frac{\lambda(n+\nu-1)+1}{2}\cdot\frac{du^2}{u^2} +$$

$$+ \alpha^2\lambda^2 a^2 u^{2\lambda-2}du^2 -$$

$$\alpha\lambda a[\lambda(n+\nu-1)+1]u^{\lambda-2}du^2 + \frac{[\lambda(n+\nu-1)+1]^2}{4}\cdot\frac{du^2}{u^2},$$

er

$$\frac{P}{-} = \alpha^2\lambda^2 a^2 u^{2\lambda-2}du^2 - \alpha\lambda^2(n+\nu)a u^{\lambda-2}du^2 +$$

$$+ \frac{\lambda^2(n+\nu-1)^2-1}{4}\cdot\frac{du^2}{u^2}, \quad \text{folglich}$$

$$+\frac{Q}{dQ^2}\cdot\frac{d^2P}{P} = \tfrac{1}{2}\alpha a^2 u^{\lambda} + \tfrac{1}{2}(n-\nu)a + \frac{\lambda^2(n+\nu-1)^2-1}{8\alpha\lambda^2}u^{-\lambda}$$

)

$$= e^{\alpha a u^{\lambda}} \cdot u^{\frac{-\lambda(n+\nu-1)-1}{2}} \left[\tfrac{1}{2}\alpha a^2 u^{\lambda} + \tfrac{1}{2}(n-\nu)a + \frac{\lambda^2(n+\nu-1)^2-1}{8\alpha\lambda^2}u^{-\lambda}\right].$$

Zuſatz 3.

§. 1043. Es wird alſo ſeyn:

$$= -2\alpha\lambda^2 u^{\lambda-2}\left[\tfrac{1}{2}\alpha a^2 u^{\lambda} + \tfrac{1}{2}(n-\nu)a + \frac{\lambda^2(n+\nu-1)^2-1}{8\alpha\lambda^2}u^{-\lambda}\right]$$

und die Gleichung

$$\frac{d^2y}{du^2} = y\left[\alpha^2\lambda^2 a^2 u^{2\lambda-2} + \alpha\lambda^2(n-\nu)\,a\,u^{\lambda-2} + \frac{\lambda^2(n+\nu-1)^2-1}{4u^2}\right]$$

hat folgendes Integrale:

$$y = e^{-\alpha a u^{\lambda}} \cdot u^{\frac{\lambda(n+\nu-1)+1}{2}} \int e^{2\alpha u^{\lambda} x}\, x^{n-1}\, dx\, (a-x)^{\nu-1}.$$

Setzen wir $\alpha = \frac{1}{\lambda}$, $\lambda(n-\nu) = f$ oder $\nu = n - \frac{f}{\lambda}$ und $\frac{\lambda^2(n+\nu-1)\,2-1}{4} = g$, so werden wir dann erhalten:

$$n = \frac{f+\lambda+\sqrt{1+4g}}{2\lambda} \text{ und } \nu = \frac{-f+\lambda+\sqrt{1+4g}}{2\lambda}, \text{ und der Gleichung}$$

$d^2y = y\,du^2\,(a^2u^{2\lambda-2} + afu^{\lambda-2} + gu^{-2})$ entspricht das Integrale

$$y = e^{-\frac{a}{\lambda}u^{\lambda}} \cdot u^{\frac{\lambda(n+\nu-1)+1}{2}} \int e^{\frac{2x}{\lambda}\cdot u^{\lambda}}\, x^{n-1}\, dx\, (a-x)^{\nu-1}, \text{ oder}$$

$$y = e^{-\frac{a}{\lambda}u^{\lambda}} \cdot u^{\frac{1+\sqrt{1+4g}}{2}} \int e^{\frac{2x}{\lambda}\cdot u^{\lambda}}\, x^{\frac{f-\lambda+\sqrt{1+4g}}{2\lambda}}\, dx\, (a-x)^{\frac{-f-\lambda+\sqrt{1+4g}}{2\lambda}}.$$

Zusatz 4.

§. 1044. Wenn wir $\alpha = \frac{-1}{\lambda}$, $\lambda(n-\nu) = -f$ und $\frac{\lambda^2(n+\nu-1)^2-1}{4} = g$, setzen, so wird seyn:

$$n = \frac{-f+\lambda+\sqrt{1+4g}}{2\lambda} \text{ und } \nu = \frac{f+\lambda+\sqrt{1+4g}}{2\lambda},$$

und daher wird nachstehende Gleichung, welche mit der vorhergehenden übereinstimmt, nämlich

$$d^2 y = y\, du^2 \left(a^2 u^{2\lambda-2} + a f u^{\lambda-2} + g u^{-2}\right)$$ folgendes Integrale haben:

$$y = e^{\frac{a}{\lambda} u^{\lambda}} \cdot u^{\frac{1+\sqrt{1+4g}}{2}} \int e^{-\frac{2x}{\lambda} u^{\lambda}} x^{\frac{-f-\lambda+\sqrt{1+4g}}{2\lambda}} dx\, (a-x)^{\frac{+f-\lambda+\sqrt{1+4g}}{2\lambda}},$$

wo nothwendig $n > 0$ und $\nu > 0$ seyn muß.

Beyspiel 5.

§. 1045. Setzen wir $y = \int dx\, (a^2 - x^2)^{\nu-1} \cos. \alpha u^{\lambda} x$, indem nach der Integration $x = a$ gesetzt wird, damit y irgend einer Function von u gleich werde, so soll eine Differenzialgleichung des zweyten Grades gefunden werden, der jene Gleichung Genüge leistet.

Es ist hier

$$\frac{dy}{du} = -\alpha\lambda u^{\lambda-1} \int x\, dx\, (a^2 - x^2)^{\nu-1} \sin. \alpha u^{\lambda} x \quad \text{und}$$

$$\frac{d^2 y}{du^2} = \int x\, dx\, (a^2 - x^2)^{\nu-1} \left[-\alpha\lambda(\lambda-1) u^{\lambda-2} \sin. \alpha u^{\lambda} x - \alpha^2 \lambda^2 u^{2\lambda-2} x \cos. \alpha u^{\lambda} x\right],$$

und demnach wird seyn:

$$\frac{L\, d^2 y}{du^2} + \frac{M\, dy}{du} + Ny =$$

$$= \int dx (a^2 - x^2)^{\nu-1} \left[N \cos. \alpha u^{\lambda} x - \alpha\lambda M u^{\lambda-1} x \sin. \alpha u^{\lambda} x - \alpha\lambda(\lambda-1) L u^{\lambda-2} x \sin. \alpha u^{\lambda} x - \alpha^2\lambda^2 L u^{2\lambda-2} x^2 \cos. \alpha u^{\lambda} x\right].$$

Man setze nun, das Integrale sey $= (a^2 - x^2)^{\nu} \sin. \alpha u^{\lambda} x$, welches sowohl für $x = 0$, als auch für $x = a$ verschwindet, so erhält man nach gehöriger Vergleichung:

$$L = \frac{u^{-\lambda+2}}{\alpha\lambda^2}; \quad M = \frac{2\lambda\nu-\lambda+1}{\alpha\lambda^2}.u^{-\lambda+1}; \quad N = \alpha a^2 u^{\lambda}.$$

Es entſpricht demnach der Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (2\lambda\nu - \lambda + 1)\frac{dy}{u\,du} + \alpha^2\lambda^2 a^2 u^{2\lambda-2} y = 0$$

folgendes Integrale:

$$y = \int dx\,(a^2-x^2)^{\nu-1}\cos.\,\alpha u^{\lambda} x.$$

Zuſatz 1.

§. 1046. Wenn alſo $\nu = \frac{\lambda-1}{2\lambda}$ und $\alpha = \frac{1}{\lambda}$, ſo erhalten wir für die Gleichung

$$\frac{d^2y}{du^2} + a^2 u^{2\lambda-2} y = 0$$

folgendes Integrale:

$$y = \int dx\,(a^2-x^2)^{\frac{-\lambda-1}{2\lambda}}\cos.\,\frac{1}{\lambda}u^{\lambda}x;$$

wenn nämlich nach der Integration $x = a$ geſetzt, und das Integrale ſo genommen wird, daß es für $x = o$ verſchwindet.

Zuſatz 2.

§. 1047. Wenn alſo $\frac{-\lambda-1}{2\lambda} = k =$ einer ganzen Zahl iſt, oder $\lambda = \frac{-1}{2k+1}$, ſo entſpricht der Gleichung

$$d^2y + a^2 u^{\frac{-4k-4}{2k+1}} y\,du^2 = 0$$

nachſtehendes Integrale:

$$y = \int dx\,(a^2-x^2)^k\cos.\,\frac{1}{\lambda}u^{\lambda}x;$$

welches ſich wirklich darſtellen läßt. Es ergeben ſich nämlich die oben angezeigten integrablen Fälle.

Anmerkung.

§. 1048. Da wir $y = \int V dx$ geſetzt haben, wobey V irgend eine Function von u und x bezeichnet, von welchen wir aber bey dieſer Integration bloß x als veränderlich betrachteten, ſo iſt es nicht abſolut nothwendig, das Integrale ſo zu beſtimmen, daß es für $x = o$ verſchwindet, ſondern es iſt ſchon hinreichend, daß es in irgend einem beſtimmten Falle, z. B. für $x = b$ verſchwindet, und daß dann, wenn

ferner $x = a$ gesetzt wird, y sich in irgend eine Function von u verwandle, welches sich durch Quadratur angeben läßt, indem wir hier die Integration der einfachen Formeln mit Recht als bekannt voraussetzen. Hier wird nun der durch u ausgedrückte Werth von y das Integrale irgend einer Differenzialgleichung des zweyten Grades von der Form

$$L\,d^2y + M\,du\,dy + N\,y\,du^2 = U\,du^2$$

bezeichnen, wobey aber erfordert wird, daß sich die Formel

$$\int dx \left[L\left(\frac{d^2V}{du^2}\right) + M\left(\frac{dV}{du}\right) + NV \right]$$

wirklich integriren läßt, wobey das Integrale ebenfalls so zu nehmen ist, daß es für $x = b$ verschwindet, dann aber $= U$ wird, wenn man $x = a$ setzt.

Aufgabe 132.

§. 1049. Wenn P und Q Functionen von x, K aber eine Function von u bezeichnet, und man setzt

$$y = \int P\,dx\,(K + Q)^n,$$

wobey das Integrale so genommen wird, daß es für $x = b$ verschwindet, dann aber $x = a$ gesetzt wird, damit y als Function von u erscheint, so soll eine Differenzialgleichung des zweyten Grades zwischen y und u gefunden werden, welcher jener Werth von y Genüge leistet.

Auflösung.

Sey $dK = K'du$, $dK' = K''du$, so wird, weil

$$y = \int (K + Q)^n\,P\,dx \text{ ist:}$$

$$\left(\frac{dy}{du}\right) = \int n K' (K + Q)^{n-1}\,P\,dx,$$

und wenn man von Neuem differenzirt:

$$\frac{d^2y}{du^2} = \int [n K'' (K + Q)^{n-1} + n(n-1) K'^2 (K + Q)^{n-2}]\,P\,dx.$$

Bezeichnen demnach L, M, N Functionen von u, so erhält man den Ausdruck

$$L\frac{d^2y}{du^2} + M\frac{dy}{du} + N.y =$$

$$\int P\,dx\,(K + Q)^{n-2}\,[N(K + Q)^2 + nMK'(K + Q) + nLK''(K + Q) + n(n-1)LK'^2] =$$

$$= \int P\,dx\,(K + Q)^{n-2} \left\{ \begin{matrix} NK^2 + nMKK' + nLKK'' + n(n-1)LK'^2 \\ + 2NKQ + nMK'Q + nLK''Q + NQ^2 \end{matrix} \right\}.$$

Da nun dieſer Ausdruck integrabel ſeyn muß, ſo ſetze man das Integrale $= R(K+Q)^{n-1} + \text{Const.}$, ſo daß dieſes wie vorher für $x = b$ verſchwindet, wobey R bloß eine Function von x ſeyn ſoll. Da nun das Differenziale dieſer Formel

$$(K+Q)^{n-2}[KdR + QdR + (n-1)RdQ]$$

iſt, ſo muß man erhalten

$$[NK^2 + nMKK' + nLKK'' + n(n-1)LK'^2]Pdx$$
$$+ (2NK + nMK' + nLK'')PQdx + NPQ^2dx =$$
$$= KdR + QdR + (n-1)RdQ.$$

Es müſſen alſo hier zweyerley Arten von Gliedern erſcheinen, ſolche nämlich, die gar kein u enthalten, und dann andere Glieder, welche die Function K enthalten, und dieſe muß man dann abgeſondert einander gleich ſetzen; zu dieſem Zwecke nehmen wir nun an, es ſey

$$NK^2 + nMKK' + nLKK'' + n(n-1)LK'^2 = A + \alpha K,$$
$$2NK + nMK' + nLK'' = B + \beta K \quad \text{und}$$
$$N = C + \gamma K.$$

Eliminiren wir aus den beyden erſten Gleichungen M, ſo erhalten wir:

$$-NK^2 + n(n-1)LK'^2 = A + \alpha K - BK - \beta K^2,$$

und hieraus folgern wir, weil $N = C + \gamma K$ iſt:

$$L = \frac{A + (\alpha - B)K - (\beta - C)K^2 + \gamma K^3}{n(n-1)K'^2} \quad \text{und hieraus}$$

$$M = \frac{B + \beta K - 2NK - nLK''}{nK'},$$

ſo daß aus der Function K ſich die Größen L, M und N beſtimmen laſſen, während die Größen A, α, B, β, C, γ was immer für Conſtanten bezeichnen.

Nun muß aber auch noch folgende Gleichung Statt finden:

$$(A + \alpha K)Pdx + (B + \beta K)PQdx + (C + \gamma K)PQ^2dx =$$
$$= KdR + QdR + (n-1)RdQ.$$

Wenn wir daher die Glieder wieder in zwey Arten abſondern und einander gleich ſetzen, ſo erhalten wir:

$$Pdx(A + BQ + CQ^2) = QdR + (n-1)RdQ,$$
$$Pdx(\alpha + \beta Q + \gamma Q^2) = dR, \quad \text{und daher iſt}$$

$$\frac{A + BQ + CQ^2}{\alpha + \beta Q + \gamma Q^2} = Q + \frac{(n-1)\,R\,dQ}{dR} \text{ oder}$$

$$\frac{(n-1)\,R\,dQ}{dR} = \frac{A + (B-\alpha)\,Q + (C-\beta)\,Q^2 - \gamma Q^3}{\alpha + \beta Q + \gamma Q^2}, \text{ alſo}$$

$$\frac{dR}{R} = \frac{(n-1)\,dQ\,(\alpha + \beta Q + \gamma Q^2)}{A + (B-\alpha)\,Q + (C-\beta)\,Q^2 - \gamma Q^3}.$$

Es wird alſo die Function R aus der Function Q beſtimmt; m aber wird

$$Pdx = \frac{(n-1)\,R\,dQ}{A + (B-\alpha)\,Q + (C-\beta)\,Q^2 - \gamma Q^3}.$$

Nun ſoll jedes Integrale $R\,(K+Q)^{n-1} + \text{Const.}$ für $x = a$ die Function U übergehen, ſo wird der anfänglich angenommene rth

$$y = \int \frac{(n-1)\,R\,dQ\,(K+Q)^n}{A + (B-\alpha)\,Q + (C-\beta)\,Q^2 - \gamma Q^3}$$

Integrale folgender Differenzialgleichung des zweyten Grades ſeyn:

$$Ld^2y + Mdudy + Nydu^2 = U\,du^2.$$

Zuſatz 1.

§. 1050. Da man für Q eine beliebige Function von x annehm kann, ſo können wir auch ohne Anſtand $Q = x$ ſetzen; dann muß m alſo R aus folgender Gleichung beſtimmen:

$$\frac{dR}{R} = \frac{(n-1)\,dx\,(\alpha + \beta x + \gamma x^2)}{A + (B-\alpha)\,x + (C-\beta)\,x^2 - \gamma x^3},$$

d man wird, wenn für K irgend eine Function von u angenommen ird, die Gleichung erhalten:

$$y = (n-1)\int \frac{R\,dx\,(K+x)^n}{A + (B-\alpha)\,x + (C-\beta)\,x^2 - \gamma x^3},$$

obey zuerſt das Integrale ſo genommen werden muß, daß es für $= b$ verſchwindet, dann aber hat man $x = a$ zu ſetzen.

Zuſatz 2.

§. 1051. Aus der Function K aber wird die Differenzialgleichung s zweyten Grades ſo gebildet, daß man

$$L = \frac{A - (B-\alpha)\,K + (C-\beta)\,K^2 + \gamma K^3}{n\,(n-1)\,dK^2}\,.\,du^2,$$

$$M = \frac{B - (2C - \beta)K - 2\gamma K^2}{n\,dK} \cdot du - \frac{L\,d^2K}{du.dK} \quad \text{und}$$

$$N = C + \gamma K$$

erhält; dann ſetze man in dem Ausdrucke $R(K+x)^{n-1}$ + Const., welcher ſo gebildet worden iſt, daß er für $x = b$ verſchwindet, $x = a$, und bezeichne durch U die hieraus ſich ergebende Function von u, ſo wird man die Differenzialgleichung des zweyten Grades erhalten:

$$L\,d^2y + M\,du\,dy + N\,y\,du^2 = U\,du^2.$$

Zuſatz 3.

§. 1052. Wenn der Ausdruck $R(K+x)^{n-1}$ + Const. ſo gebildet iſt, daß er ſowohl für $x = b$, als auch für $x = a$ verſchwindet, oder wenn vielmehr bey der Integration die Glieder ſo beſtimmt werden, daß ſie dieſe beyden Bedingungen erfüllen, ſo wird der für y angenommene Ausdruck der Gleichung

$$L\,d^2y + M\,du\,dy + N\,y\,du^2 = 0$$

Genüge leiſten, und wenn man dann dieſe Gleichung auf andere Formen bringt, ſo wird man auch die Integralien derſelben angeben können.

Aufgabe 133.

§. 1053. Bezeichnen P und Q Functionen von x, K aber eine Function von u, und man ſetzt

$$y = \int e^{KQ} P\,dx,$$

indem man das Integrale ſo beſtimmt, daß es für $x = b$ verſchwindet, dann aber $x = a$ nimmt; ſo wird y einer Function von u gleich werden, die irgend einer Differenzialgleichung des zweyten Grades Genüge leiſten wird, und dieſe Gleichung ſoll gefunden werden.

Auflöſung.

Da $y = \int e^{KQ} P\,dx$ iſt, ſo wird man erhalten

$$\frac{dy}{du} = \int e^{KQ} K' P Q\,dx \quad \text{und}$$

$$\frac{d^2y}{du^2} = \int e^{KQ} P dx \,[K'' Q + K'^2 Q^2],$$

und demnach wird

$$\frac{L d^2y}{du^2} + \frac{M dy}{du} + Ny =$$

$$= \int e^{KQ} P dx \,[N + MK' Q + LK'' Q + LK'^2 Q^2].$$

Man ſetze, das Integrale hievon ſey $e^{KQ} R$ + Const., welcher Ausdruck für $x = b$ verſchwinden ſoll, ſo muß

$$dR + KR dQ = P dx \,[N + (MK' + LK'') Q + LK'^2 Q^2]$$

werden, und aus den oben angeführten Gründen ſetzen wir

$$LK'^2 = A + \alpha K,$$

$$MK' + LK'' = B + \beta K,$$

$$N = C + \gamma K,$$

ſo werden wir erhalten

$$L = \frac{A + \alpha K}{K'^2} \quad \text{und} \quad M = \frac{B + \beta K}{K'} - \frac{LK''}{K'}$$

und folgende Gleichungen finden:

$$dR = P dx \,[C + BQ + AQ^2],$$

$$R dQ = P dx \,[\gamma + \beta Q + \alpha Q^2],$$

und hieraus folgern wir

$$\frac{dR}{R} = \frac{dQ\,[C + BQ + AQ^2]}{\gamma + \beta Q + \alpha Q^2},$$

und iſt die Function R gefunden, ſo wird

$$P dx = \frac{R dQ}{\gamma + \beta Q + \alpha Q^2}$$

werden, ſo daß nun folgende Gleichung Statt findet:

$$y = \int e^{KQ} \cdot \frac{R dQ}{\gamma + \beta Q + \alpha Q^2}.$$

Wenn nun der Ausdruck $e^{KQ} R$ + Const. für $x = a$ in die Function U übergehen ſoll, ſo wird

$$L d^2y + M du dy + Ny du^2 = U du^2$$

die Differenzialgleichung des zweyten Grades ſeyn, welcher jenes Integrale entſpricht.

$$\frac{d^2y}{du^2} = P''\int e^{Qx}x^{n-1}dx(a-x)^{\nu-1} + 2P'Q'\int e^{Qx}x^n dx(a-x)^{\nu-1}$$
$$+ PQ''\int e^{Qx}x^n dx(a-x)^{\nu-1} + PQ'^2\int e^{Qx}x^{n+1}dx(a-x)^{\nu-1},$$

und hieraus folgt dann

$$\frac{L\,d^2y}{du^2} + \frac{M\,dy}{du} + Ny =$$
$$= \int e^{Qx}x^{n-1}dx(a-x)^{\nu-1}\left\{\begin{matrix} LP'' + 2LP'Q'x + LPQ''x + LPQ'^2x^2 \\ + MP' + MPQ'x + NP \end{matrix}\right\}$$

welches Integrale $= e^{Qx}x^n(a-x)^\nu$ seyn soll, so daß es für $x=a$ verschwindet, wenn nur $\nu > o$, so wie es auch für $x=o$ verschwindet, wenn nur $n > o$ ist. Das Differenziale dieses Ausdruckes ist:

$$e^{Qx}x^{n-1}dx(a-x)^{\nu-1}[Qx(a-x) + na - (n+\nu)x],$$

und die Vergleichung dieses Differenziales mit der oben gefundenen Form führt auf nachstehende Relationen:

$$LP'' + MP' + NP = na,$$
$$2LP'Q' + LPQ'' + MPQ' = aQ - (n+\nu) \text{ und}$$
$$LPQ'^2 = -Q, \text{ also } L = -\frac{Q}{PQ'^2}, \text{ folglich ist}$$
$$M = \frac{aQ}{PQ'} - \frac{(n+\nu)}{PQ'} + \frac{2P'Q}{P'^2Q'^2} + \frac{QQ''}{PQ'^3} \text{ und}$$
$$N = \frac{n\alpha}{P} + \frac{P''Q}{P^2Q'^2} - \frac{MP'}{P},$$

und so ist denn die gesuchte Differenzialgleichung des zweyten Grades bekannt.

Zusatz 1.

§. 1041. Wollen wir $M=o$ setzen, so wird seyn

$$aQ - (n+\nu) + \frac{2P'Q}{PQ'} + \frac{QQ''}{Q'^2} = o,$$

welche Gleichung durch die Multiplication mit $\frac{Q'du}{Q}$ in folgende übergeht:

$$\frac{2dP}{P} + adQ - \frac{(n+\nu)dQ}{Q} + \frac{dQ'}{Q'} = o,$$

und das Integrale derselben ist

$$\frac{e^{aQ}P^2Q'}{Q^{n+\nu}} = \text{Const. oder}$$
$$P = Ce^{-\frac{1}{2}aQ}Q^{\frac{n+\nu}{2}}\sqrt{\frac{du}{dQ}}.$$

Zuſatz 2.

§. 1042. Sey $Q = 2\alpha u^{\lambda}$, ſo wird man erhalten:

$$Q' = 2\alpha\lambda u^{\lambda-1} \text{ und}$$

$$P = Ce^{-\alpha a u^{\lambda}} \cdot u^{\frac{\lambda(n+\nu-1)+1}{2}}, \text{ daher}$$

$$L = -\frac{1}{2\alpha\lambda^2} e^{\alpha a u^{\lambda}} \cdot u^{\frac{-\lambda(n+\nu+1)+3}{2}} \text{ und}$$

$$N = \frac{n\alpha}{P} + \frac{Q\,d^2P}{P^2\,dQ^2}.$$

Es iſt aber

$$\frac{Q}{dQ^2} = \frac{u^{-\lambda+2}}{2\alpha\lambda^2\,du^2}, \text{ und weil}$$

$$\frac{dP}{P} = -\alpha\lambda a u^{\lambda-1}\,du + \frac{\lambda(n+\nu-1)+1}{2}\cdot\frac{du}{u}$$

iſt, ſo wird man finden

$$\frac{d^2P}{P} = -\alpha\lambda(\lambda-1)a u^{\lambda-2}\,du^2 - \frac{\lambda(n+\nu-1)+1}{2}\cdot\frac{du^2}{u^2} + \\ + \alpha^2\lambda^2 a^2 u^{2\lambda-2}\,du^2 - \\ - \alpha\lambda a[\lambda(n+\nu-1)+1]u^{\lambda-2}\,du^2 + \frac{[\lambda(n+\nu-1)+1]^2}{4}\cdot\frac{du^2}{u^2},$$

oder

$$\frac{d^2P}{P} = \alpha^2\lambda^2 a^2 u^{2\lambda-2}\,du^2 - \alpha\lambda^2(n+\nu)a u^{\lambda-2}\,du^2 + \\ + \frac{\lambda^2(n+\nu-1)^2-1}{4}\cdot\frac{du^2}{u^2}, \text{ folglich}$$

$$na + \frac{Q}{dQ^2}\cdot\frac{d^2P}{P} = \tfrac{1}{2}\alpha a^2 u^{\lambda} + \tfrac{1}{2}(n-\nu)a + \frac{\lambda^2(n+\nu-1)^2-1}{8\alpha\lambda^2}u^{-\lambda}$$

und

$$N = e^{\alpha a u^{\lambda}} \cdot u^{\frac{-\lambda(n+\nu-1)-1}{2}}\left[\tfrac{1}{2}\alpha a^2 u^{\lambda} + \tfrac{1}{2}(n-\nu)a + \frac{\lambda^2(n+\nu-1)^2-1}{8\alpha\lambda^2}u^{-\lambda}\right].$$

Zuſatz 3.

§. 1043. Es wird alſo ſeyn:

$$\frac{N}{L} = -2\alpha\lambda^2 u^{\lambda-2}\left[\tfrac{1}{2}\alpha a^2 u^{\lambda} + \tfrac{1}{2}(n-\nu)a + \frac{\lambda^2(n+\nu-1)^2-1}{8\alpha\lambda^2}u^{-\lambda}\right]$$

und die Gleichung

$$\frac{d^2y}{du^2} = y\left[\alpha^2\lambda^2 a^2 u^{2\lambda-2} + \alpha\lambda^2(n-\nu)\,a\,u^{\lambda-2} + \frac{\lambda^2(n+\nu-1)^2-1}{4u^2}\right]$$

hat folgendes Integrale:

$$y = e^{-\alpha a u^{\lambda}} \cdot u^{\frac{\lambda(n+\nu-1)+1}{2}} \int e^{2\alpha u^{\lambda} x}\, x^{n-1}\, dx\, (a-x)^{\nu-1}.$$

Setzen wir $\alpha = \frac{1}{\lambda}$, $\lambda(n-\nu) = f$ oder $\nu = n - \frac{f}{\lambda}$ und $\frac{\lambda^2(n+\nu-1)\,2-1}{4} = g$,

so werden wir dann erhalten:

$$n = \frac{f+\lambda+\sqrt{1+4g}}{2\lambda} \text{ und } \nu = \frac{-f+\lambda+\sqrt{1+4g}}{2\lambda}, \text{ und der Gleichung}$$

$d^2y = y\,du^2\,(a^2u^{2\lambda-2} + af u^{\lambda-2} + g u^{-2})$ entspricht das Integrale

$$y = e^{-\frac{a}{\lambda}u^{\lambda}} \cdot u^{\frac{\lambda(n+\nu-1)+1}{2}} \int e^{\frac{2x}{\lambda}\cdot u^{\lambda}}\, x^{n-1}\, dx\, (a-x)^{\nu-1}, \text{ oder}$$

$$y = e^{-\frac{a}{\lambda}u^{\lambda}} \cdot u^{\frac{1+\sqrt{1+4g}}{2}} \int e^{\frac{2x}{\lambda}\cdot u^{\lambda}}\, x^{\frac{f-\lambda+\sqrt{1+4g}}{2\lambda}}\, dx\, (a-x)^{\frac{-f-\lambda+\sqrt{1+4g}}{2\lambda}}.$$

Zusatz 4.

§. 1044. Wenn wir $\alpha = \frac{-1}{\lambda}$, $\lambda(n-\nu) = -f$ und $\frac{\lambda^2(n+\nu-1)^2-1}{4} = g$,

setzen, so wird seyn:

$$n = \frac{-f+\lambda+\sqrt{1+4g}}{2\lambda} \text{ und } \nu = \frac{f+\lambda+\sqrt{1+4g}}{2\lambda},$$

$d^2y = y\,du^2\,(a^2u^{2\lambda-2} + afu^{\lambda-2} + gu^{-2})$ folgendes Integrale haben:

$$y = e^{\frac{a}{\lambda}u^{\lambda}} \cdot u^{\frac{1+\sqrt{1+4g}}{2}} \int e^{-\frac{2x}{\lambda}u^{\lambda}} x^{\frac{-f-\lambda+\sqrt{1+4g}}{2\lambda}} dx\,(a-x)^{\frac{+f-\lambda+\sqrt{1+4g}}{2\lambda}},$$

wo nothwendig $n > o$ und $\nu > o$ seyn muß.

Beyspiel 5.

§. 1045. Setzen wir $y = \int dx\,(a^2 - x^2)^{\nu-1} \cos.\,au^{\lambda}x$, indem nach der Integration $x = a$ gesetzt wird, damit y irgend einer Function von u gleich werde, so soll eine Differenzialgleichung des zweyten Grades gefunden werden, der jene Gleichung Genüge leistet.

Es ist hier

$$\frac{dy}{du} = -a\lambda u^{\lambda-1} \int x\,dx\,(a^2 - x^2)^{\nu-1} \sin.\,au^{\lambda}x \quad \text{und}$$

$$\frac{d^2y}{du^2} = \int x\,dx\,(a^2 - x^2)^{\nu-1}\,[-a\lambda\,(\lambda-1)\,u^{\lambda-2} \sin.\,au^{\lambda}x - a^2\lambda^2 u^{2\lambda-2}x \cos.\,au^{\lambda}x],$$

und demnach wird seyn:

$$\frac{L\,d^2y}{du^2} + \frac{M\,dy}{du} + Ny =$$

$$= \int dx(a^2-x^2)^{\nu-1}\,[N\cos.au^{\lambda}x - a\lambda Mu^{\lambda-1}x\sin.au^{\lambda}x - a\lambda(\lambda-1)Lu^{\lambda-2}x\sin.au^{\lambda}x - a^2\lambda^2Lu^{2\lambda-2}x^2\cos.au^{\lambda}x].$$

Man setze nun, das Integrale sey $= (a^2 - x^2)^{\nu} \sin.\,au^{\lambda}x$, welches sowohl für $x = o$, als auch für $x = a$ verschwindet, so erhält man nach gehöriger Vergleichung:

$$L = \frac{u^{-\lambda+2}}{\alpha\lambda^2}; \quad M = \frac{2\lambda\nu-\lambda+1}{\alpha\lambda^2}.u^{-\lambda+1}; \quad N = \alpha a^2 u^{\lambda}.$$

Es entspricht demnach der Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (2\lambda\nu - \lambda + 1)\frac{dy}{u\,du} + \alpha^2\lambda^2 a^2 u^{2\lambda-2} y = 0$$

folgendes Integrale:

$$y = \int dx\,(a^2-x^2)^{\nu-1} \cos.\,\alpha u^{\lambda} x.$$

Zusatz 1.

§. 1046. Wenn also $\nu = \frac{\lambda-1}{2\lambda}$ und $\alpha = \frac{1}{\lambda}$, so erhalten wir für die Gleichung

$$\frac{d^2y}{du^2} + a^2 u^{2\lambda-2} y = 0$$

folgendes Integrale:

$$y = \int dx\,(a^2-x^2)^{\frac{-\lambda-1}{2\lambda}} \cos.\,\frac{1}{\lambda} u^{\lambda} x;$$

wenn nämlich nach der Integration $x = a$ gesetzt, und das Integrale so genommen wird, daß es für $x = o$ verschwindet.

Zusatz 2.

§. 1047. Wenn also $\frac{-\lambda-1}{2\lambda} = k =$ einer ganzen Zahl ist, oder $\lambda = \frac{-1}{2k+1}$, so entspricht der Gleichung

$$d^2y + a^2 u^{\frac{-4k-4}{2k+1}} y\,du^2 = 0$$

nachstehendes Integrale:

$$y = \int dx\,(a^2-x^2)^k \cos.\,\frac{1}{\lambda} u^{\lambda} x;$$

welches sich wirklich darstellen läßt. Es ergeben sich nämlich die oben angezeigten integrablen Fälle.

Anmerkung.

§. 1048. Da wir $y = \int V dx$ gesetzt haben, wobey V irgend eine Function von u und x bezeichnet, von welchen wir aber bey dieser Integration bloß x als veränderlich betrachteten, so ist es nicht absolut nothwendig, das Integrale so zu bestimmen, daß es für $x = o$ verschwindet, sondern es ist schon hinreichend, daß es in irgend einem bestimmten Falle, z. B. für $x = b$ verschwindet, und daß dann, wenn

ferner $x = a$ gesetzt wird, y sich in irgend eine Function von u verwandle, welches sich durch Quadratur angeben läßt, indem wir hier die Integration der einfachen Formeln mit Recht als bekannt voraussetzen. Hier wird nun der durch u ausgedrückte Werth von y das Integrale irgend einer Differenzialgleichung des zweyten Grades von der Form

$$L d^2y + M du dy + N y du^2 = U du^2$$

bezeichnen, wobey aber erfordert wird, daß sich die Formel

$$\int dx \left[L \left(\frac{d^2 V}{du^2} \right) + M \left(\frac{dV}{du} \right) + NV \right]$$

wirklich integriren läßt, wobey das Integrale ebenfalls so zu nehmen ist, daß es für $x = b$ verschwindet, dann aber $= U$ wird, wenn man $x = a$ setzt.

Aufgabe 132.

§. 1049. Wenn P und Q Functionen von x, K aber eine Function von u bezeichnet, und man setzt

$$y = \int P dx (K + Q)^n,$$

wobey das Integrale so genommen wird, daß es für $x = b$ verschwindet, dann aber $x = a$ gesetzt wird, damit y als Function von u erscheint, so soll eine Differenzialgleichung des zweyten Grades zwischen y und u gefunden werden, welcher jener Werth von y Genüge leistet.

Auflösung.

Sey $dK = K' du$, $dK' = K'' du$, so wird, weil

$$y = \int (K + Q)^n P dx \text{ ist:}$$

$$\left(\frac{dy}{du} \right) = \int n K' (K + Q)^{n-1} P dx,$$

und wenn man von Neuem differenzirt:

$$\frac{d^2 y}{du^2} = \int [n K'' (K + Q)^{n-1} + n(n-1) K'^2 (K + Q)^{n-2}] P dx.$$

Bezeichnen demnach L, M, N Functionen von u, so erhält man den Ausdruck

$$L \frac{d^2 y}{du^2} + M \frac{dy}{du} + N y =$$

$$\int P dx (K + Q)^{n-2} [N (K + Q)^2 + n M K' (K + Q) + n L K'' (K + Q) + n(n-1) L K'^2] =$$

$$= \int P dx (K + Q)^{n-2} \left\{ \begin{matrix} N K^2 + n M K K' + n L K K'' + n(n-1) L K'^2 \\ + 2 N K Q + n M K' Q + n L K'' Q + N Q^2 \end{matrix} \right\}.$$

Da nun dieſer Ausdruck integrabel ſeyn muß, ſo ſetze man das Integrale $= R(K+Q)^{n-1} + \text{Const.}$, ſo daß dieſes wie vorher für $x = b$ verſchwindet, wobey R bloß eine Function von x ſeyn ſoll. Da nun das Differenziale dieſer Formel

$$(K+Q)^{n-2}[KdR + QdR + (n-1)RdQ]$$

iſt, ſo muß man erhalten

$$[NK^2 + nMKK' + nLKK'' + n(n-1)LK'^2]Pdx$$
$$+ (2NK + nMK' + nLK'')PQdx + NPQ^2dx =$$
$$= KdR + QdR + (n-1)RdQ.$$

Es müſſen alſo hier zweyerley Arten von Gliedern erſcheinen, ſolche nämlich, die gar kein u enthalten, und dann andere Glieder, welche die Function K enthalten, und dieſe muß man dann abgeſondert einander gleich ſetzen; zu dieſem Zwecke nehmen wir nun an, es ſey

$$NK^2 + nMKK' + nLKK'' + n(n-1)LK'^2 = A + \alpha K,$$
$$2NK + nMK' + nLK'' = B + \beta K \quad \text{und}$$
$$N = C + \gamma K.$$

Eliminiren wir aus den beyden erſten Gleichungen M, ſo erhalten wir:

$$-NK^2 + n(n-1)LK'^2 = A + \alpha K - BK - \beta K^2,$$

und hieraus folgern wir, weil $N = C + \gamma K$ iſt:

$$L = \frac{A + (\alpha - B)K - (\beta - C)K^2 + \gamma K^3}{n(n-1)K'^2} \quad \text{und hieraus}$$

$$M = \frac{B + \beta K - 2NK - nLK''}{nK'},$$

ſo daß aus der Function K ſich die Größen L, M und N beſtimmen laſſen, während die Größen A, α, B, β, C, γ was immer für Conſtanten bezeichnen.

Nun muß aber auch noch folgende Gleichung Statt finden:

$$(A + \alpha K)Pdx + (B + \beta K)PQdx + (C + \gamma K)PQ^2dx =$$
$$= KdR + QdR + (n-1)RdQ.$$

Wenn wir daher die Glieder wieder in zwey Arten abſondern und einander gleich ſetzen, ſo erhalten wir:

$$Pdx(A + BQ + CQ^2) = QdR + (n-1)RdQ,$$
$$Pdx(\alpha + \beta Q + \gamma Q^2) = dR, \quad \text{und daher iſt}$$

$$\frac{A + BQ + CQ^2}{\alpha + \beta Q + \gamma Q^2} = Q + \frac{(n-1)\,R\,dQ}{dR} \text{ oder}$$

$$\frac{(n-1)\,R\,dQ}{dR} = \frac{A + (B-\alpha)\,Q + (C-\beta)\,Q^2 - \gamma Q^3}{\alpha + \beta Q + \gamma Q^2}, \text{ also}$$

$$\frac{dR}{R} = \frac{(n-1)\,dQ\,(\alpha + \beta Q + \gamma Q^2)}{A + (B-\alpha)\,Q + (C-\beta)\,Q^2 - \gamma Q^3}.$$

Es wird also die Function R aus der Function Q bestimmt; dann aber wird

$$P\,dx = \frac{(n-1)\,R\,dQ}{A + (B-\alpha)\,Q + (C-\beta)\,Q^2 - \gamma Q^3}.$$

Nun soll jedes Integrale $R\,(K+Q)^{n-1} + \text{Const.}$ für $x = a$ die Function U übergehen, so wird der anfänglich angenommene Werth

$$y = \int \frac{(n-1)\,R\,dQ\,(K+Q)^n}{A + (B-\alpha)\,Q + (C-\beta)\,Q^2 - \gamma Q^3}$$

das Integrale folgender Differenzialgleichung des zweyten Grades seyn:

$$L\,d^2y + M\,du\,dy + N\,y\,du^2 = U\,du^2.$$

Zusatz 1.

§. 1050. Da man für Q eine beliebige Function von x annehmen kann, so können wir auch ohne Anstand $Q = x$ setzen; dann muß man also R aus folgender Gleichung bestimmen:

$$\frac{dR}{R} = \frac{(n-1)\,dx\,(\alpha + \beta x + \gamma x^2)}{A + (B-\alpha)\,x + (C-\beta)\,x^2 - \gamma x^3},$$

und man wird, wenn für K irgend eine Function von u angenommen wird, die Gleichung erhalten:

$$y = (n-1)\int \frac{R\,dx\,(K+x)^n}{A + (B-\alpha)\,x + (C-\beta)\,x^2 - \gamma x^3},$$

wobey zuerst das Integrale so genommen werden muß, daß es für $x = b$ verschwindet, dann aber hat man $x = a$ zu setzen.

Zusatz 2.

§. 1051. Aus der Function K aber wird die Differenzialgleichung des zweyten Grades so gebildet, daß man

$$L = \frac{A - (B-\alpha)\,K + (C-\beta)\,K^2 + \gamma K^3}{n\,(n-1)\,dK^2}\,.\,du^2,$$

$$M = \frac{B - (2C - \beta)K - 2\gamma K^2}{n\,dK} \cdot du - \frac{L\,d^2K}{du.dK} \quad \text{und}$$

$$N = C + \gamma K$$

erhält; dann ſetze man in dem Ausdrucke $R(K+x)^{n-1}$ + Const., welcher ſo gebildet worden iſt, daß er für $x=b$ verſchwindet, $x=a$, und bezeichne durch U die hieraus ſich ergebende Function von u, ſo wird man die Differenzialgleichung des zweyten Grades erhalten:

$$Ld^2y + Mdudy + Nydu^2 = Udu^2.$$

Zuſatz 3.

§. 1052. Wenn der Ausdruck $R(K+x)^{n-1}$ + Const. ſo gebildet iſt, daß er ſowohl für $x=b$, als auch für $x=a$ verſchwindet, oder wenn vielmehr bey der Integration die Glieder ſo beſtimmt werden, daß ſie dieſe beyden Bedingungen erfüllen, ſo wird der für y angenommene Ausdruck der Gleichung

$$Ld^2y + Mdudy + Nydu^2 = 0$$

Genüge leiſten, und wenn man dann dieſe Gleichung auf andere Formen bringt, ſo wird man auch die Integralien derſelben angeben können.

Aufgabe 133.

§. 1053. Bezeichnen P und Q Functionen von x, K aber eine Function von u, und man ſetzt

$$y = \int e^{KQ} P\,dx,$$

indem man das Integrale ſo beſtimmt, daß es für $x = b$ verſchwindet, dann aber $x = a$ nimmt; ſo wird y einer Function von u gleich werden, die irgend einer Differenzialgleichung des zweyten Grades Genüge leiſten wird, und dieſe Gleichung ſoll gefunden werden.

Auflöſung.

Da $y = \int e^{KQ} P\,dx$ iſt, ſo wird man erhalten

$$\frac{dy}{du} = \int e^{KQ} K' PQ\,dx \quad \text{und}$$

$$\frac{d^2y}{du^2} = \int e^{KQ} P dx \,[K'' Q + K'^2 Q^2],$$

und demnach wird

$$\frac{L d^2y}{du^2} + \frac{M dy}{du} + Ny =$$

$$= \int e^{KQ} P dx \,[N + MK' Q + LK'' Q + LK'^2 Q^2].$$

Man setze, das Integrale hievon sey $e^{KQ} R + \text{Const.}$, welcher Ausdruck für $x = b$ verschwinden soll, so muß

$$dR + KR dQ = P dx \,[N + (MK' + LK'') Q + LK'^2 Q^2]$$

werden, und aus den oben angeführten Gründen setzen wir

$$LK'^2 = A + \alpha K,$$

$$MK' + LK'' = B + \beta K,$$

$$N = C + \gamma K,$$

so werden wir erhalten

$$L = \frac{A + \alpha K}{K'^2} \quad \text{und} \quad M = \frac{B + \beta K}{K'} - \frac{LK''}{K'}$$

und folgende Gleichungen finden:

$$dR = P dx \,[C + BQ + AQ^2],$$

$$R dQ = P dx \,[\gamma + \beta Q + \alpha Q^2],$$

und hieraus folgern wir

$$\frac{dR}{R} = \frac{dQ\,[C + BQ + AQ^2]}{\gamma + \beta Q + \alpha Q^2},$$

und ist die Function R gefunden, so wird

$$P dx = \frac{R dQ}{\gamma + \beta Q + \alpha Q^2}$$

werden, so daß nun folgende Gleichung Statt findet:

$$y = \int e^{KQ} \cdot \frac{R dQ}{\gamma + \beta Q + \alpha Q^2}.$$

Wenn nun der Ausdruck $e^{KQ} R + \text{Const.}$ für $x = a$ in die Function U übergehen soll, so wird

$$L d^2y + M du dy + N y du^2 = U du^2$$

die Differenzialgleichung des zweyten Grades seyn, welcher jenes Integrale entspricht.

Zusatz 1.

§. 1054. Hier kann man, wie früher, x statt Q schreiben, und demnach wird

$$\frac{dR}{R} = \frac{dx\,[C + Bx + Ax^2]}{\gamma + \beta x + \alpha x^2},$$

$$y = \int e^{Kx} \cdot \frac{R\,dx}{\gamma + \beta x + \alpha x^2},$$

und U ergibt sich aus dem Ausdrucke $e^{Kx} R + \text{Const.}$, wenn $x = a$ gesetzt wird; der Werth von R aber kann verschiedene Formen erhalten, die von der Natur der Coefficienten α, β, γ abhängen.

Zusatz 2.

§. 1055. Für K aber darf man jede beliebige Function von u setzen, deren Beschaffenheit die Form der Differenzialgleichung des zweyten Grades bestimmt. Es ist aber

$$L = \frac{A + \alpha K}{dK^2}\,du^2; \quad M = \frac{B + \beta K}{dK}\,du - \frac{(A + \alpha K)\,du\,d^2K}{dK^3}$$

$$\text{und} \quad N = C + \gamma K$$

seyn, und daher ist die Differenzialgleichung des zweyten Grades:

$$\frac{(A + \alpha K)\,d^2y}{dK^2} + \frac{(B + \beta K)\,dy}{dK} - \frac{(A + \alpha K)\,d^2K\,dy}{dK^3} + (C + \gamma K)\,y = U.$$

Zusatz 3.

§. 1056. Da hier auch u aus der Rechnung verschwindet, so ist es gleichgültig, welche Function von u für K genommen wird, und man kann daher auch, ohne der Allgemeinheit Eintrag zu thun, $K = u$ setzen, wenn man dabey nur das Element, welches man als unveränderlich angesehen hat, gehörig berücksichtiget.

Anmerkung 1.

§. 1057. Nimmt man also $K = u$, und betrachtet das Element du als constant, so daß $d^2K = o$ wird, so kann man folgende Gleichung aufstellen:

$$\frac{(A + \alpha u)\,d^2y}{du^2} + \frac{(B + \beta u)\,dy}{du} + (C + \gamma u)\,y = U,$$

wo U eine solche Function von u bezeichnet, wie wir angegeben haben. Auf ähnliche Art aber läßt sich nach der vorhergehenden Aufgabe folgende Gleichung aufstellen:

$$[A - (B - \alpha)u + (C - \beta)u^2 + \gamma u^3]\frac{d^2y}{du^2}$$
$$+(n-1)[B - (2C - \beta)u - 2\gamma u^2]\frac{dy}{du} + n(n-1)(C + \gamma u)y = U,$$

welche Gleichung für eben so allgemein zu halten ist, als hätten wir eine beliebige Function von u für K geschrieben. Denn setzt man statt u irgend eine Function von t, und betrachtet das Element dt als constant, so lassen sich hieraus alle jene Formen ableiten. Es ist daher diese Gleichung bey weitem allgemeiner, als jene, welche wir oben im Allgemeinen in unendliche Reihen aufgelöst haben. Gewöhnlich aber sind diese Gleichungen so beschaffen, daß ihre Integration nach andern Methoden nicht ausgeführt werden kann, weßhalb es diese Methode allerdings verdient, daß ihrer weitern Ausbildung die Geometer ihre ganze Aufmerksamkeit widmen.

Anmerkung 2.

§. 1058. Ich bin bey der Auffindung solcher Constructionen dergestalt zu Werke gegangen, daß ich anfänglich irgend eine Differenzialformel $\int V dx = y$, in welcher V eine gewisse Function von u und x war, wobey aber u als unveränderlich angesehen wurde, gleichsam aufs Geradewohl angenommen habe, und dann nach der Bestimmung des der Größe x beygelegten Werthes auf eine Differenzialgleichung des zweyten Grades zwischen u und y gekommen bin, welcher eine angenommene Formel Genüge leistete. Es ist jedoch hiebey zu bemerken, daß jene Integralformel nicht ganz von unserer Willkür abhänge, sondern die Eigenschaft besitzen müsse, daß man nach gehöriger Entwickelung endlich auf eine Differenzialgleichung des zweyten Grades geleitet werde. So lange aber diese Wahl jener Formel bloß einem glücklichen Errathen überlassen bleibt, werden wir nur sehr wenige Formen auffinden, die uns zum vorgesteckten Ziele führen; noch weit weniger aber läßt sich hoffen, daß wir auf diesem Wege jemahls auf eine gegebene Differenzialgleichung des zweyten Grades kommen werden, und es scheint, daß wir die hier gelehrten Constructionen größtentheils dem Zufalle zu verdanken haben. Da wir also noch weit von der Auflösung des Problemes: »Wenn irgend eine Differenzialgleichung des zweyten Grades gegeben ist, eine Formel aufzufinden, durch welche die Integration jener Gleichung ausgeführt wird:« entfernt sind,

und es noch unentſchieden zu ſeyn ſcheint, ob dieſes Problem jemahls wird aufgelöſt werden können; ſo werden wir uns um ſo mehr bemühen müſſen, wenigſtens für beſondere Fälle aus der Natur der vorgelegten Gleichung die Auffindung einer integrirenden Formel abzuleiten, und ſo auf irgend eine Weiſe den Weg zur directen Auflöſung zu bahnen. Zu dieſem Zwecke aber laſſen ſich die unendlichen Reihen, mittelſt welchen wir derley Gleichungen eben aufzulöſen gelehrt haben, mit Nutzen gebrauchen; ich werde deßhalb im nächſten Kapitel eine Methode auseinander ſetzen, aus einer unendlichen Reihe, welche die Auflöſung irgend einer Differenzialgleichung des zweyten Grades enthält, jene Integralformel abzuleiten.

Kapitel XI.

Von der Construction der Differenzialgleichungen des zweyten Grades, gegründet auf ihre Auflösung mittelst unendlicher Reihen.

Aufgabe 134.

§. 1059. Die unendliche Reihe

$$A + Bs + Cs^2 + \ldots + Ms^{k-1} + Ns^k + \ldots,$$

in welcher

$$B = \frac{0.m+h}{1.n+g}A;\quad C = \frac{1.m+h}{2.n+g}B;\quad D = \frac{2.m+h}{3.n+g}C,$$

und allgemein $N = \frac{(k-1)m+h}{kn+g}M$ seyn soll, sey gegeben; man soll ihre Summe durch eine Integralformel ausdrücken.

Auflösung.

Man setze, die gesuchte Summe sey $= z$, so daß

$$z = A + Bs + Cs^2 + Ds^3 + \ldots + Ms^{k-1} + Ns^k + \ldots$$

ist, so erhält man durch Differenziation:

$$\frac{dz}{ds} = 0.A + 1.Bs + 2Cs^2 + 3Ds^3 + \ldots + (k-1)Ms^{k-1} + kNs^k + \ldots$$

und durch Verbindung dieser Gleichung mit der vorhergehenden ergibt sich:

$$\frac{nsdz}{ds} + hz = hA + (m+h)Bs + (2m+h)Cs^2 + \ldots + [(k-1)m+h]Ms^{k-1} + (km+h)Ns^k + \ldots$$

Auf ähnliche Art aber findet man auch

$$\frac{nsdz}{ds} + gz = gA + (n+g)Bs + (2n+g)Cs^2 + \ldots + [(k-1)n+g]Ms^{k-1} + (kn+g)Ns^k + \ldots$$

und weil

$$(n+g)B = hA,\quad (2n+g)C = (m+h)B, \text{ u. s. w.}$$

ist, so wird die Gleichung Statt finden:

$$\frac{nsdz}{ds} + gz = gA + hAs + (m+h)Bs^2 + (2m+h)Cs^3 + \ldots$$

also wird offenbar

$$\frac{nsdz}{ds} + gz = gA + \frac{ms^2dz}{ds} + hsz, \text{ oder}$$

$$sdz(n-ms) + zds(g-hs) = gAds, \text{ das ist}$$

$$dz + \frac{zds(g-hs)}{s(n-ms)} = \frac{gAds}{s(n-ms)}.$$

Da nun aber

$$\frac{ds(g-hs)}{s(n-ms)} = \frac{gds}{ns} + \frac{(mg-nh)ds}{n(n-ms)}$$

ist, so wird jene Gleichung integrabel durch Multiplication mit

$$s^{\frac{g}{n}}(n-ms)^{\frac{nh-mg}{mn}}, \text{ und man erhält}$$

$$(n-ms)^{\frac{nh-mg}{mn}} s^{\frac{g}{n}} z = Ag\int s^{\frac{g}{n}-1} ds (n-ms)^{\frac{nh-mg}{mn}-1},$$

welches Integrale so genommen werden muß, daß, wenn man $s=0$ setzt, $z=A$ wird, und ist dieß geschehen, so werden wir erhalten:

$$z = Ags^{-\frac{g}{n}}(n-ms)^{\frac{mg-nh}{mn}} \int s^{\frac{g}{n}-1} ds (n-ms)^{\frac{nh-mg}{mn}-1}.$$

Zusatz 1.

§. 1060. Eine besondere Auflösung ist nöthig, wenn $m=0$ ist; in diesem Falle wird

$$dz + \frac{zds(g-hs)}{ns} = \frac{Agds}{ns},$$

und diese Gleichung gibt, wenn man sie mit $s^{\frac{g}{n}} e^{\frac{-hs}{n}}$ multiplicirt:

$$e^{\frac{-hs}{n}} s^{\frac{g}{n}} z = \frac{Ag}{n}\int e^{\frac{-hs}{n}} s^{\frac{g}{n}-1} ds,$$

folglich ist

$$z = \frac{Ag}{n} e^{\frac{hs}{n}} s^{\frac{-g}{n}} \int e^{-\frac{hs}{n}} s^{\frac{g}{n}-1} ds,$$

wenn das Integrale so genommen wird, daß $z=A$ für $s=0$ wird.

Zusatz 2.

§. 1061. Auch der Fall, in welchem $n=0$ ist, muß für sich aufgelöst werden, denn man hat die Gleichung

$$dz + zds\left(\frac{hs - g}{ms^2}\right) = -\frac{Agds}{ms^2}$$

$t\, s^{\frac{h}{m}}\, e^{\frac{g}{ms}}$ zu multipliciren, und dann findet man als Integrale

$$e^{\frac{g}{ms}}\, s^{\frac{h}{m}}\, z = -\frac{Ag}{m}\int e^{\frac{g}{ms}}\, s^{\frac{h}{m}-2}\, ds,$$

'glich iſt

$$z = -\frac{Ag}{m}\, e^{\frac{-g}{ms}}\, s^{\frac{-h}{m}} \int e^{\frac{g}{ms}}\, s^{\frac{h}{m}-2}\, ds.$$

Zuſatz 3.

§. 1062. Wenn $m = o$ und $n = o$ iſt, ſo wird unſere Reihe, il $N = \frac{h}{g} M$ iſt, eine geometriſche ſeyn, unſere Gleichung aber iſt

$$zds\,(g - hs) = Agds \quad \text{oder} \quad z = \frac{Ag}{g - hs},$$

: es offenbar die Natur der Sache erfordert.

Anmerkung.

§. 1063. Hier iſt beſonders der Fall bemerkenswerth, in welchem $= o$ iſt, und die Summe z ohne Integralzeichen ausgedrückt wer- kann; denn es wird ſeyn:

$$(n - ms)^{\frac{h}{m}}\, z = \text{Const.},$$

weil, wenn $s = o$ iſt, $z = A$ werden muß, ſo wird die

$$\text{Const.} = A \,.\, n^{\frac{h}{m}}, \quad \text{folglich}$$

$$z = A\, n^{\frac{h}{m}}\, (n - ms)^{-\frac{h}{m}} \quad \text{oder} \quad z = A\left(\frac{n}{n - ms}\right)^{\frac{h}{m}},$$

r auch

$$z = A\left(1 - \frac{ms}{n}\right)^{\frac{-h}{m}}.$$

Die Integration gelingt aber auch in dem Falle, wo $g = n$ denn dann erhält man:

$$(n - ms)^{\frac{h}{m}-1}\, sz = An\int ds\,(n - ms)^{\frac{h}{m}-2},$$

dieſes Integrale iſt Const. $- \frac{An\,(n - ms)^{\frac{h}{m}-1}}{h - m}$.

Weil aber $z = A$ wird, wenn man $s = o$ ſetzt, ſo wird

$$o = \text{Const.} - \frac{A}{h-m} \cdot n^{\frac{h}{m}}, \text{ und daher iſt}$$

$$z = \frac{An}{(h-m)s}\left[\left(\frac{n}{n-ms}\right)^{\frac{h}{m}-1} - 1\right]$$

$$= \frac{An}{(h-m)s}\left[\left(1 - \frac{ms}{n}\right)^{1-\frac{h}{m}} - 1\right].$$

Es iſt ferner einleuchtend, daß die Integration ausgeführt werden könne, wenn $g = 2n$ iſt; da in dieſem Falle

$$(n-ms)^{\frac{h}{m}-2} s^2 z = 2An \int s\,ds\,(n-ms)^{\frac{h}{m}-3}$$

iſt, ſo wird dieſes Integrale

$$= \text{Const.} - \frac{2Ans}{h-2m}(n-ms)^{\frac{h}{m}-2}$$

$$+ \frac{2An}{h-2m} \int ds\,(n-ms)^{\frac{h}{m}-3}$$

$$= \text{Const.} - \frac{2Ans}{h-2m}(n-ms)^{\frac{h}{m}-2} - \frac{2An(n-ms)^{\frac{h}{m}-1}}{(h-m)(h-2m)},$$

wo $\text{Const.} = \frac{2An^{\frac{h}{m}}}{(h-m)(h-2m)}$ iſt, und demnach wird

$$z = \frac{2An^2}{(h-m)(h-2m)s^2}\left[\left(\frac{n}{n-ms}\right)^{\frac{h}{m}-2} - 1 - \frac{(h-2m)s}{n}\right].$$

Auf ähnliche Art wird man auch die Integration ausführen in den Fällen, in welchen $g = 3n$, $g = 4n$ u. ſ. w. iſt.

Aufgabe 135.

§. 1064. Sey gegeben die unendliche Reihe

$$A\mathfrak{A} + B\mathfrak{B}u + C\mathfrak{C}u^2 + D\mathfrak{D}u^3 + \ldots + M\mathfrak{M}u^{k-1} + N\mathfrak{N}u^k + \ldots,$$

bey welcher die Coefficienten folgendes Geſetz befolgen:

$$B = \frac{o.m+h}{1.n+g}A; \quad C = \frac{1.m+h}{2.n+g}B; \quad D = \frac{2.m+h}{3.n+g}C; \ldots$$

$$N = \frac{(k-1)m+h}{kn+g}M;$$

$$= \frac{0.\mu+\eta}{1.\nu+\theta}\mathfrak{A};\quad \mathfrak{C} = \frac{1.\mu+\eta}{2.\nu+\theta}\mathfrak{B};\quad \mathfrak{D} = \frac{2.\mu+\eta}{3.\nu+\theta}\mathfrak{C};\ \ldots.$$

$$\mathfrak{N} = \frac{(k-1)\mu+\eta}{k\nu+\theta}\mathfrak{M};$$

an ſoll die Summe jener Reihe durch einen Integralausdruck darſtellen.

Auflöſung.

Man ſetze, die Summe ſey

$$y = A\mathfrak{A} + B\mathfrak{B}u + C\mathfrak{C}u^2 + D\mathfrak{D}u^3 + E\mathfrak{E}u^4 + \ldots,$$

d betrachte die auf dieſe Art gebildete Reihe

$$z = A + Bux + Cu^2x^2 + Du^3x^3 + Eu^4x^4 + \ldots,$$

iſt die Summe derſelben, indem $ux = s$ geſetzt wird, wie wir eben fanden haben:

$$= Ag^{-\frac{g}{n}}(n - ms)^{\frac{mg-nh}{mn}} \int s^{\frac{g}{n}-1} ds\,(n - ms)^{\frac{nh-mg}{mn}-1}$$

enn das Integrale ſo beſtimmt wird, daß $z = A$ für $s = o$ wird.

Man bilde ſich nun einen Integralausdruck von der Form:

$$= \int Pz\,dx = \int P\,dx\,(A + Bux + Cu^2x^2 + Du^3x^3 + \ldots),$$

trachte in dieſer Formel u als conſtant, für P aber nehme man eine che Function von x an, daß

$$\int Px\,dx = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}\int P\,dx;\quad \int Px^2\,dx = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}}\int Px\,dx;$$

$$\int Px^3\,dx = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{C}}\int Px^2\,dx;\quad \text{u. ſ. w.}$$

:d, nachdem man nämlich in dieſen nach dem angegebenen Geſetze ommenen Integralien der Veränderlichen x einen gegebenen Werth gelegt hat.

Da alſo

$$\int Px\,dx = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}\int P\,dx;\quad \int Px^2\,dx = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}\int P\,dx;$$

$$\int Px^3\,dx = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{A}}\int P\,dx;\quad \text{u. ſ. f.}$$

, ſo wird man erhalten:

$$V = \left[A + \frac{B\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}u + \frac{C\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}u^2 + \frac{D\mathfrak{D}}{\mathfrak{A}}u^3 + \ldots\right]\int P\,dx,$$

d hieraus erhellt, daß

$$y = \frac{\mathfrak{A}V}{\int P\,dx} = \frac{\mathfrak{A}\int Pz\,dx}{\int P\,dx}.$$

Da also der Werth von z bekannt ist, so bleibt uns nur noch übrig, die Größe P als Function von x so zu bestimmen, daß sie den angeführten Bedingungen entspricht. Im Allgemeinen muß aber seyn:

$$\int P x^k dx = \frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}} \int P x^{k-1} dx = \frac{(k-1)\mu + \eta}{k\nu + \theta} \int P x^{k-1} dx.$$

Weil es hinreichend ist, daß diese Gleichung nur in irgend einem bestimmten Falle, in welchem der Veränderlichen x ein gegebener Werth beygelegt wird, bestehe, so wollen wir setzen, es sey allgemein

$$(k\nu + \theta) \int P x^k dx = [(k-1)\mu + \eta] \int P x^{k-1} dx + x^k Q,$$

so daß für die Integraltheile $Q = o$ ist. Durch Differenziation werden wir demnach erhalten:

$$(k\nu + \theta) P x^k dx = (k\mu - \mu + \eta) P x^{k-1} dx + x^k dQ + k x^{k-1} Q dx,$$

oder wenn man durch x^{k-1} dividirt:

$$(k\nu + \theta) P x dx = (k\mu - \mu + \eta) P dx + x dQ + k Q dx;$$

und da diese Gleichung für alle Werthe von k gültig bleiben muß, so erhalten wir hieraus die beyden Gleichungen:

$$\nu P x dx = \mu P dx + Q dx, \text{ und}$$
$$\theta P x dx = (\eta - \mu) P dx + x dQ;$$

wir erhalten demnach auf doppelte Art:

$$P dx = \frac{Q dx}{\nu x - \mu} \text{ und } P dx = \frac{x dQ}{\theta x - (\eta - \mu)},$$

und wenn wir den einen Werth durch den andern dividiren:

$$\frac{x dQ}{Q dx} = \frac{\theta x + \mu - \eta}{\nu x - \mu} \text{ oder } \frac{dQ}{Q} = \frac{dx (\theta x + \mu - \eta)}{x (\nu x - \mu)},$$

welcher Ausdruck sich auflöst in

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{\eta - \mu}{\mu x} dx + \frac{\mu\theta + \mu\nu - \eta\nu}{\mu (\nu x - \mu)} dx,$$

und daher findet man durch Integration:

$$Q = x^{\frac{\eta}{\mu} - 1} (\nu x - \mu)^{\frac{\theta\mu - \eta\nu}{\mu\nu} + 1} \text{ oder}$$
$$Q = - x^{\frac{\eta}{\mu} - 1} (\mu - \nu x)^{\frac{\theta\mu - \eta\nu}{\mu\nu} + 1},$$

folglich wird

$$P dx = x^{\frac{\eta}{\mu} - 1} dx (\mu - \nu x)^{\frac{\theta\mu - \eta\nu}{\mu\nu}}.$$

Da alſo die Gleichung Statt findet:

$$(k\nu+\theta)\int P x^k dx = [(k-1)\mu+\eta]\int P x^{k-1} dx - x^{k+\frac{\eta}{\mu}-1}(\mu-\nu x)^{\frac{\theta\mu-\eta\nu}{\mu\nu}+1},$$

wenn dieſe Integralien ſo genommen werden, daß ſie für $x=0$ verſchwinden, dann aber $x=\frac{\mu}{\nu}$ geſetzt wird, ſo wird man, wie es unſere Vorausſetzung verlangt, erhalten:

$$\int P x^k dx = \frac{(k-1)\mu+\eta}{k\nu+\theta}\int P x^{k-1} dx,$$

allein zu dieſem Ende muß

$$k+\frac{\eta}{\mu}-1>0 \quad \text{und} \quad \frac{\theta\mu-\eta\nu}{\mu\nu}+1>0 \quad \text{ſeyn.}$$

Findet dieſe Bedingung Statt, ſo wird die Summe der vorgelegten Reihe ſo ausgedrückt werden, daß

$$\int x^{\frac{\eta}{\mu}-1} dx(\mu-\nu x)^{\frac{\theta\mu-\eta\nu}{\mu\nu}} = \mathfrak{A}\int x^{\frac{\eta}{\mu}-1} z\, dx(\mu-\nu x)^{\frac{\theta\mu-\eta\nu}{\mu\nu}}$$

wird, und hiebey iſt

$$z = A g s^{-\frac{g}{n}}(n-ms)^{\frac{mg-nh}{mn}}\int s^{\frac{g}{n}-1} ds(n-ms)^{\frac{nh-mg}{mn}-1}.$$

wenn dieſes Integrale ſo genommen wird, daß $z=A$ für $s=0$ wird. Iſt aber dieſes Integrale gefunden, ſo ſchreibe man ux für s, und hat man dieſen Werth von z in jener Formel ſubſtituirt, ſo muß man die Größe u als conſtant betrachten, bis jene Integrationen nach dem vorgeſchriebenen Geſetze ausgeführt ſind; denn dann wird y als eine Function von u erſcheinen, welche die Summe der vorgelegten Reihe ausdrückt.

Zuſatz 1.

§. 1065. Weil wir die beyſammen ſtehenden Coefficienten unſerer Reihe nach ähnlichen Bildungsgeſetzen fortſchreiten laſſen, ſo kann man die einzelnen Reihen A, B, C, D... und $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$... mit einander vertauſchen, und demnach erhalten wir auf dieſe Art eine doppelte Formel für den Summenausdruck der Reihe.

Zuſatz 2.

§. 1066. Erſcheint gleichwohl die Function Q nicht in der Rechnung, ſo muß man dieſelbe doch kennen, weil aus ihrer Beſchaffenheit die Glieder des Integralausdrucks gebildet werden müſſen, ſo daß für

jedes derſelben $Q=0$ wird. Dieſe Glieder ſind nämlich $x=$
$x=\frac{\mu}{\nu}$, wenn nur

$$k+\frac{\eta}{\mu}-1>0 \quad \text{und} \quad \frac{\theta\mu-\eta\nu}{\mu\nu}+1>0$$

iſt, wobey k eine ganze poſitive Zahl bezeichnet.

Zuſatz 3.

§. 1067. Die Fälle, in welchen entweder $\mu=0$ oder $\nu=$ müſſen für die Function Q beſonders entwickelt werden. Im Falle, wo $\mu=0$ iſt, wird

$$\frac{dQ}{Q}=\frac{dx\,(\theta x-\eta)}{\nu x^2}=\frac{\theta\,dx}{\nu x}-\frac{\eta\,dx}{\nu x^2},$$

und demnach erhält man

$$Q=e^{\frac{\eta}{\nu x}}x^{\frac{\theta}{\nu}}$$

Im andern Falle, wo $\nu=0$ iſt, findet man

$$\frac{dQ}{Q}=\frac{dx\,(\theta x+\mu-\eta)}{-\mu x}=-\frac{\theta\,dx}{\mu}+\frac{\eta-\mu}{\mu}\cdot\frac{dx}{x},$$

und daher iſt

$$Q=e^{-\frac{\theta x}{\mu}}x^{\frac{\eta}{\mu}-1}.$$

Anmerkung.

§. 1068. Die auf dieſe Art auszuführenden Conſtructione jenen, welche wir im vorhergehenden Kapitel gelehrt haben, ganz lich, da die Rechnung auch auf eine Integralformel von der $\int V\,dx$ zurückgeführt wird, wobey V eine Function der zwey Ver lichen u und x iſt, von welchen aber die erſtere u bey der Integ als conſtant angeſehen wird; nach der Integration aber legt ma Größe x irgend einen beſtimmten Werth bey. Dieſe Conſtructio ſtreckt ſich jedoch auf Fälle, welche in der obigen Methode nicht griffen ſind, und zwar dann beſonders, wenn die Größe z tran dente Functionen enthält. Umgekehrt aber haben wir auch ge daß die vorhergehende Methode auf ſolche Gleichungen angewende den könne, welche ſich nicht durch ſolche Reihen, wie die hier geb ten ſind, auflöſen laſſen. Es ſcheint demnach, daß aus dieſer manche ſchätzenswerthe Erweiterungen für die Analyſis geſchöpf den können.

Aufgabe 136.

§. 1069. Sey gegeben die Differenzialgleichung des zweyten Grades:

$$x^n(a + bx^n)\,d^2y + (c + ex^n)\,dxdy + (f + gx^n)\,ydx^2 = 0;$$

man soll den Werth von y durch eine Integralformel ausdrücken.

Auflösung I.

Diese Gleichung haben wir oben (§. 967) so in eine Reihe aufgelöst, daß wir, nachdem

$$y = x^\lambda (A + Bx^n + Cx^{2n} + Dx^{3n} + Ex^{4n} + \ldots)$$

gesetzt worden war, zuerst dem Exponenten λ eine Wurzel der Gleichung

$$\lambda(\lambda - 1)\,a + \lambda c + f = 0$$

als Werth beylegen mußten, dann aber wurde Kürze halber

$$\lambda(\lambda - 1)\,b + \lambda e + g = h$$

gesetzt, und daher wird

$$B = \frac{-h}{n[na + (2\lambda - 1)\,a + c]}\,A,$$

$$C = \frac{-n^2b - (2\lambda - 1)\,nb - ne - h}{2n[2na + (2\lambda - 1)\,a + c]}\,B,$$

$$D = \frac{-4n^2b - 2(2\lambda - 1)\,nb - 2ne - h}{3n[3na + (2\lambda - 1)\,a + c]}\,C,$$

so demnach ist allgemein, wenn $Mx^{(k-1)n} + Nx^{kn}$ zwey beliebige, unmittelbar auf einander folgende Glieder jener Reihe sind:

$$= \frac{-(k-1)^2n^2b - (2\lambda - 1)(k-1)\,nb - (k-1)\,ne - h}{kn[kna + (2\lambda - 1)\,a + c]}\,M.$$

Da nun hier der Nenner schon Factoren von der oben angenommenen Form hat, so wollen wir auch den Zähler in Factoren zerlegen; setzen wir demnach denselben = 0, so erhalten wir:

$$(-1)\,n = -\tfrac{1}{2}(2\lambda - 1) - \frac{e}{2b} \pm$$

$$\pm\sqrt{\left[\tfrac{1}{4}(2\lambda - 1)^2 + \frac{(2\lambda - 1)\,e}{2b} + \frac{e^2}{4b^2} - \frac{h}{b}\right]}, \text{ oder}$$

$$(-1)\,n = -\tfrac{1}{2}(2\lambda - 1) - \frac{e}{2b} \pm \frac{1}{2b}\sqrt{(b-e)^2 - 4bg}.$$

Man setze Kürze halber

$$\sqrt{(b-e)^2 - 4bg} = q, \text{ so daß}$$

$$(k-1)\,n = \frac{-(2\lambda-1)\,b - e \pm q}{2b}$$

wird, so erhalten wir folgende Relation:

$$N = \frac{\left\{\begin{matrix} -[(k-1)\,nb + \frac{1}{2}(2\lambda-1)\,b + \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}q] \\ [(k-1)\,nb + \frac{1}{2}(2\lambda-1)\,b + \frac{1}{2}e + \frac{1}{2}q] \end{matrix}\right\}}{knb\,[kna + (2\lambda-1)\,a + c]}\,M.$$

Setzen wir nun $x^n = u$, und geben der gefundenen Reihe die Form:

$$\frac{y}{x^\lambda} = A\mathfrak{A} + B\mathfrak{B}u + C\mathfrak{C}u^2 + \ldots + M\mathfrak{M}u^{k-1} + N\mathfrak{N}u^k + \ldots$$

so stellt sich das Bildungsgesetz dieser doppelten Coefficienten auf folgende Art dar:

$$N = \frac{(k-1)\,nb + \frac{1}{2}(2\lambda-1)\,b + \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}q}{-knb}\,M, \text{ und}$$

$$\mathfrak{N} = \frac{(k-1)\,nb + \frac{1}{2}(2\lambda-1)\,b + \frac{1}{2}e + \frac{1}{2}q}{kpa + (2\lambda-1)\,a + c}\,\mathfrak{M}.$$

Weil also diese Reihe der vorhin aufgestellten ähnlich ist, so finden wir durch Vergleichung dieser beyden Reihen:

$$m = nb; \qquad h = \tfrac{1}{2}(2\lambda-1)\,b + \tfrac{1}{2}e - \tfrac{1}{2}q,$$
$$n = -nb \text{ und } g = o;$$
$$\mu = nb; \qquad \eta = \tfrac{1}{2}(2\lambda-1)\,b + \tfrac{1}{2}e + \tfrac{1}{2}q,$$
$$\nu = na \text{ und } \theta = (2\lambda-1)\,a + c.$$

Suchen wir also zuerst die Größe z, und gebrauchen, damit der Buchstabe x keine Zweydeutigkeit verursache, statt dieses Buchstabens x den wir in dem vorhergehenden Probleme angenommen haben, die Größe t, und setzen $ut = s$, so wird, weil $g = o$ ist, nach §. 106

$$z = A\,(1+s)^{\frac{-(2\lambda-1)b-e+q}{2nb}} = A\,(1+ut)^{\frac{-(2\lambda-1)b-e+q}{2nb}}$$

Nach Bestimmung dieses Werthes behandle man bey den folgenden Integrationen die Größe u als constant, so wird, weil für die obige y hier $\frac{y}{x^\lambda}$ und für das obige x hier t zu setzen ist:

$$\frac{y}{x^\lambda}\int t^{\frac{n}{\mu}-1}\,dt\,(\mu-\nu t)^{\frac{\theta\mu-n\nu}{\mu\nu}} = A\int t^{\frac{n}{\mu}-1}\,z\,dt\,(\mu-\nu t)^{\frac{\theta\mu-n\nu}{\mu\nu}}$$

und da hier $u = x^n$ ist, so kann dieser Werth sogleich für u geschrieben

erden, so daß dann

$$z = A\,(1 + x^n t)^{\frac{-(2\lambda-1)\,b - e + q}{2nb}}$$

ird, und bey diesen Integrationen muß man die Größe x als unver-
änderlich ansehen. Wenn aber

$$k + \frac{n}{\mu} - 1 > 0 \quad \text{und} \quad \frac{\theta\mu - n\nu}{\mu\nu} + 1 > 0$$

yn sollte, so müssen diese Integralien so genommen werden, daß sie
für t = o verschwinden, und ist dieß geschehen, so gebe man der Größe
den Werth $t = \frac{\mu}{\nu} = \frac{b}{a}$; weil aber die Einheit der kleinste Werth
in k ist, so ist es schon hinreichend, daß

$$\frac{(2\lambda-1)\,b + e - q}{2nb} > 0, \quad \text{dann aber auch}$$

$$\frac{(2\lambda-1)\,ab + 2bc - ac - aq}{2nab} + 1 > 0$$

Da nun aber der Ausdruck

$$\int t^{\frac{n}{\mu}-1}\,dt\,(\mu - \nu t)^{\frac{\theta\mu - n\nu}{\mu\nu}}$$

ie constante Größe bezeichnet, für y aber auch jedes Vielfache der-
ben unserer Gleichung Genüge leistet, so wird sich das Integrale
ter folgender Form darstellen:

$$y = C x^{\lambda} \int t^{\frac{n}{\mu}-1}\,z\,dt\,(\mu - \nu t)^{\frac{\theta\mu - n\nu}{\mu\nu}},$$

d hiebey ist

$$z = A\,(1 + x^n t)^{\frac{-(2\lambda-1)\,b - e + q}{2nb}}.$$

Auflösung II.

§. 1071. Wir wollen die verbundenen Coefficienten mit einander
tauschen, so daß

$$\begin{aligned} m &= nb; & h &= \tfrac{1}{2}(2\lambda-1)\,b + \tfrac{1}{2}e + \tfrac{1}{2}q \\ n &= na; & g &= (2\lambda-1)\,a + c \\ \mu &= nb; & \eta &= \tfrac{1}{2}(2\lambda-1)\,b + \tfrac{1}{2}e - \tfrac{1}{2}q \\ \nu &= -nb; & \theta &= o \end{aligned}$$

d, und λ bestimmen aus der Gleichung

$$\lambda(\lambda-1)\,a + \lambda c + f = o.$$

Erſtlich ſetze man $x^n t = s$ und ſuche z, ſo wird

$$z = A g s^{\frac{-g}{n}} (n - ms)^{\frac{mg - nh}{mn}} \int s^{\frac{g}{n} - 1} ds (n - ms)^{\frac{nh - mg}{mn}}$$

wenn dieſes Integrale ſo beſtimmt wird, daß $z = A$ für $s = o$ wi
Der Werth von A iſt willkürlich, und wenn dann x als unveränderl
betrachtet wird, ſo erhält man

$$y = C x^{\lambda} \int t^{\frac{n}{\mu} - 1} z dt (\mu - \nu t)^{\frac{\theta\mu - n\nu}{\mu\nu}},$$

dieſes Integrale ſo genommen, daß es für $t = o$ verſchwindet, da
aber $t = \frac{\mu}{\nu}$ geſetzt, wenn nur $\frac{n}{\mu} > o$ und $1 - \frac{n}{\mu} > o$ iſt wegen $\theta = o$
wobey jedoch zu bemerken iſt, daß z durch folgende Differenzialgleichu
beſtimmt werde:

$$\frac{dz}{ds} = \frac{Ag - z(g - hs)}{s(n - ms)}.$$

Auflöſung III.

§. 1072. Durch eine fallende Reihe löſen wir die vorgeleg
Gleichung auf folgende Art auf: Man ſetze

$$y = x^{\lambda} (A + Bx^{-n} + Cx^{-2n} + Dx^{-3n} + \ldots),$$

und beſtimme den Exponenten λ aus der Gleichung:

$$\lambda(\lambda - 1) b + \lambda e + g = o;$$

dann aber ſey, wenn

$$\lambda(\lambda - 1) a + \lambda c + f = h \text{ geſetzt wird:}$$

$$B = \frac{-h}{n[nb - (2\lambda - 1) b - e]} A,$$

$$C = \frac{-n^2 a + (2\lambda - 1) na + nc - h}{2n[2nb - (2\lambda - 1) b - e]} B,$$

und allgemein

$$N = \frac{-(k-1)^2 n^2 a + (2\lambda - 1)(k-1) na + (k-1) ne + (k-1) nc - h}{kn[knb - (2\lambda - 1) b - e]} M,$$

welcher Ausdruck ſich, wenn

$$\sqrt{[(a - c)^2 - 4af]} = p$$

geſetzt wird, mittelſt Factoren auf folgende Art darſtellen läßt:

$$N = \frac{\left\{\begin{matrix} -[(k-1) na - \frac{1}{2}(2\lambda - 1) a - \frac{1}{2} c - \frac{1}{2} p] \\ [(k-1) na - \frac{1}{2}(2\lambda - 1) a - \frac{1}{2} c + \frac{1}{2} p] \end{matrix}\right\}}{kna[knb - (2\lambda - 1) b - e]} M.$$

Setzen wir nun $x^{-n} = u$ und bilden eine Reihe von der Form

$$\frac{y}{x^\lambda} = A\mathfrak{A} + B\mathfrak{B}u + C\mathfrak{C}u^2 + \ldots + M\mathfrak{M}u^{k-1} + N\mathfrak{N}u^k + \ldots,$$

so finden wir

$$N = \frac{(k-1)na - \frac{1}{2}(2\lambda-1)a - \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}p}{-kna} M \text{ und}$$

$$\mathfrak{N} = \frac{(k-1)na - \frac{1}{2}(2\lambda-1)a - \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}p}{knb - (2\lambda-1)b - e} \mathfrak{M},$$

und durch Vergleichung mit der allgemeinen Auflösung werden wir erhalten:

$m = na$; $h = -\frac{1}{2}(2\lambda-1)a - \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}p$
$n = -na$; $g = o$
$\mu = na$; $\eta = -\frac{1}{2}(2\lambda-1)a - \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}p$
$\nu = nb$; $\theta = -(2\lambda-1)b - e$.

Wird daher $s = ut = x^{-n}t$ gesetzt, so ergibt sich

$$z = A(1+s)^{\frac{-h}{m}} = A(1+x^{-n}t)^{\frac{-h}{m}},$$

und wenn nach Auffindung dieses Werthes die Größe t allein als veränderlich angesehen wird, so wird man folgende Gleichung erhalten:

$$y = Cx^\lambda \int t^{\frac{n}{\mu}-1} z\,dt\,(\mu - \nu t)^{\frac{\theta\mu - n\nu}{\mu\nu}},$$

wo bey der Integration die Glieder so zu bilden sind, daß jedesmahl die Gleichung

$$t^{\frac{n}{\mu}} (\mu - \nu t)^{\frac{\theta\mu - n\nu}{\mu\nu} + 1} = o$$

Statt findet.

Auflösung IV.

§. 1073. Auch hier können die mit einander verbundenen Coefficienten vertauscht werden, so daß man erhält:

$m = na$; $h = -\frac{1}{2}(2\lambda-1)a - \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}p$
$n = nh$; $g = -(2\lambda-1)b - e$
$\mu = na$; $\eta = -\frac{1}{2}(2\lambda-1)a - \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}p$
$\nu = -na$; $\theta = o$.

Nun bestimme man, wie oben, den Werth von λ aus der Gleichung

$$\lambda(\lambda-1)b + \lambda e + g' = o,$$

ſetze $\sqrt{[(a-c)^2-4af]}=p$, $s=x-\frac{a}{e}t$, und ſuche den Werth von z aus der Gleichung

$$\frac{dz}{ds}=\frac{Ag-z(g-hs)}{s(n-ms)},$$

ſo daß $z=A$ für $s=o$ wird, ſo erhält man

$$z=Ags^{\frac{-g}{n}}(n-ms)^{\frac{mg-nh}{ms}}\int s^{\frac{g}{n}-1}ds(n-ms)^{\frac{nh-mg}{ms}-1}$$

und wenn man dann x als conſtant betrachtet:

$$y=Cx^{\lambda}\int t^{\frac{\eta}{\mu}-1}zdt(\mu-\nu t)^{\frac{\theta\mu-\eta\nu}{\mu\nu}},$$

wo die beyden Glieder des Integrals ſo beſtimmt werden müſſen, daß für beyde die Gleichung Statt findet:

$$t^{\frac{\eta}{\mu}}(\mu-\nu t)^{\frac{\theta\mu-\eta\nu}{\mu\nu}+1}=o.$$

Anmerkung.

§. 1074. Dieſe einzelnen Auflöſungen laſſen ſich gewöhnlich nach mehreren Methoden darſtellen, da nicht allein der Exponent λ einen doppelten Werth haben kann, ſondern auch die Wurzelausdrücke p und q zweyer Werthe fähig ſind. Allein dieſe Auflöſungen führen auf einem andern Wege zum Ziele, als die vorhergehenden. Um dieß recht deutlich zu zeigen, betrachten wir die Gleichung

$$x^2(1-x^2)d^2y-x(1+x^2)dxdy+x^2ydx^2=o,$$

ſo daß hier $a=1$, $b=-1$, $c=-1$, $e=-1$, $f=o$ und $g'=1$ endlich $n=2$ iſt. Für die beyden erſtern Auflöſungen erhält man demnach

$$\lambda(\lambda-1)-\lambda=o,$$

alſo iſt entweder $\lambda=o$ oder $\lambda=2$, dann aber iſt $q=\pm 2$. Die erſte Auflöſung gibt daher

$$\lambda=o,\quad m=-2,\quad h=\mp 1,\quad n=2,\quad g=o,$$
$$\mu=-2,\quad \eta=\pm 1,\quad \nu=2,\quad \theta=-3,$$

folglich erhält man

$$z=(1+x^2t)^{\mp\frac{1}{2}}\text{ und}$$
$$y=C\int t^{\mp\frac{1}{2}-1}zdt(1+t)^{\pm\frac{1}{2}-1}.$$

Läßt man nur die untern Zeichen gelten, ſo wird

$$z = \sqrt{1 + x^2 t} \quad \text{und}$$
$$y = C\int \frac{z\,dt}{(1+t)\sqrt{t(1+t)}}.$$

Wir wollen nun unterſuchen, wie dieſe Formeln Genüge leiſten. nmt man nämlich bloß x als veränderlich an, ſo wird

$$\frac{dz}{dx} = \frac{xt}{\sqrt{1+x^2t}} \quad \text{und}$$
$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{t}{(1+x^2t)^{\frac{3}{2}}},$$

lich erhält man

$$\frac{dy}{dx} = C\int \frac{x\,t\,dt}{t^{\frac{1}{2}}(1+t)^{\frac{3}{2}}(1+x^2t)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{und}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = C\int \frac{t\,dt}{t^{\frac{1}{2}}(1+t)^{\frac{3}{2}}(1+x^2t)^{\frac{3}{2}}};$$

aus ſich dann ergibt

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x(1+x^2)\frac{dy}{dx} + x^2y = C\int \frac{x^2\,dt\,(1-x^2t^2)}{t^{\frac{1}{2}}(1+t)^{\frac{5}{2}}(1+x^2t)^{\frac{5}{2}}}.$$

Das Integrale dieſer Formel iſt $\frac{2Cx^2\sqrt{t}}{\sqrt{(1+t)(1+x^2t)}}$, und da dieſowohl für $t=0$, als auch für $t=\infty$ verſchwindet, ſo läßt ſich Auflöſung unſerer Gleichung

$$y = C\int \frac{z\,dt}{(1+t)\sqrt{t(1+t)}} = C\int \frac{dt\sqrt{1+x^2t}}{(1+t)\sqrt{t(1+t)}}$$

folgende Art vollenden: Man betrachte x als conſtant, und verte die Integration ſo, daß das Integrale für $t=0$ verſchwindet; rauf ſetze man $t=\infty$, ſo wird die Function von x, welche ſich als Werth für y ergeben wird, der vorgelegten Gleichung Genüge ten.

Wählen wir aber die zweyte Auflöſung, und ſetzen $\lambda=0$, ſo rden wir erhalten:

$$m = -2,\quad h = \mp 1,\quad n = 2,\quad g = -2,$$
$$\mu = -2,\quad \eta = \mp 1,\quad \nu = 2,\quad \theta = 0,$$

d man muß z aus der Gleichung

$$\frac{dz}{ds} = \frac{-2A + z(2 \pm s)}{s(2+2s)},$$

wo $s = x^2 t$ ist, so bestimmen, daß $z = A$ wird, wenn $s = o$ setzt.

Man lasse das obere Zeichen gelten, so wird, da

$$dz - \frac{z\,ds\,(2+s)}{2s\,(1+s)} = \frac{-A\,ds}{s\,(1+s)}$$

ist, wenn man mit $\frac{\sqrt{1+s}}{s}$ multiplicirt, das Integrale seyn:

$$\frac{z\sqrt{1+s}}{s} = \text{Const.} - A\int\frac{ds}{s^2\sqrt{1+s}}, \text{ oder}$$

$$z = A - \frac{As}{\sqrt{1+s}}\,l\frac{1+\sqrt{1+s}}{\sqrt{s}} + \frac{Bs}{\sqrt{1+s}},$$

und diese Gleichung gibt $z = A$, wenn $s = o$ gesetzt wird, we Werth auch B haben mag. Ferner ist

$$y = C\int t^{\frac{1}{2}-1}\,z\,dt\,(1+t)^{-\frac{1}{2}}, \text{ oder}$$

$$y = C\int\frac{z\,dt}{\sqrt{t\,(1+t)}},$$

Es läßt sich leicht zeigen, wie dieser Werth Genüge leistet, man sieht nun ein, daß diese Methode einer weitern Ausbildung dings würdig sey.

Beyspiel.

§. 1075. Die Auflösungen der Differenzialg chung des zweyten Grades

$$x^2(1-x^2)\,d^2y - x(1+x^2)\,dx\,dy + x^2y\,dx^2 = o,$$

die sich nach dem vorhergehenden Probleme erge werden, darzustellen.

Weil $n = 2$, $a = 1$, $b = -1$, $c = -1$, $e = f = o$ und $g' = 1$ ist, so erhalten wir für die erste Auflösung weder $\lambda = o$ oder $\lambda = 2$, und demnach finden wir:

1) Wenn $\lambda = o$ ist, wie wir eben gesehen haben

$$m = -2;\quad h = \mp 1;\quad n = 2;\quad g = o;$$
$$\mu = -2;\quad \eta = \pm 1;\quad \nu = 2;\quad \theta = -2;$$

und demnach wird

$$z = (1+x^2t)^{\mp\frac{1}{2}} \text{ und}$$

$$y = C\int t^{\mp\frac{1}{2}-1}\,z\,dt\,(1+t)^{\pm\frac{1}{2}-1}.$$

Wir erhalten auf dieſe Art zwey Auflöſungen; es iſt nämlich die eine

$$z = \sqrt{1 + x^2 t} \quad \text{und} \quad y = C \int \frac{z\,dt}{(1+t)\sqrt{t(1+t)}},$$

die andere

$$z = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 t}} \quad \text{und} \quad y = C \int \frac{z\,dt}{t\sqrt{t(1+t)}}.$$

2) Wenn $\lambda = 2$ iſt, ſo wird man wegen $q = \pm 2$ erhalten:

$$m = -2; \quad h = -2 \mp 1; \quad n = 2; \quad g = 0;$$
$$\mu = -2; \quad \eta = -2 \pm 1; \quad \nu = 2; \quad \theta = 2;$$

Alſo wird

$$z = (1 + x^2 t)^{\frac{-2 \mp 1}{2}} \quad \text{und}$$

$$y = C x^2 \int t^{+1 \mp \frac{1}{2} - 1} z\,dt\,(1+t)^{\pm \frac{1}{2}},$$

Ebenſo erhält man die beyden Auflöſungen:

$$z = (1 + x^2 t)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad y = C x^2 \int \frac{z\,dt\sqrt{1+t}}{\sqrt{t}} \quad \text{oder}$$

$$z = (1 + x^2 t)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad y = C x^2 \int \frac{z\,dt\sqrt{t}}{\sqrt{1+t}}.$$

Für die zweyte allgemeine Auflöſung erhalten wir:

3) Wenn $\lambda = 0$ iſt, durch Vertauſchung jener Zeiger

$$m = -2; \quad h = \pm 1; \quad n = 2; \quad g = -2;$$
$$\mu = -2; \quad \eta = \mp 1; \quad \nu = 2; \quad \theta = 0.$$

Hat man daher $x^2 t = s$ geſetzt, ſo ſuche man zuerſt den Werth von z aus der Gleichung

$$\frac{dz}{ds} = \frac{-2A + z(2 \pm s)}{2s(1+s)},$$

daß $z = A$ für $s = 0$ werde; dann aber wird man erhalten:

$$y = C \int t^{\pm \frac{1}{2} - 1} z\,dt\,(1+t)^{\mp \frac{1}{2}};$$

Ebenſo findet man hieraus zwey Auflöſungen, nämlich erſtens

$$\frac{dz}{ds} = \frac{-2A + z(2+s)}{2s(1+s)} \quad \text{und} \quad y = C \int \frac{z\,dt}{\sqrt{t(1+t)}};$$

zweytens

$$\frac{dz}{ds} = \frac{-2A + z(2-s)}{2s(1+s)} \quad \text{und} \quad y = C \int \frac{z\,dt\sqrt{1+t}}{t\sqrt{t}}.$$

4) Für $\lambda = 2$ werden wir erhalten:

$$m = -2; \quad h = -2 \mp 1; \quad n = 2; \quad g = 2;$$
$$\mu = -2; \quad \eta = -2 \mp 1; \quad \nu = 2; \quad \theta = 0.$$

Nun setze man, wie vorhin, $x^2 t = s$, und bestimme den Wert von z aus der Gleichung

$$\frac{dz}{ds} = \frac{2A - z\,[2 + (2 \mp 1)\,s]}{2s\,(1+s)},$$

so wird man erhalten:

$$y = Cx^2 \int t^{\pm\frac{1}{2}}\, z\,dt\,(1+t)^{\frac{-2\mp 1}{2}},$$

und demnach findet man auch hier zwey Auflösungen, nämlich erstens

$$\frac{dz}{ds} = \frac{2A - z\,(2+s)}{2s\,(1+s)} \quad \text{und} \quad y = Cx^2 \int \frac{z\,dt\sqrt{t}}{(1+t)\sqrt{1+t}};$$

zweytens

$$\frac{dz}{ds} = \frac{2A - z\,(2+3s)}{2s\,(1+s)} \quad \text{und} \quad y = Cx^2 \int \frac{z\,dt}{\sqrt{t\,(1+t)}}.$$

Aus der dritten Auflösung erhalten wir zuerst

$$-\lambda(\lambda - 1) - \lambda + 1 = 0 \quad \text{oder} \quad \lambda^2 = 1,$$

folglich

$$\lambda = \pm 1 \quad \text{und} \quad p = \sqrt{4} = \pm 2.$$

Man wird demnach

5) wenn $\lambda = +1$ genommen wird, finden:

$$m = 2; \quad h = \mp 1; \quad n = -2; \quad g = 0;$$
$$\mu = 2; \quad \eta = \pm 1; \quad \nu = -2; \quad \theta = 2;$$

es wird also

$$z = \left(1 + \frac{\cdot}{x^2}\right)^{\pm\frac{1}{2}} \quad \text{und}$$

$$y = Cx \int t^{\pm\frac{1}{2} - 1}\, z\,dt\,(1+t)^{-1\mp\frac{1}{2}},$$

so daß wieder zwey Auflösungen gefunden werden, nämlich erstens

$$z = \frac{1}{x}\sqrt{x^2 + t} \quad \text{und} \quad y = Cx \int \frac{z\,dt}{(1+t)\sqrt{t\,(1+t)}},$$

zweytens

$$z = \frac{x}{\sqrt{x^2 + t}} \quad \text{und} \quad y = Cx \int \frac{z\,dt}{t\sqrt{t\,(1+t)}}.$$

6) Wird $\lambda = -1$ genommen, ſo wird man finden:

$$m = 2;\quad h = 2 \mp 1;\quad n = -2;\quad g = 0;$$
$$\mu = 2;\quad \eta = 2 \pm 1;\quad \nu = -2;\quad \theta = -2;$$

d demnach ergibt ſich

$$z = \left(1 + \frac{t}{x^2}\right)^{-1 \pm \frac{1}{2}} \quad \text{und}$$
$$y = \frac{C}{x}\int t^{\pm\frac{1}{2}}\, z\,dt\,(1+t)^{\mp\frac{1}{2}},$$

raus die beyden Auflöſungen ſich ergeben:

ens $\quad z = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+t}}$ und $y = \dfrac{C}{x}\displaystyle\int \frac{z\,dt\sqrt{t}}{\sqrt{1+t}}$,

ytens $\quad z = \dfrac{x^3}{(x^2+t)^{\frac{3}{2}}}$ und $y = \dfrac{C}{x}\displaystyle\int \frac{z\,dt\sqrt{1+t}}{\sqrt{t}}$.

Aus der vierten Auflöſung folgern wir endlich, wenn

7) $\lambda = +1$ iſt:

$$m = 2;\quad h = \pm 1;\quad n = -2;\quad g = 2;$$
$$\mu = 2;\quad \eta = \mp 1;\quad \nu = -2;\quad \theta = 0.$$

Nun ſetze man $s = \frac{t}{x^2}$ und ſuche z aus der Gleichung

$$\frac{dz}{ds} = \frac{-2A + z(2 \mp s)}{2s(1+s)},$$

daß $z = A$ für $s = 0$ wird, und man wird erhalten:

$$y = Cx\int t^{\mp\frac{1}{2}-1}\, z\,dt\,(1+t)^{\pm\frac{1}{2}}.$$

Alſo finden folgende zwey Auflöſungen Statt:

ſtens

$$\frac{dz}{ds} = \frac{-2A + z(2-s)}{2s(1+s)} \quad \text{und} \quad y = Cx\int \frac{z\,dt\sqrt{1+t}}{t\sqrt{t}},$$

eytens

$$\frac{dz}{ds} = \frac{-2A + z(2+s)}{2s(1+s)} \quad \text{und} \quad y = Cx\int \frac{z\,dt}{\sqrt{t(1+t)}}.$$

8) Wenn $\lambda = -1$ iſt, wird man finden

$$m = 2;\quad h = 2 \pm 1;\quad n = -2;\quad g = -2;$$
$$\mu = 2;\quad \eta = 2 \mp 1;\quad \nu = -2;\quad \theta = 0.$$

Aber nachdem man $\frac{t}{x^2} = s$ geſetzt hat, muß man den Werth

von z aus der Gleichung

$$\frac{dz}{ds} = \frac{+2A - z\,[2 + (2 \pm 1)\,s]}{2s\,(1+s)}$$

so bestimmen, daß $z = A$ für $s = o$ wird, und dann wird man erhalten:

$$y = \frac{C}{x}\int t^{\mp\frac{1}{2}}\,z\,dt\,(1+t)^{-1\pm\frac{1}{2}},$$

wodurch man wieder eine doppelte Auflösung findet, nämlich erstens

$$\frac{dz}{ds} = \frac{2A - z\,(2+3s)}{2s\,(1+s)} \quad \text{und} \quad y = \frac{C}{x}\int \frac{z\,dt}{\sqrt{t\,(1+t)}};$$

zweytens

$$\frac{dz}{ds} = \frac{2A - z\,(2+s)}{2s\,(1+s)} \quad \text{und} \quad y = \frac{C}{x}\int \frac{z\,dt\sqrt{t}}{(1+t)\sqrt{1+t}}.$$

Wir haben also im Ganzen sechzehn Auflösungen gefunden.

Anmerkung.

§. 1076. Wir wollen nun versuchen, zu zeigen, wie diese Auflösungen, welche nicht so leicht zu seyn scheinen, der vorgelegten Gleichung Genüge leisten, und wählen zu diesem Zwecke die zweyte Auflösung Nro. 4, welcher die Gleichung

$$dz + \frac{z\,ds\,(2+3s)}{2s\,(1+s)} = \frac{A\,ds}{s\,(1+s)}$$

zu Grunde liegt. Wird diese Gleichung mit $s\sqrt{1+s}$ multiplicirt, so gibt sie das Integrale

$$sz\sqrt{1+s} = A\int \frac{ds}{\sqrt{1+s}} = 2A\sqrt{1+s} + B,$$

$$\text{oder} \quad z = \frac{2A}{s} + \frac{B}{s\sqrt{1+s}}.$$

Damit nun $z = A$ für $s = o$ werde, muß $B = -2A$ seyn, so daß

$$z = \frac{2A\,[\sqrt{1+s} - 1]}{s\sqrt{1+s}} = \frac{2A}{tx^2} - \frac{2A}{tx^2\sqrt{1+tx^2}}$$

wird; man erhält daher

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{-4A}{tx^3} + \frac{2A\,(2+3tx^2)}{tx^3\,(1+tx^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{und}$$

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) = \frac{12A}{tx^4} - \frac{6A\,(2+5tx^2+4t^2x^4)}{tx^4\,(1+tx^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Da nun $y = C\int \frac{x^2 z\,dt}{\sqrt{t(1+t)}}$ iſt, ſo wird man finden:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = 2C\int \frac{x z\,dt}{\sqrt{t(1+t)}} + C\int \frac{x^2\,dt}{\sqrt{t(1+t)}} \cdot \left(\frac{dz}{dx}\right) \text{ und}$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 2C\int \frac{z\,dt}{\sqrt{t(1+t)}} + 4C\int \frac{x\,dt}{\sqrt{t(1+t)}} \left(\frac{dz}{dx}\right) + C\int \frac{x^2\,dt}{\sqrt{t(1+t)}} \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right);$$

ylich ergibt ſich

$$x^2(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x(1+x^2)\frac{dy}{dx} + x^2 y =$$

$$= C\int \frac{dt}{\sqrt{t(1+t)}} \cdot \left[\frac{2Ax^2}{t} - \frac{2Ax^2(1+4tx^2+3t^2x^2)}{t(1+tx^2)^{\frac{5}{2}}}\right].$$

Dieſes Integrale iſt

$$\frac{4ACx^2\sqrt{1+t}}{\sqrt{t}} + \frac{4ACx^2\sqrt{1+t}}{(1+tx^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{t}} = \frac{4ACx^2\sqrt{1+t}}{\sqrt{t}}\left[\frac{1}{(1+tx^2)^{\frac{3}{2}}} - 1\right]$$

läßt ſich unter folgender Form darſtellen:

$$-2Cx^4\left[3z + x\left(\frac{dz}{dx}\right)\right]\sqrt{t(1+t)},$$

r auch auf folgende Art:

$$-2Cx^4\left(\frac{2A+z}{1+tx^2}\right)\sqrt{t(1+t)}.$$

Dieſer Ausdruck aber wird $= o$, erſtlich wenn $t = -1$ und ytens auch, wenn $t = o$ iſt, und daher muß der für y gefundene rth

$$y = D\int \frac{dt}{t\sqrt{t(1+t)}} \cdot \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1+tx^2}}\right]$$

ch Integration ſo beſtimmt werden, daß er für $t = o$ verſchwindet, an aber hat man $t = -1$ zu nehmen. Oder es wird, wenn $= -v$ geſetzt wird, die Gleichung Statt finden:

$$y = D\int \frac{dv}{v\sqrt{v(v-1)}}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-vx^2}}\right],$$

bey das Integrale ſo zu nehmen iſt, daß es für $v = o$ verſchwin- t, dann aber muß $v = 1$ geſetzt werden.

Dieſes Beyſpiel iſt hinreichend, zu zeigen, wie die angeführten flöſungen der Differenzialgleichung des zweyten Grades Genüge iſten; wenn indeſſen aber die Größe z in transſcendenter Form,

nämlich durch Logarithmen ausgedrückt erscheint, so läßt sich die Übereinstimmung nicht anders nachweisen, als durch sehr beschwerliche Rechnungen.

Aufgabe 137.

§. 1077. Sey $y = C\int(1+t)^{\nu-1}(a+tx)^{\lambda}\,dt$, bey welcher Integration die Größe x als constant betrachtet wird, man suche, wenn das Integrale durch noch aufzufindende Grenzen so bestimmt ist, daß y einer Function von x gleich wird Differenzialgleichungen des zweyten Grades von der Form

$$Lx^2\frac{d^2y}{dx^2} + Mx\frac{dy}{dx} + Ny = 0,$$

welcher jene Function Genüge leistet.

Auflösung.

Da nach den vorhin festgestellten Principien

$$\frac{dy}{dx} = C\int\lambda t(1+t)^{\nu-1}(a+tx)^{\lambda-1}\,dt \quad \text{und}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = C\int\lambda(\lambda-1)t^2(1+t)^{\nu-1}(a+tx)^{\lambda-2}\,dt$$

ist, so wird man erhalten:

$$Lx^2\frac{d^2y}{dx^2} + Mx\frac{dy}{dx} + Ny =$$

$$= C\int(1+t)^{\nu-1}(a+tx)^{\lambda-2}\,dt\,[\lambda(\lambda-1)Lt^2x^2 + \lambda Mtx(a+tx) + N(a+tx)^2] =$$

$$= C\int(1+t)^{\nu-1}(a+tx)^{\lambda-2}\,dt\left\{\begin{matrix}Na^2+2Natx+Nt^2x^2\\ +\lambda Matx+\lambda Mt^2x^2\\ +\lambda(\lambda-1)Lt^2x^2\end{matrix}\right\}$$

welche Formel an und für sich integrabel seyn muß, wenn x constant genommen wird.

Man setze also, das Integrale sey

$$C(1+t)^{\nu}(a+tx)^{\lambda-1}(Pa^2+Qatx),$$

wobey P und Q beliebige Functionen von x bezeichnen, so wird das Differenziale desselben seyn:

$$C(1+t)^{\nu-1}(a+tx)^{\lambda-2}dt\times$$
$$1+tx)(Pa^2+Qatx)+(\lambda-1)x(1+t)(Pa^2+Qatx)+Qax(1+t)(a+tx)]$$
$$C(1+t)^{\nu-1}(a+tx)^{\lambda-2}dt\left\{\begin{array}{lll}\nu Pa^3 & +\nu Qa^2tx & +\nu Qat^2x^2\\ +(\lambda-1)Pa^2x & +\nu Pa^2tx & +(\lambda-1)Qat^2x^2\\ +Qa^2x & +(\lambda-1)Pa^2tx & +Qat^2x^2\\ & +(\lambda-1)Qatx^2 & \\ & +Qa^2tx & \\ & +Qatx^2 & \end{array}\right\}$$

rch Vergleichung dieſer Formel mit jener Gleichung erhalten wir:

$$N = \nu Pa + (\lambda-1)Px + Qx,$$
$$\nu N + \lambda M = (\nu+1)Qa + (\lambda+\nu-1)Pa + \lambda Qx,$$
$$N + \lambda M + \lambda(\lambda-1)L = (\lambda+\nu)Qa.$$

Subtrahirt man von der Summe der erſten und letzten dieſer Gleiungen die mittlere, ſo erhält man

$$\lambda-1)L = -(\lambda-1)Pa+(\lambda-1)Px+(\lambda-1)Qa-(\lambda-1)Qx$$

d daher wird

$$\lambda L = (a-x)(Q-P) \quad \text{oder}$$
$$L = \tfrac{1}{\lambda}(a-x)(Q-P).$$

Subtrahirt man aber von der zweyten Gleichung das Doppelte erſtern, ſo findet man

$$M = (\lambda-\nu-1)Pa-2(\lambda-1)Px+(\nu+1)Qa+(\lambda-2)Qx$$

er

$$M = [(\nu+1)a+(\lambda-2)x](Q-P)+\lambda(a-x)P.$$

Nimmt man daher für P und Q beliebige Functionen von x, d man beſtimmt die Functionen L, M, N, ſo daß

$$L = \tfrac{1}{\lambda}(a-x)(Q-P),$$
$$M = \tfrac{1}{\lambda}[(\nu+1)a+(\lambda-2)x](Q-P)+(a-x)P,$$
$$N = x(Q-P)+(\nu a+\lambda x)P$$

ird, ſo entſpricht der Differenzialgleichung des zweyten Grades

$$Lx^2d^2y + Mxdxdy + Nydx^2 = 0$$

lgende Integralformel:

$$y = C\int(1+t)^{\nu-1}(a+tx)^{\lambda}dt,$$

obey x als unveränderlich behandelt wird, wenn nur die Grenzen des

Integrals so festgesetzt werden, daß der Ausdruck

$$(1+t)^{\nu}\,(a+tx)^{\lambda-1}\,(Pa+Qtx)$$

für beyde Grenzwerthe verschwindet. Es muß aber bemerkt werden, daß diese Grenzen von x unabhängig seyn müssen. Zuerst aber ist einleuchtend, daß dieser Ausdruck $=0$ für $t=-1$ werde, wenn nur $\nu>0$ ist; ferner wird derselbe auch verschwinden für $t=\infty$, wenn nur $\nu+\lambda-1+1$ eine negative Zahl oder $\nu+\lambda<0$ ist. Wenn daher $\nu>0$ und $\nu+\lambda<0$ ist, so muß das Integrale

$$y=C\int(1+t)^{\nu-1}\,(a+tx)^{\lambda}\,dt$$

so genommen werden, daß es für $t=-1$ verschwindet. Dann aber setze man $t=\infty$, und die für y zum Vorschein kommende Function von x wird der vorgelegten Gleichung Genüge leisten.

Zusatz 1.

§. 1078. Weil die Functionen P und Q in dem für y genommenen Integralausdrucke nicht erscheinen, so ist einleuchtend, daß dieselbe Formel allen Differenzialgleichungen des zweyten Grades Genüge leiste, welche Werthe man den Größen P und Q auch beylegen mag.

Zusatz 2.

§. 1079. Setzt man also $Q=P$, so leistet dieselbe Integralformel

$$y=C\int(1+t)^{\nu-1}\,(a+tx)^{\lambda}\,dt$$

auch folgender Differenzialgleichung des ersten Grades Genüge:

$$(a-x)\,x\,dy+(\nu a+\lambda x)\,y\,dx=0.$$

Dieser Gleichung aber entspricht als Integrale der Ausdruck

$$y=\frac{D\,(a-x)^{\lambda+\nu}}{x^{\nu}},$$

welcher Werth also im Allgemeinen auch unserer Differenzialgleichung des zweyten Grades Genüge leistet, wovon man sich durch einen Versuch bald überzeugen wird.

Zusatz 3.

§. 1080. Dieser Werth des Integrals

$$y=C\int(1+t)^{\nu-1}\,(a+tx)^{\lambda}\,dt,$$

welcher nach bestimmten Grenzen genommen wurde, muß also mit der algebraischen Formel

$$y = \frac{D\,(a - x)^{\lambda + \nu}}{x^{\nu}}$$

übereinstimmen, wenn nur $\nu > 0$ und $\lambda + \nu < 0$ ist.

Anmerkung.

§. 1081. Die in diesem Probleme ausgeführte Integration läßt demnach wenig zu wünschen übrig. Allein die Reduction der Integralformel

$$y = C \int (1 + t)^{\nu - 1}\,(a + tx)^{\lambda}\,dt$$

auf den Ausdruck

$$y = \frac{D\,(a - x)^{\lambda + \nu}}{x^{\nu}}$$

ist um so merkwürdiger, weil sie auf diesen zurückgeführt wird, wenn man das Integrale so bestimmt, daß es für $t = -1$ verschwindet, dann aber $t = \infty$ setzt.

Nimmt man also $\lambda + \nu = -\mu$, wo das μ und ν positive Zahlen bezeichnen, so wird man erhalten:

$$C \int \frac{(1 + t)^{\nu - 1}\,dt}{(a + tx)^{\mu + \nu}} = \frac{D}{x^{\nu}\,(a - x)^{\mu}},$$

oder wenn man $1 + t = z$ setzt:

$$C \int \frac{z^{\nu - 1}\,dz}{(a - x + xz)^{\mu + \nu}} = \frac{D}{x^{\nu}\,(a - x)^{\mu}},$$

wo das Integrale zwischen den Grenzen $z = 0$ und $z = \infty$ zu nehmen ist. Allein auch diese Bemerkung ist nicht sehr wichtig, denn wird $a - x = ux$ gesetzt, so wird

$$\frac{C}{x^{\mu + \nu}} \int \frac{z^{\nu - 1}\,dz}{(u + z)^{\mu + \nu}} = \frac{D}{x^{\mu + \nu}\,u^{\mu}},$$

und daher wird die Integralformel $\int \frac{z^{\nu - 1}\,dz}{(u + z)^{\mu + \nu}}$, wenn sie so integrirt wird, daß sie für $z = 0$ verschwindet, und wenn man dann $z = \infty$ setzt, die Form $\frac{A}{u^{\mu}}$ erhalten, wobey A eine unveränderliche und von

u unabhängige Größe bezeichnet. Allein sie ist abhängig von den Exponenten μ und ν, und zwar nach einem Gesetze, welches aus besondern Fällen leicht erkannt werden kann. Setzt man nämlich

$$\int \frac{z^{\nu-1}\,dz}{(u+z)^{\mu+\nu}} = \frac{A}{u^{\mu}},$$

und es ist $\nu = 1$, so gibt jenes Integrale

$$-\frac{1}{\mu(u+z)^{\mu}} + \frac{1}{\mu u^{\mu}},$$

und für $z=\infty$ findet man $\frac{1}{\mu u^{\mu}}$, so daß in diesem Falle $A = \frac{1}{\mu}$ ist. Ist $\nu = 2$, so gelingt die Integration ebenfalls, und man findet $A = \frac{1}{\mu(\mu+1)}$, für $\nu = 3$ aber wird $A = \frac{1\cdot 2}{\mu(\mu+1)(\mu+2)}$ und für $\nu = 4$ wird $A = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{\mu(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)}$, und daher schließen wir, daß allgemein

$$A = \frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots(\nu-1)}{\mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+\nu-1)}$$

seyn werde. Wird daher die Integration nach der gegebenen Vorschrift ausgeführt, so wird man erhalten:

$$\frac{1}{\mu+1}\cdot\frac{2}{\mu+2}\cdot\frac{3}{\mu+3}\cdot\ldots\cdot\frac{\nu-1}{\mu+\nu-1} = \mu u^{\mu}\int \frac{z^{\nu-1}\,dz}{(u+z)^{\mu+\nu}}.$$

Wenn der Exponent ν keine ganze Zahl seyn sollte, so wird der Werth von A mit Hülfe dieser Interpolationsformel, welche nach Factoren fortschreitet, bestimmt werden. Es wird nämlich die Quadratur des Kreises in der Rechnung erscheinen, wenn der Exponent ν den Bruch $\frac{1}{2}$ enthält. Allein von solchen Interpolationen haben wir bey einer andern Gelegenheit ausführlicher gesprochen, und es ist hier nicht der Ort, diesen Gegenstand weiter zu verfolgen. Es bleibt uns also noch das letzte Kapitel dieses Abschnittes übrig, in welchem wir die näherungsweise Integration der Differenzialgleichungen des zweyten Grades lehren werden.

Kapitel XII.

Von der näherungsweisen Integration der Differenzialgleichungen des zweyten Grades.

Aufgabe 138.

§. 1082. Die Principien auseinander zu setzen, auf welche man die näherungsweise Integration irgend einer vorgelegten Differenzialgleichung des zweyten Grades gründen muß.

Auflösung.

Wir wollen uns mit einer, zwischen den Veränderlichen x und gegebenen Gleichung beschäftigen; setzen wir in dieser $dy = pdx$ nd $dp = qdx$, so wird eine Gleichung zwischen den vier Größen y, p und q zum Vorschein kommen, aus welcher sich die Größe q wird bestimmen lassen, daß q als irgend eine Function der drey rößen x, y und p erscheint, und wenn wir diese $= V$ setzen, so ist $= V$ oder $dp = Vdx$. Hier ist vor Allem zu bemerken, daß die ntegration, wenn sie bestimmt seyn soll, eine doppelte Bestimmung fordere, oder daß gleichsam nach Belieben zwey Bedingungen festsetzt werden können, denen sie entsprechen muß. Es ist nämlich nicht reichend, daß $y = b$ für $x = a$ wird, wie wir es bey den Differenzialgleichungen des ersten Grades als gewöhnlich gesehen haben, ndern man kann überdieß noch eine andere Bedingung hinzufügen, lche darin besteht, daß für $x = a$ auch $p = \frac{dy}{dx} = c =$ einer gebenen Größe werde. Nach Feststellung dieser Bestimmungen, daß $= b$ und $p = c$ für $x = a$ werde, kömmt es bey der Integration r noch lediglich darauf an, daß man der Größe x irgend einen anern Werth beylegt, und die entsprechenden Werthe von y und p aufcht; denn ist dieses geschehen, so hat man das Integrale der vorgegten Gleichung so vollkommen bestimmt, daß nichts mehr zu wünschen brig bleibt. Weil dieß aber im Allgemeinen nicht möglich ist, so immt man zur Annäherungsmethode eine Zuflucht, die darin besteht, ß man der Größe x einen Werth beylegt, der von a nur sehr wenig weicht, indem man $x = a + \omega$ setzt, und dann untersucht, um wie

viel die Werthe der Größen y und p von den urſprünglichen b und c verſchieden ſind. Wir gehen hier von dem Satze aus, daß, während die Größe x von a bis $a+\omega$ wächſt, auch die Werthe der Größen y und p ſo wenig werden geändert werden, daß dadurch die Function V keine merkliche Änderung erleide. Wenn wir daher annehmen, daß $V=F$ werde, indem wir $x=a$, $y=b$ und $p=c$ ſetzen, ſo wird man ſich vorſtellen müſſen, daß die Größe V denſelben Werth F beybehalte, während x von a bis $a+\omega$ wächſt. Da wir alſo für dieſes ungemein kleine Intervall $dp=Fdx$ erhalten, ſo wird durch Integration $p=Fx+\text{Const.}$ gefunden werden, weil aber $p=c$ für $x=a$ werden muß, ſo wird die Gleichung beſtehen:

$$p=c+Fx-Fa.$$

Sey nun $x=a+\omega$, ſo erhalten wir $p=c+F\omega$, welches jener Werth von p iſt, der dem Werthe $x=a+\omega$ entſpricht. Endlich wird für dieſes ſehr kleine Intervall $dy=cdx$ ſeyn, alſo $y=b+cx-ac$ und für den Werth $x=a+\omega$ wird $y=b+c\omega$, welches jener Werth von y iſt, der dem Werthe $x=a+\omega$ zugehört.

Sind demnach $x=a$, $y=b$ und $p=\frac{dy}{dx}=c$ die urſprünglichen Werthe, und wird für dieſe $V=F$, ſo werden die Werthe

$$x=a+\omega;\quad y=b+c\omega;\quad p=c+F\omega$$

die folgenden ſeyn, die von jenen nur um ein äußerſt kleines Intervall entfernt ſind. Werden nun dieſe Werthe ferner als die urſprünglichen angeſehen, ſo kann man auf ähnliche Art von ihnen wieder durch ein ſehr kleines Intervall fortſchreiten, und ſo wird man endlich auf einen Grenzwerth kommen, der um ein noch ſo großes Intervall entfernt iſt.

Zuſatz 1.

§. 1083. Je kleiner dieſe Intervalle genommen werden, deſto weniger wird man ſich von der Wahrheit entfernen, wenn nur die Größen c und F nicht allzugroß ſind; dehnt man aber jene Intervalle ins Unendliche aus, ſo wird man offenbar in der Beſtimmung der Größen y und p einen bedeutenden Fehler begehen.

Zuſatz 2.

§. 1084. Wenn die Größe c oder F ſehr groß wird, ſo kann man das Intervall, durch welches die Größe y oder p ihren Werth erſtreckt, als gegeben betrachten. Wird demnach $c\omega=\phi$ geſetzt,

rden die folgenden Werthe seyn:

$$x = a + \frac{\psi}{c}, \quad y = b + \psi \quad \text{und} \quad p = c + \frac{F\psi}{c}.$$

Wenn aber F sehr groß ausfällt, so lasse man die Größe p nur ch ein sehr kleines Intervall φ wachsen, so daß $F\omega = \varphi$ wird, und n werden die folgenden Werthe seyn:

$$x = a + \frac{\varphi}{F}, \quad y = b + \frac{c\varphi}{F} \quad \text{und} \quad p = c + \varphi.$$

Zusatz 3.

§. 1085. Wenn b unendlich groß ist, so wird man für den hsten Werth von y die Bestimmung erhalten:

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{b + c\omega} = \frac{1}{b} - \frac{c\omega}{b^2} = \frac{-c\omega}{b^2},$$

b soll dieser Ausdruck einen endlichen Werth annehmen, so muß auch Größe c unendlich seyn, denn sonst würde y unendlich groß bleiben, ht allein wenn $x = a$, sondern auch wenn $x = a + \omega$ ist.

Anmerkung 1.

§. 1086. So oft die Auflösung irgend einer Aufgabe von der tegration einer Differenzialgleichung des zweyten Grades abhängt, issen gewöhnlich die Bedingungen der Aufgabe zwey Bestimmungen halten, deren eine erfordert, daß, wenn man der Größe x irgend n bestimmten Werth $x = a$ beylegt, die Größe y einen gegebenen erth $y = b$, die andere aber, daß auch der Quotient $\frac{dy}{dx} = p$ n bekannten Werth $p = c$ erhalte. Wenn wir also im Allgemei- n eine Differenzialgleichung des zweyten Grades integriren wollen, kann die Integration so ausgeführt werden, daß $y = b$ und $p = c$ $x = a$ wird, während die Größen a, b, c von unserer Willkür ängen. Indessen kann es sich doch bisweilen ereignen, daß für $= a$ die Werthe von y und p nicht ganz willkürlich sind, son- n der Natur der Gleichung gemäß schon bestimmte Werthe halten, in welchen Fällen andere Bedingungen die fehlende Bestim- ung ersetzen. Wäre z. B. folgende Gleichung gegeben:

$$(a - bx)\,d^2y - 2x(2a - bx)\,dx\,dy + 2(3a - bx)\,y\,dx^2 = 6a^2\,dx^2,$$

wird, wie man dieselbe durch Integration auch immer bestimmen ag, wenn $x = o$ gesetzt wird:

$$y = a \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dx} = p = b,$$

so daß für $x = o$ die Werthe der Größen y und p keineswegs un Willkür überlassen bleiben. Man findet aber als vollständiges S grale die Gleichung

$$y = a + bx + \frac{(A + Bx)x^2}{a - bx},$$

wo für $x = o$ immer $y = a$ und $p = b$ wird, wenn auch die Con ten A und B nach Belieben angenommen werden. In solchen F darf es uns also nicht wundern, wenn für einen gegebenen Werth x die Werthe der Größen y und p nicht von unserer Willkür abhän

Anmerkung 2.

§. 1087. Die hier entwickelte Methode, die Differenzialgleic gen des zweyten Grades näherungsweise zu integriren, indem durch sehr kleine Intervalle fortschreitet, wie dieß auch schon bey Differenzialgleichungen des ersten Grades geschehen ist, führt in wissen Fällen auf solche Schwierigkeiten, daß sie ihre Anwendba verliert, wenn sich kein besonderer Kunstgriff darbiethet. Dieß erstlich der Fall, wenn $c = \infty$ wird, denn so klein man dann auch Intervall ω nehmen mag, so läßt sich doch weder der Werth von noch der Werth von p erkennen. Auf ähnliche Art wird der Gang Rechnung gehemmt, wenn für $x = a$, $y = b$ und $p = c$ die Funct V unendlich wird, und daher $F = \infty$ erhalten wird, in welchem F der Werth von p unbestimmt bleibt.

Es ist ferner auch zweckmäßig, die Fälle, in welchen entwe c oder F verschwindet, abgesondert zu behandeln; denn obgleich d die Werthe von y und p hinlänglich genau erscheinen, so ist es dem nützlich, weil jene Werthe keine Änderung erleiden, wenn diese d eine höhere Potenz von ω ausgedrückt wird, eben diese Änderung zusuchen, um sich beym Fortgange der Rechnung weniger von Wahrheit zu entfernen. Sollte aber die Größe b unendlich werd so muß man, wie wir bereits bemerkt haben, statt y den recipro Werth $\frac{1}{y}$ aufsuchen. Wir wollen demnach sorgfältiger untersuc wie man den vorhin erwähnten Schwierigkeiten begegnen könne.

Aufgabe 139.

§. 1088. Integrirt man nach Intervallen und es ereignet ſich, daß, wenn $x = a$, $y = b$ und $p = c$ geſetzt wird, beym Anfange irgend eines Intervalles die Größe c entweder verſchwindet oder unendlich wird, ſo ſoll man die Integration für dieſes Intervall ausführen.

Auflöſung.

Die vorhergehende Annäherung hat $y = b + c(x - a)$ gegeben, und daher wird, wenn $c = 0$ geſetzt wird, die Zunahme von y durch eine höhere Potenz von $x - a$ ausgedrückt werden; es wird nämlich $y = b + A(x - a)^{\lambda}$ ſeyn, wobey $\lambda > 1$ iſt, wenn die höhern Potenzen außer Acht gelaſſen werden, was man füglich thun kann, indem dieſelben wegen des ſehr kleinen Intervalles $x - a$ gegen jenes Glied verſchwinden.

Iſt aber $c = \infty$, ſo kann der Werth von y auf ähnliche Art ausgedrückt werden, nämlich durch die Gleichung $y = b + A(x - a)^{\lambda}$, wo $\lambda < 1$ iſt, welcher Werth jedoch größer als Null ſeyn muß. In beyden Fällen findet demnach dieſelbe Beſtimmung Statt, daß man nämlich aus der vorgelegten Gleichung $dp = V dx$ ſowohl den Coefficienten A, als auch den Exponenten λ auffindet. Aus jener Gleichung leiten wir nun die Relationen ab:

$$\frac{dy}{dx} = p = \lambda A (x - a)^{\lambda - 1} \quad \text{und}$$

$$dp = \lambda(\lambda - 1) A (x - a)^{\lambda - 2} dx,$$

und es muß nothwendig dasſelbe Reſultat erſcheinen, wenn man in dem Ausdruck $V dx$ die Werthe

$$y = b + A(x - a)^{\lambda} \quad \text{und}$$

$$p = \lambda A (x - a)^{\lambda - 1}$$

hat, woraus hervorgeht, daß

$c = 0$ wenn $\lambda > 1$ und $c = \infty$ wenn $\lambda < 1$ iſt.

Da nun V eine Function von x, y und p iſt, ſo ſetze man überall $= a$, außer in jenen Gliedern, in welchen der Ausdruck $x - a$ vorkommt, welchen man zu übergehen hat, dann aber ſetze man $y = b$, wenn dadurch nicht $V = 0$ oder $V = \infty$ wird; denn iſt dieß der Fall,

ſo ſchreibe man für y den Werth $b + A(x-a)^\lambda$, und eben ſo für p den Werth $\lambda A (x-a)^{\lambda-1}$. Man laſſe aber die höhern Potenzen des Ausdruckes $(x-a)$ gegen die niedrigern verſchwinden, und man wird auf dieſe Art für V einen Ausdruck von der Form $c(x-a)^\lambda$ erhalten, welcher der Formel $\lambda(\lambda-1)A(x-a)^{\lambda-2}$ gleich geſetzt werden muß, aus welcher Gleichung dann ſowohl der angenommene Coefficient A, als auch der Exponent λ beſtimmt werden kann, und daher werden dann auch die nächſtgelegenen Werthe

$$y = b + A(x-a)^\lambda \quad \text{und} \quad p = \lambda A (x-a)^{\lambda-1}$$

bekannt ſeyn, welche von der Wahrheit um ſo weniger abweichen werden, je kleiner man die Differenz zwiſchen x und a nimmt.

Der Fall aber, in welchem $\lambda = 1$ iſt, iſt für ſich klar, und ſchon im vorhergehenden Probleme behandelt worden, weil er der einzige iſt, in welchem die Größe c einen endlichen Werth erhält.

Zuſatz 1.

§. 1089. Ereignet es ſich, daß, wenn $c = \infty$ geſetzt wird, in welchem Falle $\lambda < 1$ ſeyn muß, die Function V einen endlichen Werth erhält, welchem der Ausdruck $\lambda(\lambda-1)A(x-a)^{\lambda-2}$ nicht gleich geſetzt werden kann, ſo hat dieſer Fall an und für ſich keine Schwierigkeit, und der Werth von y wird für einen ſehr kleinen Überſchuß der Größe x über den Werth von a wirklich unendlich werden.

Zuſatz 2.

§. 1090. Dieß läßt ſich leichter erkennen aus dem Beyſpiele $dp = 6x\,dx$, denn dann wird

$$p = c + 3x^2 - 3a^2 = \frac{dy}{dx},$$

und daher

$$y = b + (c - 3a^2)(x-a) + x^3 - a^3, \quad \text{oder}$$
$$y = b - ac + 2a^3 + (c - 3a^2)x + x^3.$$

Nimmt man alſo die Conſtante c unendlich groß, ſo wird mit Ausnahme des Falles, wo $x = a$ iſt, der Werth von y immer unendlich werden.

Zuſatz 3.

§. 1091. Wenn aber für $c = 0$, in welchem Falle $\lambda > 1$ ſeyn muß, die Function V einen endlichen und ſogar unveränderlichen

Werth erhält, ſo wird, nachdem $x = a$ und $y = b$ geſetzt wurde, demſelben der Ausdruck $\lambda(\lambda - 1) A (x - a)^{\lambda-2}$ gleich werden, indem man $\lambda = 2$ und $2A =$ jenem conſtanten Werthe ſetzt. Weil nun im vorhergehenden Beyſpiele $V = 6a = 2A$, alſo $A = 3a$ wird, ſo erhält man ſehr nahe $y = b + 3a(x - a)^2$, welcher Werth auch mit dem gefundenen Integrale übereinſtimmt, denn dieſes iſt, wenn $c = o$ genommen wird:

$$y = b + 2a^3 - 3a^2x + x^3 = b + (x + 2a)(x - a)^2,$$

welcher Ausdruck für $x = a$ in jenen übergeht.

Anmerkung 1.

§. 1092. Für $c = o$ wird die Function V, wenn man in derſelben $x = a$, $y = b$ und $p = c = o$ ſetzt, entweder einen unendlich großen, oder einen endlichen Werth erhalten, oder ſie wird verſchwinden. Im erſten Falle, in welchem $V = \infty$ wird, ſo daß dieſer Function der Ausdruck $\lambda(\lambda - 1) A (x - a)^{\lambda-2}$ für $x = a$ gleich geſetzt werden kann, muß nothwendig $\lambda < 2$ aber $\lambda > 1$ ſeyn; um aber hieraus die Größen A und λ zu beſtimmen, muß man in der Function V ſchreiben:

$$y = b + A(x - a)^{\lambda} \quad \text{und} \quad p = \lambda A (x - a)^{\lambda-1},$$

und dann wieder $x = a$ ſetzen, außer in jenen Gliedern, in welchen der Ausdruck $x - a$ erſcheint. Weil nun der Vorausſetzung gemäß $V = \infty$ für $x = a$ wird, ſo wird auf dieſe Art jener Werth $= C(x - a)^{-\alpha}$ werden, und durch Vergleichung dieſer Formel mit dem Ausdrucke $\lambda(\lambda - 1) A (x - a)^{\lambda-2}$, werden ſich dann die Werthe von A und λ ergeben, wenn nicht $\lambda < 1$ iſt, welcher Fall mit der Annahme $c = o$ nicht beſtehen kann.

Im zweyten Falle, in welchem V einer endlichen Größe gleich wird, muß man $\lambda = 2$ nehmen, im dritten Falle aber, wo $V = o$ iſt, hat man $\lambda > 2$ zu ſetzen, damit ſein Werth in der Formel $\lambda(\lambda - 1) A (x - a)^{\lambda-2}$ enthalten iſt.

Wenn aber $c = \infty$ ſeyn müßte, ſo kann, wie wir geſehen haben, V unmöglich einen endlichen Werth erhalten, noch viel weniger aber kann V verſchwinden, wenn wir die unpaſſenden Fälle ausſchließen wollen, in welchen y beſtändig einen unendlichen Werth beſitzt. So erhält alſo die Function V nothwendig einen unendlichen Werth,

welcher mit dem Ausdrucke $\lambda(\lambda-1)\,A\,(x-a)^{\lambda-2}$ so zu vergleichen ist, daß $\lambda<1$ genommen wird. Es erhellt demnach hieraus, daß die Bestimmung der Größe c nicht immer in unserer Willkür stehe, sondern bisweilen von der individuellen Beschaffenheit der vorgelegten Gleichung abhänge. Ist z. B. die Gleichung $d^2y=\frac{2\,dx^2}{(x-a)^3}$ gegeben, so wird

$$\frac{dy}{dx}=p=A-\frac{1}{(x-a)^2}\quad\text{und}\quad y=B+Ax+\frac{1}{x-a},$$

folglich wird man für $x=a$ erhalten:

$$c=A-\frac{1}{0^2}\quad\text{und}\quad b=B+Aa+\frac{1}{0},\quad\text{also}$$

$$A=c+\frac{1}{0^2}\quad\text{und}\quad B=b-ac-\frac{a}{0^2}-\frac{1}{0},$$

und damit die Integralgleichung nicht durchaus unendliche Größen enthalte, können unmöglich die Buchstaben b und c endliche Größen bezeichnen.

Anmerkung 2.

§. 1093. Wir haben aber bereits bemerkt, daß nicht alle Ordnungen der unendlich wachsenden und der verschwindenden Größen in dem Ausdrucke $(x-a)^\lambda$ für $x=a$ enthalten seyen, es übertrifft nämlich die Größe x^2lx für $x=0$ die zweyte Potenz x^2 unendlich Mahl, ist indessen aber dennoch unendlich Mahl kleiner als die Potenz $x^{2-\alpha}$, so klein auch der Bruch α angenommen werden mag.

Wenn wir daher in der obigen Auflösung die Ausdrücke so darstellen wollten, daß sie alle Ordnungen sowohl der unendlich wachsenden, als auch der verschwindenden Größen umfassen, so müßten wir setzen:

$$y=b+A\,(x-a)^\lambda\,[l(x-a)]^\mu;$$

dann aber wird

$$\frac{dy}{dx}=p=\lambda A\,(x-a)^{\lambda-1}\,[l(x-a)]^\mu+\mu A\,(x-a)^{\lambda-1}[l(x-a)]^{\mu-1},$$

und wenn man $x=a$ setzt, so verhält sich der erstere Theil zu dem letzteren, wie $l(x-a)$ zu 1, d. h. wie $-\infty:1$; es ist demnach hinreichend

$$p=\lambda A\,(x-a)^{\lambda-1}\,[l(x-a)]^\mu$$

zu setzen, und hieraus folgern wir auf ähnliche Art:

$$\frac{dp}{dx} = \lambda(\lambda - 1) A (x - a)^{\lambda-2} [l(x - a)]^{\mu},$$

elcher Ausdruck mit der Function V, nachdem man in derſelben $= a$, $y = b$ und $p = c$, oder vielmehr

$$y = b + A (x - a)^{\lambda} [l(x - a)]^{\mu} \text{ und}$$
$$p = \lambda A (x - a)^{\lambda-1} [l(x - a)]^{\mu}$$

ſetzt hat, verglichen werden muß, um dadurch ſowohl die Conſtante , als auch die Exponenten λ und μ zu beſtimmen. Bey jener Unterſuchung hat man ſich demnach an dieſe Vorſchriften zu halten, um ihr durch die Ausdehnung auf mehrere Fälle zu verſchaffen.

Aufgabe 140.

§. 1094. Die vorhin erörterte Annäherung noch weiter zu treiben, ſo daß man ſich von der Wahrheit weniger entfernt, wenn auch etwas größere Intervalle genommen werden.

Auflöſung.

Man ſetze $dy = p\,dx$, und bringe die Differenzialgleichung des zweyten Grades auf die Form $\frac{dp}{dx} = V$, aus welcher wir früher p beſtimmt haben, als wäre V eine conſtante Größe, wenigſtens für ein ſehr kleines Intervall, und dadurch erhielten wir

$$p = c + V(x - a),$$

nachdem wir nämlich in V die Subſtitutionen $x = a$, $y = b$ und $= c$ gemacht haben, welche Größen die urſprünglichen Werthe bedeuten, die durch das Intervall $x - a = \omega$ beybehalten werden müſſen. Da aber die Function V nicht conſtant iſt, indem ſie die Größen x, y und p enthält, ſo wird man eigentlich erhalten;

$$p = c + V(x - a) - \int (x - a)\,dV.$$

Setzen wir alſo

$$dV = P\,dx + Q\,dy + R\,dp,$$

daß demnach

$$dV = (P + Qp + RV)\,dx$$

wird, und betrachten nun die Größe $P + Qp + RV$ als unveränderlich, deren Werth ſich ergibt, wenn man $x = a$, $y = b$ und $p = c$

ſetzt, wodurch unſerer früheren Annahme gemäß V in F übergeht, ſo werden wir

$$p = c + F(x-a) - \tfrac{1}{2}(P + Qc + RF)(x-a)^2$$

finden, und daher wird ferner, weil $dy = p\,dx$ iſt:

$$y = b + c(x-a) + \tfrac{1}{2}F(x-a)^2 - \tfrac{1}{6}(P+Qc+RF)(x-a)^3.$$

Auf ähnliche Art kann man die Annäherung noch weiter fortſetzen. Wenn aber die Größen P, Q, R und V den Ausdruck $(x-a)$ oder Potenzen deſſelben enthalten, welcher nicht weiter als conſtant angeſehen werden kann, ſo iſt hierauf bey der Integration Rückſicht zu nehmen, wodurch es dann geſchieht, daß die Potenzen des Ausdruckes $(x-a)$ in den Näherungsreihen nicht der Ordnung nach fortſchreiten. Es wird alſo dann zweckmäßig ſeyn, den Anfang der Reihe für p ſo zu wählen, daß

$$p = c + A(x-a)^\lambda$$

genommen wird, wodurch

$$y = b + c(x-a) + \frac{A}{\lambda+1}(x-a)^{\lambda+1}$$

erhalten wird, und weil

$$\frac{dp}{dx} = \lambda A(x-a)^{\lambda-1}$$

iſt, ſo muß dieſem Ausdrucke die Function V gleich geſetzt werden, nachdem man in derſelben für y und p die angenommenen Werthe, für x aber den Werth a geſchrieben hat, wenn der Ausdruck $(x-a)$ nicht vorkömmt; auf dieſe Art wird dann ſowohl der Exponent λ als auch der Coefficient A beſtimmt werden.

Iſt $c = 0$ oder $c = \infty$, ſo wird dieſer Umſtand bey der Rechnung dadurch berückſichtiget, daß man

$$p = f(x-a)^n + A(x-a)^\lambda$$

ſetzt, und dann wird

$$y = b + \frac{f}{n+1}(x-a)^{n+1} + \frac{A}{\lambda+1}(x-a)^{\lambda+1},$$

werden aber dieſe Werthe für x und p in der Function V ſubſtituirt, ſo muß man erhalten:

$$nf(x-a)^{n-1} + \lambda A(x-a)^{\lambda-1}.$$

Zuſatz 1.

§. 1095. Auf dieſe Art kann man durch Intervalle immer weiter

hen, wenn nur die einzelnen Intervalle so klein genommen werden, ß die dabey begangenen Fehler nur unmerklich ausfallen; durch diese orrection werden übrigens jene Fehler so unbedeutend, daß auch grö- re Intervalle angenommen werden können.

Zusatz 2.

§. 1096. Für das erste Intervall werden nämlich die ursprüng- chen Werthe $x = a$, $y = b$ und $p = c$ beliebig angenommen, und ie am Ende des Intervalles gefundenen Werthe geben zugleich die An- ngswerthe für das zweyte Intervall, mit welchem die Rechnung für iefes Intervall eben so durchgeführt wird, wie für das erste, und auf iese Art kann man ohne Ende weiter fortschreiten.

Anmerkung.

§. 1097. Wir haben für dieses Problem eine doppelte Auflösung gegeben, und obgleich die erstere derselben sehr allgemein zu seyn scheint, so kann sie dennoch in gewissen Fällen nicht angewendet werden, weß- halb man sich dann der zweyten Auflösung bedienen wird. Übrigens gibt es gewöhnlich nur sehr wenige Intervalle, welche die letztere Me- thode erfordern, während alle übrigen nach der ersten Methode behan- delt werden können. Dieß ist der Fall, wenn für irgend ein Intervall die Größen V und c entweder verschwinden oder unendlich groß wer- den; ja, es kann auch geschehen, daß, so klein auch das Intervall ge- nommen werden mag, die Größen y und p unendlich großen Änderun- gen unterworfen sind, deren Darstellung dann eine ganz eigenthümliche Bestimmung erfordert Wäre z. B. die Gleichung

$$d^2y + \frac{y\,dx^2}{x^2} = 0$$

gegeben, so erzeugt das Intervall von $x = 0$ bis $x = \omega$, wenn auch ω noch so klein angenommen wird, in den Werthen von y und p eine unendliche Änderung, wie sich aus dem vollständigen Integrale der Gleichung erkennen läßt; denn da dieses

$$y = A x^{\frac{1}{2}} \sin.\left[\frac{\sqrt{3}}{2} lx + \alpha\right]$$

ist, also

$$p = \frac{A}{2\sqrt{x}} \sin.\left[\frac{\sqrt{3}}{2} lx + \alpha\right] + \frac{A\sqrt{3}}{2\sqrt{x}} \cos.\left[\frac{\sqrt{3}}{2} lx + \alpha\right],$$

oder

$$p = \frac{A}{\sqrt{x}} \sin.\left[\frac{\sqrt{3}}{2} lx + \alpha + 60^0\right]$$

wird, so ist einleuchtend, daß für $x = o$ zwar $y = o$ seyn werde, der Werth von p aber unbestimmt bleibe. Legt man aber der Größe x einen sehr kleinen Werth bey, so wird y zwar einen sehr unbedeutenden Werth erhalten, der aber für das sehr kleine Intervall bald positiv ist, bald verschwindet, bald negativ wird, weil lx eine sehr große Änderung erleidet; allein die Größe p nimmt während dieses Intervalles alle möglichen Änderungen an. Noch deutlicher sieht man dieß bey dem Beyspiele

$$d^2y + \frac{2dxdy}{x} - \frac{f^2ydx^2}{x^4} = o,$$

welcher Gleichung das vollständige Integrale $y = A \sin.\left(\frac{f}{x} + \alpha\right)$ zugehört. Denn während x von o bis ω wächst, geht der Winkel $\frac{f}{x} + \alpha$ vom Unendlichen zum Endlichen über, und sein Sinus erleidet alle Änderungen zwischen $+1$ und -1 sogar unendlich oft. Wenn wir also auf derley Intervalle kommen, so darf es uns nicht wundern, wenn die gewöhnlichen Näherungsmethoden nicht zureichen, jene nämlich, welche sich auf den Grundsatz stützen, daß die Änderungen durch sehr kleine Intervalle selbst sehr klein sind. Mit Ausnahme dieser Intervalle läßt sich die vorgeschriebene Auflösungsmethode immer mit Nutzen anwenden.

Beyspiel 1.

§. 1098. Sey gegeben die Gleichung

$$d^2y + \frac{ydx^2}{fx} = o;$$

man soll sie durch Approximation integriren.

Da also $dp = -\frac{ydx}{fx}$ ist, so wird $V = \frac{-y}{fx}$ seyn; setzen wir daher für den Anfang des Intervalles $x = a$, $y = b$ und $p = c$, und gehen von da an nur ein wenig weiter, so werden wir, weil

$$P = \frac{y}{fx^2} = \frac{b}{a^2f}; \quad Q = \frac{-1}{fx} = \frac{-1}{af} \quad \text{und} \quad R = o \text{ ist,}$$

nach der erstern Auflösung erhalten:

$$p = c - \frac{b}{af}(x-a) - \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a^2f} - \frac{c}{af}\right)(x-a)^2 \text{ und}$$

$$y = b + c(x-a) - \frac{b}{2af}(x-a)^2.$$

Wird also $x - a = \omega$ gesetzt, so werden die Anfangswerthe für
nächste Intervall seyn:

$$a' = a + \omega; \quad b' = b + c\omega - \frac{b\omega^2}{2af} \text{ und}$$

$$c' = c - \frac{b\omega}{af} - \frac{(b - ac)\omega^2}{2a^2 f};$$

hieraus findet man auf ähnliche Art die Anfangswerthe für das
hstfolgende Intervall.

Wird aber für irgend ein Intervall $a = o$, so muß die Rechnung
h einer eigenen Methode geführt werden. Nimmt man nämlich für
Anfang dieses Intervalles $x = o$, $y = b$ und $p = c$, und setzt

$$p = c + Ax^\lambda \text{ und } y = b + cx + \frac{Ax^{\lambda+1}}{\lambda+1},$$

wird man erhalten:

$$\frac{dp}{dx} = \lambda A x^{\lambda-1} = \frac{-y}{fx} = \frac{-b}{fx} - \frac{c}{f} - \frac{Ax^\lambda}{(\lambda+1)f},$$

lcher Gleichung nicht Genüge geleistet werden kann, außer wenn
$= o$ ist; denn man würde $\lambda = o$ und $A = \infty$ finden, woraus
r schließen, daß man

$$y = b + Ax\,lx$$

zen müsse, so daß also

$$p = A\,lx + A \text{ und } \frac{dp}{dx} = \frac{A}{x} = \frac{-b - Ax\,lx}{fx},$$

lglich $A = -\frac{b}{f}$ wird.

Um aber hieraus den Werth von p genau erkennen zu können,
zen wir

$$y = b + Ax\,lx + Bx,$$

nd man wird erhalten

$$p = A\,lx + A + B \text{ und } \frac{dp}{dx} = \frac{A}{x};$$

oraus sich ergibt, daß, wie vorhin, $A = \frac{-b}{f}$ wird, und B unbe-
immt bleibt, so daß man nun

$$y = b - \frac{bx}{f}\,lx + Bx, \text{ und}$$

$$p = \frac{-b}{f}\,lx - \frac{b}{f} + B$$

ndet. Ist demnach nicht $b = o$, wenn $x = o$ ist, so ist nothwen-
ig die Größe c unendlich groß; wenn daher zu Anfang des Inter-

valles $x=o$, $y=b$ und $p=\infty$ iſt, ſo wird man am Ende deſſelben und am Anfang des folgenden Intervalles erhalten:

$$x=\omega;\quad y=b-\frac{b\omega}{f}l\omega \quad \text{und} \quad p=\frac{-b}{f}l\omega.$$

Beyſpiel 2.

§. 1099. Sey gegeben die Gleichung

$$x^2d^2y-2xdxdy+2ydx^2=\frac{x^2ydx^2}{f^2},$$

man ſoll das Integrale derſelben näherungsweiſe beſtimmen.

Da $$\frac{dp}{dx}=\frac{2p}{x}-\frac{2y}{x^2}+\frac{y}{f^2}=V$$

iſt, ſo wird man erhalten:

$$P=\frac{-2p}{x^2}+\frac{4y}{x^3},$$

$$Q=\frac{-2}{x^2}+\frac{1}{f^2} \quad \text{und}$$

$$R=\frac{2}{x}.$$

Iſt daher für den Anfang eines Intervalles $x=a$, $y=b$, $p=c$, ſo wird man, weil

$$F=\frac{2c}{a}-\frac{2b}{a^2}+\frac{b}{f^2} \quad \text{iſt, erhalten:}$$

$$p=c+\left(\frac{2c}{a}-\frac{2b}{a^2}+\frac{b}{f^2}\right)(x-a)-\frac{1}{2}\left(\frac{c}{f^2}+\frac{2b}{af^2}\right)(x-a)^2$$

$$\text{und}\quad y=b+c(x-a)+\frac{1}{2}\left(\frac{2c}{a}-\frac{2b}{a^2}+\frac{b}{f^2}\right)(x-a)^2.$$

Nun läßt ſich die Rechnung durch Intervalle leicht weiter fortſetzen, wenn nur nicht $a=o$ iſt. In dieſem Falle aber, wo $a=o$ iſt, kann das Intervall nicht ohne Schwierigkeit durch Rechnung beſtimmt werden, weil man dann den Größen b und c keine gegebenen Werthe beylegen kann, wovon man ſich ſehr leicht durch die Betrachtung des vollſtändigen Integrales unſerer vorgelegten Gleichung

$$y=Ae^{\frac{x}{f}}x+Be^{-\frac{x}{f}}x$$

überzeugt; denn wird hier $x=o$ geſetzt, ſo wird nothwendig $y=o$, wenn wir die Coefficienten A und B nicht unendlich groß nehmen wollen. Wird aber $b=o$ geſetzt, ſo hat die Approximation keine Schwierigkeit.

Erstes Buch

der

Integralrechnung.

Zweyter Theil. Zweyter Abschnitt.

Zweyter Abſchnitt.

on der Auflöſung der Differenzialgleichungen s dritten und der höhern Grade, welche bloß zwey Veränderliche enthalten.

Kapitel I.

on der Integration der einfachen Differenzialformeln des dritten oder eines höhern Grades.

Aufgabe 141.

§. 1100. Das vollſtändige Integrale der For- ln $d^3y = o$, $d^4y = o$, $d^5y = o$ u. ſ. w., und allge- in jenes des Ausdruckes $d^ny = o$, bey welchem das ement dx als unveränderlich genommen iſt, zu den.

Auflöſung.

Da dx conſtant iſt, ſo gibt die Gleichung $d^3y = o$ durch In- ration $d^2y = \alpha dx^2$, und daher durch fortgeſetztes Integriren.

$$dy = \alpha x dx + \beta dx, \text{ und endlich}$$
$$y = \tfrac{1}{2}\alpha x^2 + \beta x + \gamma.$$

Auf ähnliche Art findet man aus der Gleichung $d^4y = o$ durch e vierfache Integration:

1) $d^3y = \alpha dx^3$;
2) $d^2y = \alpha x dx^2 + \beta dx^2$;
3) $dy = \tfrac{1}{2}\alpha x^2 dx + \beta x dx + \gamma dx$, und endlich
4) $y = \tfrac{1}{6}\alpha x^3 + \tfrac{1}{2}\beta x^2 + \gamma x + \delta$.

Die Gleichung $d^5y = 0$ aber gibt, wenn die Integration fünf Mahl wiederholt wird:

$$y = \tfrac{1}{24}\alpha x^4 + \tfrac{1}{6}\beta x^3 + \tfrac{1}{2}\gamma x^2 + \delta x + \varepsilon.$$

Der Gleichung $d^6y = 0$ entspricht folgendes vollständige Integrale:

$$y = \tfrac{1}{120}\alpha x^5 + \tfrac{1}{24}\beta x^4 + \tfrac{1}{6}\gamma x^3 + \tfrac{1}{2}\delta x^2 + \varepsilon x + \zeta,$$

und so kann man mit der Integration der Formeln $d^n y = 0$ fortfahren, vom wievielten Grade sie auch seyn mögen, wenn nur n eine ganze positive Zahl bezeichnet.

Zusatz 1.

§. 1101. Indem man also mit der einfachsten Form beginnt, schreiten die Integralien nach folgender Ordnung fort:

Den Formeln	entsprechen die vollständigen Integrale
$dy = 0$	$y = \alpha$
$d^2y = 0$	$y = \alpha x + \beta$
$d^3y = 0$	$y = \frac{1}{2}\alpha x^2 + \beta x + \gamma$
$d^4y = 0$	$y = \frac{1}{6}\alpha x^3 + \frac{1}{2}\beta x^2 + \gamma x + \delta$
ꝛc. ꝛc.	ꝛc. ꝛc.

Zusatz 2.

§ 1102. Weil die constanten Größen α, β, γ ... ganz willkürlich sind, so können die Brüche ohne Bedenken weggelassen werden, und dann entsprechen

den Formeln	die Integralien
$dy = 0$	$y = \alpha$
$d^2y = 0$	$y = \alpha x + \beta$
$d^3y = 0$	$y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$
$d^4y = 0$	$y = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$
$d^5y = 0$	$y = \alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon$
ꝛc. ꝛc.	ꝛc. ꝛc.

Zusatz 3.

§. 1103. Von der sovielsten Ordnung also die Differenzialformel ist, eben so viele willkürliche Constanten enthält ihr vollständiges Integrale, welche man in jedem gegebenen Falle nach den vorgeschriebenen Bedingungen bestimmen muß.

Anmerkung 1.

§. 1104. Setzt man $dy = pdx$, $dp = qdx$, $dq = rdx$, $r = sdx$ u. s. w., so werden alle Differenzialgleichungen der höhern Ordnungen auf endliche Größen zurückgeführt, bey welchen auf das dx constant betrachtete Element weiter keine Rücksicht genommen wird. Man lassen sich daher die Formen aller Differenzialgleichungen auf folgende Art darstellen:

Der Differenzialgleichungen des	allgemeine Form ist:
I. Grades	$p = f(x, y)$
II. »	$q = f(x, y, p)$
III. »	$r = f(x, y, p, q)$
IV. »	$s = f(x, y, p, q, r)$
ꝛc.	ꝛc.

so die Größen y, p, q, r, s mit Ausschluß des Elementes dx so von einander abhängen, daß, weil

$$dx = \frac{dy}{p} = \frac{dp}{q} = \frac{dq}{r} = \frac{dr}{s} = \frac{ds}{t} = \text{ꝛc.}$$

ist, folgende Relationen Statt finden:

$pdy = pdp$; $rdy = pdq$; $sdy = pdr$; $tdy = pds$ ꝛc.
$rdp = qdq$; $sdp = qdr$; $tdp = qds$; ꝛc.
$sdq = rdr$; $tdq = rds$; $tdr = sds$; ꝛc.

von welchen Formeln einige für sich integrabel sind, nämlich:

$\int qdy = \frac{1}{2}p^2$; $\int rdp = \frac{1}{2}q^2$; $\int sdq = \frac{1}{2}r^2$; $\int tdr = \frac{1}{2}s^2$; ꝛc.

aus welchen ferner, weil $\int zdv = vz - \int vdz$ ist, folgende abgeleitet werden:

$$\int ydq = yq - \tfrac{1}{2}p^2; \quad \int pdr = pr - \tfrac{1}{2}q^2; \quad \int qds = qs - \tfrac{1}{2}r^2;$$
$$\int rdt = rt - \tfrac{1}{2}s^2; \quad \text{u. s. w.}$$

mittelst welcher man aus den vorhergehenden Ausdrücken erhält:

$\int sdy = pr - \frac{1}{2}q^2$; daher $\int yds = ys - pr + \frac{1}{2}q^2$;
$\int tdp = qs - \frac{1}{2}r^2$; » $\int pdt = pt - qs + \frac{1}{2}r^2$;
$\int udq = rt - \frac{1}{2}s^2$; » $\int qdu = qu - rt + \frac{1}{2}s^2$.

Hieraus bestimmt man ferner

$$\int ydu = yu - \int udy;$$

es ist aber

$$\frac{dy}{p} = \frac{dt}{u},$$

und daher ist

$$\int y\,du = yu - \int p\,dt = yu - pt + qs - \tfrac{1}{2}r^2.$$

Führen wir daher wieder die Differenzialien in die Rechnung ein, so werden wir folgende Integralformeln erhalten:

$$\int y\,dy = \tfrac{1}{2}y^2$$
$$\int y\,d^3y = y\,d^2y - \tfrac{1}{2}dy^2$$
$$\int y\,d^5y = y\,d^4y - dy\,d^3y + \tfrac{1}{2}(d^2y)^2$$
$$\int y\,d^7y = y\,d^6y - dy\,d^5y + d^2y\,d^4y - \tfrac{1}{2}(d^3y)^2$$

u. s. w.;

so daß also die Formel $\int y\,d^n y$ integrabel ist, so oft n eine ungerade ganze Zahl bezeichnet.

Anmerkung 2.

§. 1105. Bey den Differenzialgleichungen des zweyten Grades haben wir die einfachen Formen so aufgestellt, daß q entweder bloß eine Function von x, oder von y, oder von p allein bezeichnete, welche Größen, wenn die großen Buchstaben zur Bezeichnung der Functionen der kleinen Buchstaben gebraucht werden, sich so darstellen lassen, daß

entweder $q = X$ oder $q = Y$ oder $q = P$

wird. Wir können daher auch für die Differenzialgleichungen des dritten Grades die einfacheren Formen auf ähnliche Art darstellen:

$$r = X;\quad r = Y;\quad r = P;\quad r = Q,$$

so daß dieselben nur zwey veränderliche Größen enthalten.

Für den vierten Grad wären demnach die einfachern Formeln

$$s = X;\quad s = Y;\quad s = P;\quad s = Q;\quad s = R;$$

und für den fünften Grad

$$t = X;\quad t = Y;\quad t = P;\quad t = Q;\quad t = R;\quad t = S,$$

und eben so ferner für die höhern Grade.

Allein diese Formen lassen nicht alle auf gleiche Weise die Integration zu, denn manche lassen sich nicht ein einziges Mahl, andere bloß ein Mahl integriren, und bey andern kann man alle Integrationen bis zu der zwischen x und y vorhandenen Relation ausführen, wie dieß jedes Mahl bey den beyden ersten Formeln in jedem Grade der Fall ist. Immer aber hat man die Aufgabe zu lösen, zwischen den beyden Hauptgrößen x und y eine Relation aufzufinden.

Aufgabe 142.

§. 1106. Sey $dy = pdx$, $dp = qdx$, $dq = rdx$, $r = sdx$, $ds = tdx$ ꝛc.; es ſoll für jeden Grad der ifferenzialien eine Gleichung zwiſchen x und y gefunden werden, wenn eine der Größen p, q, r, s, t... ner Function von x gleich wird, welche wir durch bezeichnen wollen.

Auflöſung.

Wenn erſtlich $p = X$ iſt, ſo wird man durch Multiplication mit x erhalten $pdx = dy = Xdx$, und daher $y = \int Xdx$, welches n Fall der einfachen Differentialformeln des erſten Grades iſt.

Sey zweytens $q = X$, ſo wird man haben

$$qdx = dp = Xdx, \text{ daher}$$
$$p = \int Xdx \text{ und } pdx = dy = dx\int Xdx, \text{ folglich}$$
$$y = \int dx \int Xdx,$$

er mittelſt einfacher Integralien

$$y = x\int Xdx - \int Xxdx.$$

Sey drittens $r = X$, ſo wird man, weil $dq = rdx$ iſt, halten:

$$q = \int Xdx, \text{ und daher}$$
$$p = \int qdx = \int dx \int Xdx = x\int Xdx - \int Xxdx;$$

blich alſo

$$= \int pdx = \int dx \int dx \int Xdx = \tfrac{1}{2}x^2\int Xdx - x\int Xxdx + \tfrac{1}{2}\int Xx^2dx.$$

Viertens ſey $s = X$, ſo findet man

$$y = \int dx \int dx \int dx \int Xdx,$$

lcher Ausdruck endlich in folgende Gleichung aufgelöſt wird:

$$= \tfrac{1}{6}x^3\int Xdx - \tfrac{1}{2}x^2\int Xxdx + \tfrac{1}{2}x\int Xx^2dx - \tfrac{1}{6}\int Xx^3dx.$$

Fünftens ſey $t = X$, ſo wird man finden:

$$y = \int dx \int dx \int dx \int dx \int Xdx, \text{ oder}$$
$$= \tfrac{1}{24}x^4\int Xdx - \tfrac{1}{6}x^3\int Xxdx + \tfrac{1}{4}x^2\int Xx^2dx - \tfrac{1}{6}x\int Xx^3dx + \tfrac{1}{24}\int Xx^4dx.$$

Hieraus erhellet das Geſetz für den weitern Fortgang der Rechnung von ſelbſt.

Zuſatz 1.

§. 1107. Man erhält demnach eben ſo viele Integralformeln,

vom wievielſten Grade die Differenzialgleichung iſt, und weil jede derſelben eine willkürliche Conſtante aufnimmt, ſo erſcheinen im Integrale eben ſo viele unveränderliche Größen, wodurch dieſes zum vollſtändigen erhoben wird. Dasſelbe erkennt man auch ſchon an der erſten Form, in welcher eben ſo viele Integralzeichen vorkommen.

Zuſatz 2.

§. 1108. Wird das Element dx als unveränderlich angeſehen, ſo ſtellen ſich die vollſtändigen Integralien der folgenden, nach der gewöhnlichen Bezeichnung ausgedrückten Formeln auf nachſtehende Art dar:

I. Wenn $dy = X dx$ iſt, ſo wird

$$y = \int X dx;$$

II. Wenn $d^2y = X dx^2$ iſt, ſo findet man

$$1.y = x\int X dx - \int X x dx;$$

III. Wenn $d^3y = X dx^3$ iſt, ſo erhält man

$$2.y = x^2\int X dx - 2x\int X x dx + \int X x^2 dx;$$

IV. Wenn $d^4y = X dx^4$ iſt, ſo wird

$$6.y = x^3\int X dx - 3x^2\int X x dx + 3x\int X x^2 dx - \int X x^3 dx;$$

V. Wenn $d^5y = X dx^5$ iſt, ſo wird

$$24.y = x^4\int X dx - 4x^3\int X x dx + 6x^2\int X x^2 dx - 4x\int X x^3 dx + \int X x^4 dx;$$

u. ſ. w.

Anmerkung.

§. 1109. Die Formeln aber, welche wir oben an die zweyte Stelle geſetzt haben, und welche die Function y enthalten, laſſen ſich nicht integriren, wenn ſie den zweyten Grad überſteigen. So kann die Formel $r = Y$ aus der dritten Ordnung, obgleich wir wiſſen daß

$$r = \frac{p\,dq}{dy} = \frac{q\,dq}{dp} = \frac{dq}{dx}$$

iſt, doch auf keine Weiſe integrirt werden, und daher läßt ſich auch hieraus q nicht durch y beſtimmen. Denn nehmen wir die Form $p\,dq = Y dy$, wobey $p\,dp = q\,dy$ iſt, ſo werden wir wegen $p = \frac{Y dy}{dq}$ finden

$$dp = \frac{dy\,dY}{dq} + Y d.\frac{dy}{dq},$$

d daher durch Elimination von p:

$$\frac{Y\,dy^2\,dY}{dq^2} + \frac{Y^2\,dy}{dq}\,d\cdot\frac{dy}{dq} = q\,dy,$$

lche Gleichung zwar vom zweyten Grade ist, keineswegs aber im lgemeinen die Integration zuläßt.

Die Formel $s = Y$ aus der vierten Gattung kann, weil

$$\int s\,dy = py - \tfrac{1}{2}q^2 = \int Y\,dy$$

, zwar ein Mahl integrirt werden, allein dann kann man nicht mehr iter gehen. Jene einfachern Formeln aber, welchen wir oben für en Grad den letzten und vorletzten Platz angewiesen haben, lassen) behandeln, und wir wollen daher versuchen, sie zu integriren.

Aufgabe 143.

§. 1110. Sey, wie bisher, $dy = p\,dx$, $dp = q\,dx$, $= r\,dx$ ꝛc., und jeder der Buchstaben Y, P, Q, R ll eine Function von der, mit dem gleichnahmigen einen Buchstaben bezeichneten Größe vorstellen; an bestimme die Integralien folgender einfachen rmeln:

$$p = Y,\quad q = P,\quad r = Q,\quad s = R,\quad t = S,\quad \text{ꝛc.}$$

Auflösung.

Die erste Gleichung gibt, weil $p = \frac{dy}{dx}$ ist, sogleich

$$dx = \frac{dy}{Y},\quad \text{folglich}\quad x = \int\frac{dy}{Y}.$$

Die zweyte Gleichung $q = P$ gibt, weil $q = \frac{dp}{dx}$ ist:

$$dx = \frac{dp}{P}\quad\text{und}\quad dy = \frac{p\,dp}{P},$$

) da P eine Function von p bezeichnet, so wird jede der Veränder- en x und y durch p auf folgende Art bestimmt:

$$x = \int\frac{dp}{P}\quad\text{und}\quad y = \int\frac{p\,dp}{P}.$$

Aus der dritten Gleichung $r = Q$ findet man wegen $r = \frac{dq}{dx}$

$$dx = \frac{dq}{Q},\quad\text{also}\quad q\,dx = dp = \frac{q\,dq}{Q},$$

valles $x=o$, $y=b$ und $p=\infty$ ist, so wird man am Ende desselben und am Anfang des folgenden Intervalles erhalten:

$$x=\omega;\quad y=b-\frac{b\omega}{f}l\omega \quad \text{und} \quad p=\frac{-b}{f}l\omega.$$

Beyspiel 2.

§. 1099. Sey gegeben die Gleichung

$$x^2d^2y-2xdxdy+2ydx^2=\frac{x^2ydx^2}{f^2},$$

man soll das Integrale derselben näherungsweise bestimmen.

Da $$\frac{dp}{dx}=\frac{2p}{x}-\frac{2y}{x^2}+\frac{y}{f^2}=V$$

ist, so wird man erhalten:

$$P=\frac{-2p}{x^2}+\frac{4y}{x^3},$$

$$Q=\frac{-2}{x^2}+\frac{1}{f^2} \quad \text{und}$$

$$R=\frac{2}{x}.$$

Ist daher für den Anfang eines Intervalles $x=a$, $y=b$, $p=c$, so wird man, weil

$$F=\frac{2c}{a}-\frac{2b}{a^2}+\frac{b}{f^2} \quad \text{ist, erhalten:}$$

$$p=c+\left(\frac{2c}{a}-\frac{2b}{a^2}+\frac{b}{f^2}\right)(x-a)-\frac{1}{2}\left(\frac{c}{f^2}+\frac{2b}{af^2}\right)(x-a)^2$$

$$\text{und}\quad y=b+c(x-a)+\frac{1}{2}\left(\frac{2c}{a}-\frac{2b}{a^2}+\frac{b}{f^2}\right)(x-a)^2.$$

Nun läßt sich die Rechnung durch Intervalle leicht weiter fortsetzen, wenn nur nicht $a=o$ ist. In diesem Falle aber, wo $a=o$ ist, kann das Intervall nicht ohne Schwierigkeit durch Rechnung bestimmt werden, weil man dann den Größen b und c keine gegebenen Werthe beylegen kann, wovon man sich sehr leicht durch die Betrachtung des vollständigen Integrales unserer vorgelegten Gleichung

$$y=Ae^{\frac{x}{f}x}+Be^{-\frac{x}{f}x}$$

überzeugt; denn wird hier $x=o$ gesetzt, so wird nothwendig $y=o$, wenn wir die Coefficienten A und B nicht unendlich groß nehmen wollen. Wird aber $b=o$ gesetzt, so hat die Approximation keine Schwierigkeit.

Erſtes Buch

der

Integralrechnung.

Zweyter Theil. Zweyter Abſchnitt.

Zweyter Abſchnitt.

on der Auflöſung der Differenzialgleichungen s dritten und der höhern Grade, welche bloß zwey Veränderliche enthalten.

Kapitel I.

ɔn der Integration der einfachen Differenzialformeln des dritten oder eines höhern Grades.

Aufgabe 141.

§. 1100. Das vollſtändige Integrale der For- ln $d^3y = o$, $d^4y = o$, $d^5y = o$ u. ſ. w., und allge- in jenes des Ausdruckes $d^ny = o$, bey welchem das ement dx als unveränderlich genommen iſt, zu den.

Auflöſung.

Da dx conſtant iſt, ſo gibt die Gleichung $d^3y = o$ durch In- ration $d^2y = \alpha dx^2$, und daher durch fortgeſetztes Integriren.

$$dy = \alpha x dx + \beta dx, \text{ und endlich}$$
$$y = \tfrac{1}{2}\alpha x^2 + \beta x + \gamma.$$

Auf ähnliche Art findet man aus der Gleichung $d^4y = o$ durch e vierfache Integration:

1) $d^3y = \alpha dx^3$;
2) $d^2y = \alpha x dx^2 + \beta dx^2$;
3) $dy = \tfrac{1}{2}\alpha x^2 dx + \beta x dx + \gamma dx$, und endlich
4) $y = \tfrac{1}{6}\alpha x^3 + \tfrac{1}{2}\beta x^2 + \gamma x + \delta$.

Die Gleichung $d^5 y = 0$ aber gibt, wenn die Integration fünf Mahl wiederholt wird:

$$y = \tfrac{1}{24}\alpha x^4 + \tfrac{1}{6}\beta x^3 + \tfrac{1}{2}\gamma x^2 + \delta x + \varepsilon.$$

Der Gleichung $d^6 y = 0$ entspricht folgendes vollständige Integrale:

$$y = \tfrac{1}{120}\alpha x^5 + \tfrac{1}{24}\beta x^4 + \tfrac{1}{6}\gamma x^3 + \tfrac{1}{2}\delta x^2 + \varepsilon x + \zeta,$$

und so kann man mit der Integration der Formeln $d^n y = 0$ fortfahren, vom wievielten Grade sie auch seyn mögen, wenn nur n eine ganze positive Zahl bezeichnet.

Zusatz 1.

§. 1101. Indem man also mit der einfachsten Form beginnt, schreiten die Integralien nach folgender Ordnung fort:

Den Formeln	entsprechen die vollständigen Integrale
$dy = 0$	$y = \alpha$
$d^2 y = 0$	$y = \alpha x + \beta$
$d^3 y = 0$	$y = \tfrac{1}{2}\alpha x^2 + \beta x + \gamma$
$d^4 y = 0$	$y = \tfrac{1}{6}\alpha x^3 + \tfrac{1}{2}\beta x^2 + \gamma x + \delta$
ꝛc. ꝛc.	ꝛc. ꝛc.

Zusatz 2.

§ 1102. Weil die constanten Größen α, β, γ... ganz willkürlich sind, so können die Brüche ohne Bedenken weggelassen werden, und dann entsprechen

den Formeln	die Integralien
$dy = 0$	$y = \alpha$
$d^2 y = 0$	$y = \alpha x + \beta$
$d^3 y = 0$	$y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$
$d^4 y = 0$	$y = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$
$d^5 y = 0$	$y = \alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon$
ꝛc. ꝛc.	ꝛc. ꝛc.

Zusatz 3.

§. 1103. Von der sovielsten Ordnung also die Differenzialformel ist, eben so viele willkürliche Constanten enthält ihr vollständiges Integrale, welche man in jedem gegebenen Falle nach den vorgeschriebenen Bedingungen bestimmen muß.

Anmerkung 1.

§. 1104. Setzt man $dy = pdx$, $dp = qdx$, $dq = rdx$, $= sdx$ u. s. w., so werden alle Differenzialgleichungen der höhern nungen auf endliche Größen zurückgeführt, bey welchen auf das constant betrachtete Element weiter keine Rücksicht genommen wird. lassen sich daher die Formen aller Differenzialgleichungen auf fol- e Art darstellen:

er Differenzialgleichungen des	allgemeine Form ist:
I. Grades	$p = f(x, y)$
II. »	$q = f(x, y, p)$
III. »	$r = f(x, y, p, q)$
IV. »	$s = f(x, y, p, q, r)$
ꝛc.	ꝛc.

die Größen y, p, q, r, s mit Ausschluß des Elementes dx so einander abhängen, daß, weil

$$dx = \frac{dy}{p} = \frac{dp}{q} = \frac{dq}{r} = \frac{dr}{s} = \frac{ds}{t} = \text{ꝛc.}$$

folgende Relationen Statt finden:

$= pdp$; $rdy = pdq$; $sdy = pdr$; $tdy = pds$ ꝛc.
$= qdq$; $sdp = qdr$; $tdp = qds$; ꝛc.
$= rdr$; $tdq = rds$; $tdr = sds$; ꝛc.

welchen Formeln einige für sich integrabel sind, nämlich:

$y = \frac{1}{2}p^2$; $\int rdp = \frac{1}{2}q^2$; $\int sdq = \frac{1}{2}r^2$; $\int tdr = \frac{1}{2}s^2$; ꝛc.

welchen ferner, weil $\int zdv = vz - \int vdz$ ist, folgende abge- werden:

$q = yq - \frac{1}{2}p^2$; $\int pdr = pr - \frac{1}{2}q^2$; $\int qds = qs - \frac{1}{2}r^2$;
$\int rdt = rt - \frac{1}{2}s^2$; u. s. w.

ist welcher man aus den vorhergehenden Ausdrücken erhält:

$dy = pr - \frac{1}{2}q^2$; daher $\int yds = ys - pr + \frac{1}{2}q^2$;
$dp = qs - \frac{1}{2}r^2$; » $\int pdt = pt - qs + \frac{1}{2}r^2$;
$dq = rt - \frac{1}{2}s^2$; » $\int qdu = qu - rt + \frac{1}{2}s^2$.

Hieraus bestimmt man ferner

$$\int ydu = yu - \int udy;$$

t aber

$$\frac{dy}{p} = \frac{dt}{u},$$

und daher ist

$$\int y\,du = yu - \int p\,dt = yu - pt + qs - \tfrac{1}{2}r^2.$$

Führen wir daher wieder die Differenzialien in die Rechnung ein, so werden wir folgende Integralformeln erhalten:

$$\int y\,dy = \tfrac{1}{2}y^2$$
$$\int y\,d^3y = y\,d^2y - \tfrac{1}{2}dy^2$$
$$\int y\,d^5y = y\,d^4y - dy\,d^3y + \tfrac{1}{2}(d^2y)^2$$
$$\int y\,d^7y = y\,d^6y - dy\,d^5y + d^2y\,d^4y - \tfrac{1}{2}(d^3y)^2$$

u. s. w.;

so daß also die Formel $\int y\,d^ny$ integrabel ist, so oft n eine ungerade ganze Zahl bezeichnet.

Anmerkung 2.

§. 1105. Bey den Differenzialgleichungen des zweyten Grades haben wir die einfachen Formen so aufgestellt, daß q entweder bloß eine Function von x, oder von y, oder von p allein bezeichnete, welche Größen, wenn die großen Buchstaben zur Bezeichnung der Functionen der kleinen Buchstaben gebraucht werden, sich so darstellen lassen, daß

entweder $q = X$ oder $q = Y$ oder $q = P$

wird. Wir können daher auch für die Differenzialgleichungen des dritten Grades die einfacheren Formen auf ähnliche Art darstellen:

$$r = X;\quad r = Y;\quad r = P;\quad r = Q,$$

so daß dieselben nur zwey veränderliche Größen enthalten.

Für den vierten Grad wären demnach die einfachern Formeln

$$s = X;\quad s = Y;\quad s = P;\quad s = Q;\quad s = R;$$

und für den fünften Grad

$$t = X;\quad t = Y;\quad t = P;\quad t = Q;\quad t = R;\quad t = S,$$

und eben so ferner für die höhern Grade.

Allein diese Formen lassen nicht alle auf gleiche Weise die Integration zu, denn manche lassen sich nicht ein einziges Mahl, andere bloß ein Mahl integriren, und bey andern kann man alle Integrationen bis zu der zwischen x und y vorhandenen Relation ausführen, wie dieß jedes Mahl bey den beyden ersten Formeln in jedem Grade der Fall ist. Immer aber hat man die Aufgabe zu lösen, zwischen den beyden Hauptgrößen x und y eine Relation aufzufinden.

Aufgabe 142.

§. 1106. Sey $dy = pdx$, $dp = qdx$, $dq = rdx$, $r = sdx$, $ds = tdx$ ꝛc.; es soll für jeden Grad der Differenzialien eine Gleichung zwischen x und y gefunden werden, wenn eine der Größen p, q, r, s, t... einer Function von x gleich wird, welche wir durch bezeichnen wollen.

Auflösung.

Wenn erstlich $p = X$ ist, so wird man durch Multiplication mit x erhalten $pdx = dy = Xdx$, und daher $y = \int Xdx$, welches n Fall der einfachen Differentialformeln des ersten Grades ist.

Sey zweytens $q = X$, so wird man haben

$$qdx = dp = Xdx, \text{ daher}$$
$$p = \int Xdx \text{ und } pdx = dy = dx\int Xdx, \text{ folglich}$$
$$y = \int dx \int Xdx,$$

er mittelst einfacher Integralien

$$y = x\int Xdx - \int Xxdx.$$

Sey drittens $r = X$, so wird man, weil $dq = rdx$ ist, halten:

$$q = \int Xdx, \text{ und daher}$$
$$p = \int qdx = \int dx \int Xdx = x\int Xdx - \int Xxdx;$$

ndlich also

$$= \int pdx = \int dx \int dx \int Xdx = \tfrac{1}{2}x^2\int Xdx - x\int Xxdx + \tfrac{1}{2}\int Xx^2dx.$$

Viertens sey $s = X$, so findet man

$$y = \int dx \int dx \int dx \int Xdx,$$

elcher Ausdruck endlich in folgende Gleichung aufgelöst wird:

$$= \tfrac{1}{6}x^3\int Xdx - \tfrac{1}{2}x^2\int Xxdx + \tfrac{1}{2}x\int Xx^2dx - \tfrac{1}{6}\int Xx^3dx.$$

Fünftens sey $t = X$, so wird man finden:

$$y = \int dx \int dx \int dx \int dx \int Xdx, \text{ oder}$$
$$= \tfrac{1}{24}x^4\int Xdx - \tfrac{1}{6}x^3\int Xxdx + \tfrac{1}{4}x^2\int Xx^2dx - \tfrac{1}{6}x\int Xx^3dx + \tfrac{1}{24}\int Xx^4dx.$$

Hieraus erhellet das Gesetz für den weitern Fortgang der Rechnung von selbst.

Zusatz 1.

§. 1107. Man erhält demnach eben so viele Integralformeln,

vom wievielſten Grade die Differenzialgleichung iſt, und weil jede derſelben eine willkürliche Conſtante aufnimmt, ſo erſcheinen im Integrale eben ſo viele unveränderliche Größen, wodurch dieſes zum vollſtändigen erhoben wird. Dasſelbe erkennt man auch ſchon an der erſten Form, in welcher eben ſo viele Integralzeichen vorkommen.

Zuſatz 2.

§. 1108. Wird das Element dx als unveränderlich angeſehen, ſo ſtellen ſich die vollſtändigen Integralien der folgenden, nach der gewöhnlichen Bezeichnung ausgedrückten Formeln auf nachſtehende Art dar:

I. Wenn $dy = Xdx$ iſt, ſo wird

$$y = \int Xdx;$$

II. Wenn $d^2y = Xdx^2$ iſt, ſo findet man

$$1.y = x\int Xdx - \int Xxdx;$$

III. Wenn $d^3y = Xdx^3$ iſt, ſo erhält man

$$2.y = x^2\int Xdx - 2x\int Xxdx + \int Xx^2dx;$$

IV. Wenn $d^4y = Xdx^4$ iſt, ſo wird

$$6.y = x^3\int Xdx - 3x^2\int Xxdx + 3x\int Xx^2dx - \int Xx^3dx;$$

V. Wenn $d^5y = Xdx^5$ iſt, ſo wird

$$24.y = x^4\int Xdx - 4x^3\int Xxdx + 6x^2\int Xx^2dx - 4x\int Xx^3dx + \int Xx^4dx;$$

u. ſ. w.

Anmerkung.

§. 1109. Die Formeln aber, welche wir oben an die zweyte Stelle geſetzt haben, und welche die Function y enthalten, laſſen ſich nicht integriren, wenn ſie den zweyten Grad überſteigen. So kann die Formel $r = Y$ aus der dritten Ordnung, obgleich wir wiſſen daß

$$r = \frac{pdq}{dy} = \frac{qdq}{dp} = \frac{dq}{dx}$$

iſt, doch auf keine Weiſe integrirt werden, und daher läßt ſich auch hieraus q nicht durch y beſtimmen. Denn nehmen wir die Form $pdq = Ydy$, wobey $pdp = qdy$ iſt, ſo werden wir wegen $p = \frac{Ydy}{dq}$ finden

$$dp = \frac{dydY}{dq} + Yd.\frac{dy}{dq},$$

d daher durch Elimination von p:

$$\frac{Y\,dy^2\,dY}{dq^2} + \frac{Y^2\,dy}{dq}\,d.\frac{dy}{dq} = q\,dy,$$

lche Gleichung zwar vom zweyten Grade ist, keineswegs aber im gemeinen die Integration zuläßt.

Die Formel $s = Y$ aus der vierten Gattung kann, weil

$$\int s\,dy = p\,r - \tfrac{1}{2}q^2 = \int Y\,dy$$

, zwar ein Mahl integrirt werden, allein dann kann man nicht mehr iter gehen. Jene einfachern Formeln aber, welchen wir oben für en Grad den letzten und vorletzten Platz angewiesen haben, lassen) behandeln, und wir wollen daher versuchen, sie zu integriren.

Aufgabe 143.

§. 1110. Sey, wie bisher, $dy = p\,dx$, $dp = q\,dx$, $[= r\,dx$ ꝛc., und jeder der Buchstaben Y, P, Q, R ll eine Function von der, mit dem gleichnahmigen einen Buchstaben bezeichneten Größe vorstellen; ın bestimme die Integralien folgender einfachen rmeln:

$$p = Y,\quad q = P,\quad r = Q,\quad s = R,\quad t = S,\quad \text{ꝛc.}$$

Auflösung.

Die erste Gleichung gibt, weil $p = \frac{dy}{dx}$ ist, sogleich

$$dx = \frac{dy}{Y},\quad \text{folglich}\quad x = \int\frac{dy}{Y}.$$

Die zweyte Gleichung $q = P$ gibt, weil $q = \frac{dp}{dx}$ ist:

$$dx = \frac{dp}{P}\quad \text{und}\quad dy = \frac{p\,dp}{P},$$

) da P eine Function von p bezeichnet, so wird jede der Veränder- en x und y durch p auf folgende Art bestimmt:

$$x = \int\frac{dp}{P}\quad \text{und}\quad y = \int\frac{p\,dp}{P}.$$

Aus der dritten Gleichung $r = Q$ findet man wegen $r = \frac{dq}{dx}$

$$dx = \frac{dq}{Q},\quad \text{also}\quad q\,dx = dp = \frac{q\,dq}{Q},$$

so daß also

$$x = \int \frac{dq}{Q} \quad \text{und} \quad p = \int \frac{q\,dq}{Q}$$

wird, und hieraus erhalten wir

$$p\,dx = dy = \frac{dq}{Q}\int \frac{q\,dq}{Q}, \quad \text{folglich} \quad y = \int \frac{dq}{Q}\int \frac{q\,dq}{Q}.$$

Es wird demnach jede der Veränderlichen x und y durch dieselbe Variabele q so bestimmt, daß man erhält:

$$x = \int \frac{dq}{Q} \quad \text{und} \quad y = \int \frac{dq}{Q}\int \frac{q\,dq}{Q}.$$

Aus der vierten Gleichung $s = R = \frac{dr}{dx}$ findet man $dx = \frac{dr}{R}$, und hieraus ergibt sich

$$r\,dx = dq = \frac{r\,dr}{R}, \quad \text{also} \quad q = \int \frac{r\,dr}{R}.$$

Die Gleichung $q\,dx = dp$ gibt ferner

$$dp = \frac{dr}{R}\int \frac{r\,dr}{R}, \quad \text{also} \quad p = \int \frac{dr}{R}\int \frac{r\,dr}{R},$$

und weil $p\,dx = dy$ ist, so werden wir erhalten:

$$dy = \frac{dr}{R}\int \frac{dr}{R}\int \frac{r\,dr}{R},$$

und demnach finden wir die beyden Hauptgrößen x und y durch r ausgedrückt, mittelst der Gleichungen

$$x = \int \frac{dr}{R} \quad \text{und} \quad y = \int \frac{dr}{R}\int \frac{dr}{R}\int \frac{r\,dr}{R}.$$

Wird die fünfte Gleichung $t = S$ auf dieselbe Art behandelt, so findet man

$$x = \int \frac{ds}{S} \quad \text{und} \quad y = \int \frac{ds}{S}\int \frac{ds}{S}\int \frac{ds}{S}\int \frac{s\,ds}{S};$$

und so kann man nun ohne Anstand weiter fortfahren.

Zusatz 1.

§. 1111. Aus der zweyten Formel sieht man, daß, was zwar für sich klar ist, $y = \int p\,dP = Pp - \int P\,dp$ werde, wenn x eine Function von p bezeichnet, so daß $x = P$ ist.

Zusatz 2.

§. 1112. Ist aber $x = Q$, also $dx = dQ$, so wird man finden:

$$q\,dx = dp = q\,dQ \quad \text{und} \quad p = \int q\,dQ, \quad \text{und daher}$$

$$y = \int dQ \int q\,dQ \quad \text{oder} \quad y = Q\int q\,dQ - \int qQ\,dQ;$$

ier, da auch $y = \int dQ\,(qQ - \int Q\,dq)$ ist:

$$y = \tfrac{1}{2}qQ^2 + \tfrac{1}{2}\int Q^2\,dq - Q\int Q\,dq,$$

ier endlich

$$2y = Q^2 q - 2Q\int Q\,dq + \int Q^2\,dq.$$

Zusatz 3.

§. 1113. Auf ähnliche Art wird, wenn $x = R$ ist:

$$q = \int r\,dx = \int r\,dR, \quad p = \int q\,dx = \int dR \int r\,dR \quad \text{und}$$

$$y = \int p\,dx = \int dR \int dR \int r\,dR,$$

er nach dem vorhergehenden Zusatze:

$$2y = \int dR\,(R^2 r - 2R\int R\,dr + \int R^2\,dr);$$

glich durch ähnliche Reductionen:

$$6y = R^3 r - 3R^2\int R\,dr + 3R\int R^2\,dr - \int R^3\,dr.$$

Zusatz 4.

§. 1114. Ist aber $x = S$, so wird man durch ähnliche Reductionen erhalten:

$$y = S^4 s - 4S^3\int S\,ds + 6S^2\int S^2\,ds - 4S\int S^3\,ds + \int S^4\,ds,$$

daher, wenn man mittelst wiederholter Differenziation zurückgeht:

$$dS = 4S^3 s\,dS - 12S^2\,dS\int S\,ds + 12S\,dS\int S^2 ds - 4\,dS\int S^3 ds,$$

$$6p = S^3 s - 3S^2\int S\,ds + 3S\int S^2\,ds - \int S^3\,ds \quad \text{und}$$

$$2q = S^2 s - 2S\int S\,ds + \int S^2\,ds;$$

n aber ist

$$r = Ss - \int S\,ds \quad \text{und} \quad s = R^2.$$

Aufgabe 144.

§. 1115. Die bisher gebrauchten Bezeichnungen alte man bey, und suche die Integralien folgen einfacheren Formeln:

$$q = Y; \quad r = P; \quad s = Q; \quad t = R; \quad \text{etc.}$$

Auflösung.

Für die erste Formel $q = Y$ erhält man $q = \frac{p\,dp}{dy}$; es ist nach

$pdp = Ydy$ und $p^2 = 2\int Ydy$, also

$p = \sqrt{2\int Ydy} = \frac{dy}{dx}$, folglich iſt

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{2\int Ydy}};$$

wodurch man eine Gleichung zwiſchen x und y erhält.

Für die zweyte Formel $r = P$ werden wir, weil $r = \frac{qdq}{dp}$ iſt, finden:

$qdq = Pdp$ und $q = \sqrt{2\int Pdp} = \frac{pdp}{dy} = \frac{dp}{dx}$,

und hieraus folgern wir

$$x = \int \frac{dp}{\sqrt{2\int Pdp}} \text{ und } y = \int \frac{pdp}{\sqrt{2\int Pdp}}.$$

Für die dritte Formel $s = Q$ wird, da $s = \frac{rdr}{dq}$ iſt:

$r = \sqrt{2\int Qdq} = \frac{qdq}{dp}$, folglich

$$p = \int \frac{qdq}{\sqrt{2\int Qdq}}.$$

Da aber $r = \frac{dq}{dx}$ iſt, ſo wird $dx = \frac{dq}{\sqrt{2\int Qdq}}$ ſeyn, und wegen $pdx = dy$ werden wir erhalten:

$$x = \int \frac{dq}{\sqrt{2\int dQq}} \text{ und } y = \int \frac{dq}{\sqrt{2\int Qdq}} \int \frac{qdq}{\sqrt{2\int Qdq}}.$$

Für die vierte Form $t = R$ erhalten wir, weil $t = \frac{sds}{dr}$ iſt, die Gleichung $s = \sqrt{2\int Rdr}$; es iſt aber $s = \frac{dr}{dx}$, und daher wird $dx = \frac{dr}{\sqrt{2\int Rdr}}$; weil aber auch $s = \frac{rdr}{dq}$ iſt, ſo finden wir $q = \int \frac{rdr}{\sqrt{2\int Rdr}}$, und da $p = \int qdx$ iſt, ſo wird

$$p = \int \frac{dr}{\sqrt{2\int Rdr}} \int \frac{rdr}{\sqrt{2\int Rdr}},$$

woraus $y = \int pdx$ gefunden wird. Es werden demnach x und y durch r ſo beſtimmt, daß

$$x = \int \frac{dr}{\sqrt{2\int Rdr}} \text{ wird,}$$

und

$$y = \int \frac{dr}{\sqrt{2\int R dr}} \int \frac{dr}{\sqrt{2\int R dr}} \int \frac{rdr}{\sqrt{2\int R dr}}.$$

Für die fünfte Formel $u = S$ erhalten wir, weil $u = \frac{tdt}{ds}$ ist:

$$t = \sqrt{2\int S ds} = \frac{ds}{dx}, \text{ also } dx = \frac{ds}{\sqrt{2\int S ds}}.$$

Es ist aber auch

$$t = \frac{sds}{dr}; \text{ also } r = \int \frac{sds}{\sqrt{2\int S ds}}; \text{ ferner}$$

$$q = \int r dx, \quad p = \int q dx, \quad y = \int p dx,$$

und hieraus finden wir demnach

$$x = \int \frac{ds}{\sqrt{2\int S ds}} \text{ und}$$

$$y = \int \frac{ds}{\sqrt{2\int S ds}} \int \frac{ds}{\sqrt{2\int S ds}} \int \frac{ds}{\sqrt{2\int S ds}} \int \frac{sds}{\sqrt{2\int S ds}}.$$

Anmerkung.

§. 1116. Dieß sind die Fälle, in welchen man die oben aufgezählten einfachern Formeln integriren kann, und ich kenne keine Methode, nach welcher sich die übrigen behandeln ließen. Weit seltener noch sind die auflösbaren Fälle bey noch zusammengesetzteren Formen, bey welchen der Quotient $\frac{d^n y}{dx^n}$ einer Function zweyer oder mehrerer veränderlichen Größen gleich ist, und wegen der Beschränktheit dieser Materie können wir diesem Abschnitte nur noch einige wenige Lehren beyfügen. Die allgemeine Form der Gleichungen aber, welche sich nach den bisher gefundenen Methoden behandeln lassen, ist folgende:

$$Ay + B \cdot \frac{dy}{dx} + C \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} + D \cdot \frac{d^3 y}{dx^3} + \ldots = 0,$$

wobey das Element dx als constant betrachtet ist, und welche, wenn

$$dy = pdx, \quad dp = qdx, \quad dq = rdx, \text{ etc.}$$

gesetzt wird, auch auf folgende Art dargestellt werden kann:

$$Ay + Bp + Cq + Dr + Es + \ldots = 0.$$

Es sind ferner aber auch jene Gleichungen auflösbar, welche enthalten sind unter der allgemeineren Form

$$Ay + Bp + Cq + Dr + Es + \ldots = X,$$

wo X eine beliebige Function von x bezeichnet

Es können ferner auch die nachstehenden Formen, welche sich übrigens auf die vorhergehenden reduciren lassen, integrabel gemacht werden:

$$Ay + \frac{Bp}{x} + \frac{Cq}{x^2} + \frac{Dr}{x^3} + \frac{Es}{x^4} + \ldots = o,$$

und

$$Ay + \frac{Bp}{x} + \frac{Cq}{x^2} + \frac{Dr}{x^3} + \frac{Es}{x^4} + \ldots = X,$$

deren Auflösung sogar gelingt, bis zu welchem Grade sich auch die Differenzialien erstrecken mögen.

Mit der Entwickelung dieser Gleichungen wollen wir uns nun beschäftigen.

Kapitel II.

Von der Auflösung der Differenzialgleichungen von der Form $Ay + B \cdot \frac{dy}{dx} + C \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + D \cdot \frac{d^3y}{dx^3} + E \cdot \frac{d^4y}{dx^4} + \ldots = 0$, bey welchen das Element dx constant genommen ist.

Aufgabe 145.

§. 1117. Man suche das vollständige Integrale der Differenzialgleichung des dritten Grades:

$$Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} + D\frac{d^3y}{dx^3} = 0,$$

bey welcher das Element dx constant genommen ist.

Auflösung.

Da die Coefficienten A, B, C, D constante Größen bezeichnen, so fällt bey einiger Aufmerksamkeit von selbst in die Augen, daß die Formel $y = e^{\lambda x}$ unserer Gleichung Genüge leiste; denn hieraus ergibt sich:

$$\frac{dy}{dx} = \lambda e^{\lambda x}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \lambda^2 e^{\lambda x}; \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \lambda^3 e^{\lambda x}.$$

Substituirt man nun diese Werthe, und dividirt die Gleichung durch $e^{\lambda x}$, so erhält man:

$$A + \lambda B + \lambda^2 C + \lambda^3 D = 0,$$

woraus der Exponent λ bestimmt werden kann; und da dieser drey Werthe erhält, welche wir mit α, β, γ bezeichnen wollen, so erhalten wir die drey Formeln

$$y = e^{\alpha x}, \quad y = e^{\beta x}, \quad y = e^{\gamma x},$$

welche unserer Gleichung Genüge leisten.

Es erhellt aber aus der Natur der vorgelegten Gleichung, daß, wenn ihr die Werthe $y = P$, $y = Q$ und $y = R$ Genüge leisten, auch durch eine beliebige Verbindung dieser Werthe der Ausdruck

$$y = \mathfrak{A}P + \mathfrak{B}Q + \mathfrak{C}R$$

zum Ziele führen werde. Wir erhalten demnach aus den drey gefun-

denen Formeln folgenden ganz allgemeinen Ausdruck, der der t legten Gleichung eben so gut Genüge leistet:

$$y = \mathfrak{A}e^{\alpha x} + \mathfrak{B}e^{\beta x} + \mathfrak{C}e^{\gamma x};$$

und da diese Form die drey willkürlichen Constanten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ hält, so wird sie in der That das vollständige Integrale unsere gelegten Gleichung darstellen.

Zusatz 1.

§. 1118. Das vollständige Integrale besteht also aus so Theilen, wie viele Wurzeln oder Factoren die Gleichung

$$A + B\lambda + C\lambda^2 + D\lambda^3 = 0$$

hat. Ist $a+\lambda$ ein Factor der Gleichung, so wird e^{-ax} de sprechende Theil des Integrales seyn.

Zusatz 2.

§. 1119. Es wird nämlich dieser Theil das Integral Gleichung

$$ay + \frac{dy}{dx} = 0$$

seyn. Wenn daher

$$A + B\lambda + C\lambda^2 + D\lambda^3 = (a+\lambda)(b+\lambda)(c+$$

ist, so bestimme man die Werthe von y aus den einfachen Gleich

$$ay + \frac{dy}{dx} = 0, \quad by + \frac{dy}{dx} = 0, \quad cy + \frac{dy}{dx} = 0,$$

und wenn diese $y=P$, $y=Q$, $y=R$ sind, so wird das Int der vorgelegten Gleichung seyn:

$$y = \mathfrak{A}P + \mathfrak{B}Q + \mathfrak{C}R.$$

Zusatz 3.

§. 1120. Wenn zwey Wurzeln einander gleich sind, $\beta=\alpha$, so betrachte man die Differenz derselben als eine vers dende Größe, indem man $\beta=\alpha+\omega$ setzt, und weil dann

$$e^{\beta x} = e^{\alpha x} \cdot e^{\omega x} = e^{\alpha x}(1+\omega x)$$

ist, so ist einleuchtend, daß man statt $\mathfrak{A}e^{\alpha x} + \mathfrak{B}e^{\beta x}$ schreiben

$$\mathfrak{A}e^{\alpha x} + \mathfrak{B}e^{\alpha x}x = e^{\alpha x}(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}x);$$

und wenn alle drey Wurzeln einander gleich sind, nämlich $\alpha=$

daß man die Gleichung

$$y + \frac{3\,dy}{a\,dx} + \frac{3\,d^2y}{a^2\,dx^2} + \frac{d^3y}{a^3\,dx^3} = 0$$

so wird, wegen $\alpha = \beta = \gamma = -a$, das vollständige Integrale

$$e^{-ax}\,(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2).$$

Zusatz 4.

§. 1121. Werden zwey Wurzeln imaginär, so daß

$$\alpha = \mu + \nu\sqrt{-1} \quad \text{und} \quad \beta = \mu - \nu\sqrt{-1}$$

so muß man statt $\mathfrak{A}e^{\alpha x} + \mathfrak{B}e^{\beta x}$ schreiben:

$$e^{\mu x}\,(\mathfrak{A}e^{\nu x\sqrt{-1}} + \mathfrak{B}e^{-\nu x\sqrt{-1}}),$$

dieser Ausdruck auf folgende Form zurückgeführt wird:

$$e^{\mu x}\,(\mathfrak{A}\cos.\,\nu x + \mathfrak{B}\sin.\,\nu x).$$

Anmerkung 1.

§. 1122. Erfordert gleichwohl die vorgelegte Gleichung eine zyfache Integration, bevor man zu einer endlichen Gleichung zwischen und y gelangt, so sind wir dennoch durch eine einzige, einer Integration nicht einmahl ähnlich sehenden Operation zu diesem Ziele gelangt. Wir haben nämlich gleichsam durch ein glückliches Errathen die Formel gefunden, welche eine particuläre Auflösung unserer Gleichung darboth, und haben dadurch drey solche Formeln zugleich gefunden. Ferner hat uns die Natur der Gleichung selbst belehrt, daß, wenn die einzelnen Werthe $y = P$, $y = Q$, $y = R$ Genüge leisten, auch die aus ihnen zusammengesetzte Formel $y = \mathfrak{A}P + \mathfrak{B}Q + \mathfrak{C}R$ genüge leisten müsse, und wäre dieß nicht bequem geschehen, so hätten wir auch aus diesen drey Werthen nichts weiter folgern können.

Nach diesem Princip wird man also im Allgemeinen solche Differenzialgleichungen, von welchem Grade sie auch seyn mögen, gleichfalls durch eine einzige Operation so auflösen können, daß man sogar das vollständige Integrale derselben erhält.

Anmerkung 2.

§. 1123. Weil man die Differenzialgleichung des dritten Grades

$$Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} + D\frac{d^3y}{dx^3} = 0$$

vom wievielſten Grade die Differenzialgleichung iſt, und weil jede derſelben eine willkürliche Conſtante aufnimmt, ſo erſcheinen im Integrale eben ſo viele unveränderliche Größen, wodurch dieſes zum vollſtändigen erhoben wird. Dasſelbe erkennt man auch ſchon an der erſten Form, in welcher eben ſo viele Integralzeichen vorkommen.

Zuſatz 2.

§. 1108. Wird das Element dx als unveränderlich angeſehen, ſo ſtellen ſich die vollſtändigen Integralien der folgenden, nach der gewöhnlichen Bezeichnung ausgedrückten Formeln auf nachſtehende Art dar:

I. Wenn $dy = Xdx$ iſt, ſo wird

$$y = \int Xdx;$$

II. Wenn $d^2y = Xdx^2$ iſt, ſo findet man

$$1.y = x\int Xdx - \int Xxdx;$$

III. Wenn $d^3y = Xdx^3$ iſt, ſo erhält man

$$2.y = x^2\int Xdx - 2x\int Xxdx + \int Xx^2dx;$$

IV. Wenn $d^4y = Xdx^4$ iſt, ſo wird

$$6.y = x^3\int Xdx - 3x^2\int Xxdx + 3x\int Xx^2dx - \int Xx^3dx;$$

V. Wenn $d^5y = Xdx^5$ iſt, ſo wird

$$24.y = x^4\int Xdx - 4x^3\int Xxdx + 6x^2\int Xx^2dx - 4x\int Xx^3dx + \int Xx^4dx;$$

u. ſ. w.

Anmerkung.

§. 1109. Die Formeln aber, welche wir oben an die zweyte Stelle geſetzt haben, und welche die Function y enthalten, laſſen ſich nicht integriren, wenn ſie den zweyten Grad überſteigen. So kann die Formel $r = Y$ aus der dritten Ordnung, obgleich wir wiſſen daß

$$r = \frac{pdq}{dy} = \frac{qdq}{dp} = \frac{dq}{dx}$$

iſt, doch auf keine Weiſe integrirt werden, und daher läßt ſich auch hieraus q nicht durch y beſtimmen. Denn nehmen wir die Form $pdq = Ydy$, wobey $pdp = qdy$ iſt, ſo werden wir wegen $p = \frac{Ydy}{dq}$ finden

$$dp = \frac{dydY}{dq} + Yd.\frac{dy}{dq},$$

ıd daher durch Elimination von p:

$$\frac{Y\,dy^2\,dY}{dq^2} + \frac{Y^2\,dy}{dq}\,d\cdot\frac{dy}{dq} = q\,dy,$$

elche Gleichung zwar vom zweyten Grade ist, keineswegs aber im lgemeinen die Integration zuläßt.

Die Formel $s = Y$ aus der vierten Gattung kann, weil

$$\int s\,dy = p\,r - \tfrac{1}{2}q^2 = \int Y\,dy$$

, zwar ein Mahl integrirt werden, allein dann kann man nicht mehr eiter gehen. Jene einfachern Formeln aber, welchen wir oben für ›en Grad den letzten und vorletzten Platz angewiesen haben, lassen h behandeln, und wir wollen daher versuchen, sie zu integriren.

Aufgabe 143.

§. 1110. Sey, wie bisher, $dy = p\,dx$, $dp = q\,dx$, $q = r\,dx$ ꝛc., und jeder der Buchstaben Y, P, Q, R ll eine Function von der, mit dem gleichnahmigen einen Buchstaben bezeichneten Größe vorstellen; an bestimme die Integralien folgender einfachen ›rmeln:

$$p = Y,\quad q = P,\quad r = Q,\quad s = R,\quad t = S,\quad \text{ꝛc.}$$

Auflösung.

Die erste Gleichung gibt, weil $p = \frac{dy}{dx}$ ist, sogleich

$$dx = \frac{dy}{Y},\quad \text{folglich}\quad x = \int\frac{dy}{Y}.$$

Die zweyte Gleichung $q = P$ gibt, weil $q = \frac{dp}{dx}$ ist:

$$dx = \frac{dp}{P}\quad\text{und}\quad dy = \frac{p\,dp}{P},$$

› da P eine Function von p bezeichnet, so wird jede der Veränder›en x und y durch p auf folgende Art bestimmt:

$$x = \int\frac{dp}{P}\quad\text{und}\quad y = \int\frac{p\,dp}{P}.$$

Aus der dritten Gleichung $r = Q$ findet man wegen $r = \frac{dq}{dx}$

$$dx = \frac{dq}{Q},\quad\text{also}\quad q\,dx = dp = \frac{q\,dq}{Q},$$

so daß also

$$x = \int \frac{dq}{Q} \quad \text{und} \quad p = \int \frac{q\,dq}{Q}$$

wird, und hieraus erhalten wir

$$p\,dx = dy = \frac{dq}{Q}\int \frac{q\,dq}{Q}, \quad \text{folglich} \quad y = \int \frac{dq}{Q}\int \frac{q\,dq}{Q}.$$

Es wird demnach jede der Veränderlichen x und y durch dieselbe Variabele q so bestimmt, daß man erhält:

$$x = \int \frac{dq}{Q} \quad \text{und} \quad y = \int \frac{dq}{Q}\int \frac{q\,dq}{Q}.$$

Aus der vierten Gleichung $s = R = \frac{dr}{dx}$ findet man $dx = \frac{dr}{R}$, und hieraus ergibt sich

$$r\,dx = dq = \frac{r\,dr}{R}, \quad \text{also} \quad q = \int \frac{r\,dr}{R}.$$

Die Gleichung $q\,dx = dp$ gibt ferner

$$dp = \frac{dr}{R}\int \frac{r\,dr}{R}, \quad \text{also} \quad p = \int \frac{dr}{R}\int \frac{r\,dr}{R},$$

und weil $p\,dx = dy$ ist, so werden wir erhalten:

$$dy = \frac{dr}{R}\int \frac{dr}{R}\int \frac{r\,dr}{R},$$

und demnach finden wir die beyden Hauptgrößen x und y durch r ausgedrückt, mittelst der Gleichungen

$$x = \int \frac{dr}{R} \quad \text{und} \quad y = \int \frac{dr}{R}\int \frac{dr}{R}\int \frac{r\,dr}{R}.$$

Wird die fünfte Gleichung $t = S$ auf dieselbe Art behandelt, so findet man

$$x = \int \frac{ds}{S} \quad \text{und} \quad y = \int \frac{ds}{S}\int \frac{ds}{S}\int \frac{ds}{S}\int \frac{s\,ds}{S};$$

und so kann man nun ohne Anstand weiter fortfahren.

Zusatz 1.

§. 1111. Aus der zweyten Formel sieht man, daß, was zwar für sich klar ist, $y = \int p\,dP = Pp - \int P\,dp$ werde, wenn x eine Function von p bezeichnet, so daß $x = P$ ist.

Zusatz 2.

§. 1112. Ist aber $x = Q$, also $dx = dQ$, so wird man finden:

$qdx = dp = qdQ$ und $p = \int qdQ$, und daher

$$y = \int dQ \int qdQ \text{ oder } y = Q\int qdQ - \int qQdQ;$$

oder, da auch $y = \int dQ\,(qQ - \int Qdq)$ ist:

$$y = \tfrac{1}{2}qQ^2 + \tfrac{1}{2}\int Q^2 dq - Q\int Qdq,$$

oder endlich

$$2y = Q^2 q - 2Q\int Qdq + \int Q^2 dq.$$

Zusatz 3.

§. 1113. Auf ähnliche Art wird, wenn $x = R$ ist:

$$q = \int rdx = \int rdR, \quad p = \int qdx = \int dR \int rdR \text{ und}$$
$$y = \int pdx = \int dR \int dR \int rdR,$$

oder nach dem vorhergehenden Zusatze:

$$2y = \int dR\,(R^2 r - 2R\int Rdr + \int R^2 dr);$$

folglich durch ähnliche Reductionen:

$$6y = R^3 r - 3R^2 \int Rdr + 3R\int R^2 dr - \int R^3 dr.$$

Zusatz 4.

§. 1114. Ist aber $x = S$, so wird man durch ähnliche Reductionen erhalten:

$$4y = S^4 s - 4S^3 \int Sds + 6S^2 \int S^2 ds - 4S\int S^3 ds + \int S^4 ds,$$

und daher, wenn man mittelst wiederholter Differenziation zurückgeht:

$$4pdS = 4S^3 sdS - 12S^2 dS \int Sds + 12SdS\int S^2 ds - 4dS\int S^3 ds,$$

oder

$$6p = S^3 s - 3S^2 \int Sds + 3S\int S^2 ds - \int S^3 ds \text{ und}$$
$$2q = S^2 s - 2S\int Sds + \int S^2 ds;$$

dann aber ist

$$r = Ss - \int Sds \text{ und } s = R^2.$$

Aufgabe 144.

§. 1115. Die bisher gebrauchten Bezeichnungen behalte man bey, und suche die Integralien folgender einfacheren Formeln:

$$q = Y; \quad r = P; \quad s = Q; \quad t = R; \text{ ꝛc.}$$

Auflösung.

Für die erste Formel $q = Y$ erhält man $q = \frac{pdp}{dy}$; es ist demnach

$pdp = Ydy$ und $p^2 = 2\int Ydy$, also

$$p = \sqrt{2\int Ydy} = \frac{dy}{dx}, \text{ folglich ist}$$

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{2\int Ydy}};$$

wodurch man eine Gleichung zwiſchen x und y erhält.

Für die zweyte Formel $r = P$ werden wir, weil $r = \frac{qdq}{dp}$ iſt, finden:

$qdq = Pdp$ und $q = \sqrt{2\int Pdp} = \frac{pdp}{dy} = \frac{dp}{dx}$,

und hieraus folgern wir

$$x = \int \frac{dp}{\sqrt{2\int Pdp}} \text{ und } y = \int \frac{pdp}{\sqrt{2\int Pdp}}.$$

Für die dritte Formel $s = Q$ wird, da $s = \frac{rdr}{dq}$ iſt:

$$r = \sqrt{2\int Qdq} = \frac{qdq}{dp}, \text{ folglich}$$

$$p = \int \frac{qdq}{\sqrt{2\int Qdq}}.$$

Da aber $r = \frac{dq}{dx}$ iſt, ſo wird $dx = \frac{dq}{\sqrt{2\int Qdq}}$ ſeyn, und wegen $pdx = dy$ werden wir erhalten:

$$x = \int \frac{dq}{\sqrt{2\int dQq}} \text{ und } y = \int \frac{dq}{\sqrt{2\int Qdq}} \int \frac{qdq}{\sqrt{2\int Qdq}}.$$

Für die vierte Form $t = R$ erhalten wir, weil $t = \frac{sds}{dr}$ iſt, die Gleichung $s = \sqrt{2\int Rdr}$; es iſt aber $s = \frac{dr}{dx}$, und daher wird $dx = \frac{dr}{\sqrt{2\int Rdr}}$; weil aber auch $s = \frac{rdr}{dq}$ iſt, ſo finden wir $q = \int \frac{rdr}{\sqrt{2\int Rdr}}$, und da $p = \int qdx$ iſt, ſo wird

$$p = \int \frac{dr}{\sqrt{2\int Rdr}} \int \frac{rdr}{\sqrt{2\int Rdr}},$$

woraus $y = \int pdx$ gefunden wird. Es werden demnach x und y durch r ſo beſtimmt, daß

$$x = \int \frac{dr}{\sqrt{2\int Rdr}} \text{ wird,}$$

$$y = \int \frac{dr}{\sqrt{2\int R dr}} \int \frac{dr}{\sqrt{2\int R dr}} \int \frac{r dr}{\sqrt{2\int R dr}}.$$

Für die fünfte Formel $u = S$, erhalten wir, weil $u = \frac{t dt}{ds}$ ist:

$$t = \sqrt{2\int S ds} = \frac{ds}{dx}, \text{ also } dx = \frac{ds}{\sqrt{2\int S ds}}.$$

Es ist aber auch

$$t = \frac{s ds}{dr}; \text{ also } r = \int \frac{s ds}{\sqrt{2\int S ds}}; \text{ ferner}$$

$$q = \int r dx, \quad p = \int q dx, \quad y = \int p dx,$$

ıd hieraus finden wir demnach

$$x = \int \frac{ds}{\sqrt{2\int S ds}} \text{ und}$$

$$y = \int \frac{ds}{\sqrt{2\int S ds}} \int \frac{ds}{\sqrt{2\int S ds}} \int \frac{ds}{\sqrt{2\int S ds}} \int \frac{s ds}{\sqrt{2\int S ds}}.$$

Anmerkung.

§. 1116. Dieß sind die Fälle, in welchen man die oben aufgezählten einfachern Formeln integriren kann, und ich kenne keine Methode, nach welcher sich die übrigen behandeln ließen. Weit seltener noch sind die auflösbaren Fälle bey noch zusammengesetzteren Formen, bey welchen der Quotient $\frac{d^n y}{dx^n}$ einer Function zweyer oder mehrerer veränderlichen Größen gleich ist, und wegen der Beschränktheit dieser Materie können wir diesem Abschnitte nur noch einige wenige Lehren beyfügen. Die allgemeine Form der Gleichungen aber, welche sich nach den bisher gefundenen Methoden behandeln lassen, ist folgende:

$$Ay + B \cdot \frac{dy}{dx} + C \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + D \cdot \frac{d^3y}{dx^3} + \ldots = 0,$$

wobey das Element dx als constant betrachtet ist, und welche, wenn

$$dy = p dx, \quad dp = q dx, \quad dq = r dx, \text{ etc.}$$

gesetzt wird, auch auf folgende Art dargestellt werden kann:

$$Ay + Bp + Cq + Dr + Es + \ldots = 0.$$

Es sind ferner aber auch jene Gleichungen auflösbar, welche enthalten sind unter der allgemeineren Form

$$Ay + Bp + Cq + Dr + Es + \ldots = X,$$

wo X eine beliebige Function von x bezeichnet

Es können ferner auch die nachstehenden Formen, welche sich übrigens auf die vorhergehenden reduciren lassen, integrabel gemacht werden:

$$Ay + \frac{Bp}{x} + \frac{Cq}{x^2} + \frac{Dr}{x^3} + \frac{Es}{x^4} + \ldots = o,$$

und

$$Ay + \frac{Bp}{x} + \frac{Cq}{x^2} + \frac{Dr}{x^3} + \frac{Es}{x^4} + \ldots = X,$$

deren Auflösung sogar gelingt, bis zu welchem Grade sich auch die Differenzialien erstrecken mögen.

Mit der Entwickelung dieser Gleichungen wollen wir uns nun beschäftigen.

Kapitel II.

Von der Auflösung der Differenzialgleichungen von der Form

$$y + B \cdot \frac{dy}{dx} + C \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + D \cdot \frac{d^3y}{dx^3} + E \cdot \frac{d^4y}{dx^4} + \ldots = 0,$$

bey welchen das Element dx constant genommen ist.

Aufgabe 145.

§. 1117. Man suche das vollständige Integrale der Differenzialgleichung des dritten Grades:

$$Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} + D\frac{d^3y}{dx^3} = 0,$$

bey welcher das Element dx constant genommen ist.

Auflösung.

Da die Coefficienten A, B, C, D constante Größen bezeichnen, so fällt bey einiger Aufmerksamkeit von selbst in die Augen, daß die Formel $y = e^{\lambda x}$ unserer Gleichung Genüge leiste; denn hieraus ergibt sich:

$$\frac{dy}{dx} = \lambda e^{\lambda x}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \lambda^2 e^{\lambda x}; \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \lambda^3 e^{\lambda x}.$$

Substituirt man nun diese Werthe, und dividirt die Gleichung durch $e^{\lambda x}$, so erhält man:

$$A + \lambda B + \lambda^2 C + \lambda^3 D = 0,$$

woraus der Exponent λ bestimmt werden kann; und da dieser drey Werthe erhält, welche wir mit α, β, γ bezeichnen wollen, so erhalten wir die drey Formeln

$$y = e^{\alpha x}, \quad y = e^{\beta x}, \quad y = e^{\gamma x},$$

welche unserer Gleichung Genüge leisten.

Es erhellt aber aus der Natur der vorgelegten Gleichung, daß, wenn ihr die Werthe $y = P$, $y = Q$ und $y = R$ Genüge leisten, auch durch eine beliebige Verbindung dieser Werthe der Ausdruck

$$y = \mathfrak{A}P + \mathfrak{B}Q + \mathfrak{C}R$$

zum Ziele führen werde. Wir erhalten demnach aus den drey gefun-

denen Formeln folgenden ganz allgemeinen Ausdruck, der der v legten Gleichung eben so gut Genüge leistet:

$$y = \mathfrak{A}e^{\alpha x} + \mathfrak{B}e^{\beta x} + \mathfrak{C}e^{\gamma x};$$

und da diese Form die drey willkürlichen Constanten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ hält, so wird sie in der That das vollständige Integrale unserer gelegten Gleichung darstellen.

Zusatz 1.

§. 1118. Das vollständige Integrale besteht also aus so Theilen, wie viele Wurzeln oder Factoren die Gleichung

$$A + B\lambda + C\lambda^2 + D\lambda^3 = 0$$

hat. Ist $a+\lambda$ ein Factor der Gleichung, so wird e^{-ax} der sprechende Theil des Integrales seyn.

Zusatz 2.

§. 1119. Es wird nämlich dieser Theil das Integrale Gleichung

$$ay + \frac{dy}{dx} = 0$$

seyn. Wenn daher

$$A + B\lambda + C\lambda^2 + D\lambda^3 = (a+\lambda)(b+\lambda)(c+\lambda$$

ist, so bestimme man die Werthe von y aus den einfachen Gleichu

$$ay + \frac{dy}{dx} = 0, \quad by + \frac{dy}{dx} = 0, \quad cy + \frac{dy}{dx} = 0,$$

und wenn diese $y=P$, $y=Q$, $y=R$ sind, so wird das Inte der vorgelegten Gleichung seyn:

$$y = \mathfrak{A}P + \mathfrak{B}Q + \mathfrak{C}R.$$

Zusatz 3.

§. 1120. Wenn zwey Wurzeln einander gleich sind, $\beta=\alpha$, so betrachte man die Differenz derselben als eine versch dende Größe, indem man $\beta=\alpha+\omega$ setzt, und weil dann

$$e^{\beta x} = e^{\alpha x} \cdot e^{\omega x} = e^{\alpha x}(1+\omega x)$$

ist, so ist einleuchtend, daß man statt $\mathfrak{A}e^{\alpha x} + \mathfrak{B}e^{\beta x}$ schreiben m

$$\mathfrak{A}e^{\alpha x} + \mathfrak{B}e^{\alpha x}x = e^{\alpha x}(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}x);$$

und wenn alle drey Wurzeln einander gleich sind, nämlich $\alpha=\beta$

daß man die Gleichung

$$y + \frac{3\,dy}{a\,dx} + \frac{3\,d^2y}{a^2\,dx^2} + \frac{d^3y}{a^3\,dx^3} = 0$$

ist, so wird, wegen $\alpha = \beta = \gamma = -a$, das vollständige Integrale
gn:

$$e^{-ax}\,(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2).$$

Zusatz 4.

§. 1121. Werden zwey Wurzeln imaginär, so daß

$$\alpha = \mu + \nu\sqrt{-1} \quad \text{und} \quad \beta = \mu - \nu\sqrt{-1}$$

ist, so muß man statt $\mathfrak{A}\,e^{\alpha x} + \mathfrak{B}\,e^{\beta x}$ schreiben:

$$e^{\mu x}\,(\mathfrak{A}\,e^{\nu x\sqrt{-1}} + \mathfrak{B}\,e^{-\nu x\sqrt{-1}}),$$

welcher Ausdruck auf folgende Form zurückgeführt wird:

$$e^{\mu x}\,(\mathfrak{A}\cos.\,\nu x + \mathfrak{B}\sin.\,\nu x).$$

Anmerkung 1.

§. 1122. Erfordert gleichwohl die vorgelegte Gleichung eine
einfache Integration, bevor man zu einer endlichen Gleichung zwischen
und y gelangt, so sind wir dennoch durch eine einzige, einer Inte-
gration nicht einmahl ähnlich sehenden Operation zu diesem Ziele ge-
langt. Wir haben nämlich gleichsam durch ein glückliches Errathen
die Formel gefunden, welche eine particuläre Auflösung unserer Glei-
chung darboth, und haben dadurch drey solche Formeln zugleich ge-
funden. Ferner hat uns die Natur der Gleichung selbst belehrt, daß,
wenn die einzelnen Werthe $y = P$, $y = Q$, $y = R$ Genüge leisten,
auch die aus ihnen zusammengesetzte Formel $y = \mathfrak{A}P + \mathfrak{B}Q + \mathfrak{C}R$
Genüge leisten müsse, und wäre dieß nicht bequem geschehen, so hätten
wir auch aus diesen drey Werthen nichts weiter folgern können.

Nach diesem Princip wird man also im Allgemeinen solche Dif-
ferenzialgleichungen, von welchem Grade sie auch seyn mögen, gleich-
falls durch eine einzige Operation so auflösen können, daß man sogar
alle vollständige Integrale derselben erhält.

Anmerkung 2.

§. 1123. Weil man die Differenzialgleichung des dritten Grades

$$Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} + D\frac{d^3y}{dx^3} = 0$$

im Allgemeinen auflösen konnte, so daß das vollständige Integrale d
selben gegeben wird durch die Formel

$$y = \mathfrak{A}e^{\alpha x} + \mathfrak{B}e^{\beta x} + \mathfrak{C}e^{\gamma x},$$

bey welcher die Größen α, β, γ die Wurzeln der kubischen Gleichu

$$A + B\lambda + C\lambda^2 + D\lambda^3 = 0$$

bezeichnen, so werden wir hievon auch bey andern Gleichungen, w
welche sich jene zurückführen läßt, eine nützliche Anwendung mach
können.

Zuerst aber läßt sich jene Gleichung durch Hülfe der Substitut
$y = e^{\int u dx}$ auf eine Differenzialgleichung des zweyten Grades re
ciren, denn man erhält:

$$\frac{dy}{dx} = e^{\int u dx} u; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = e^{\int u dx}\left(\frac{du}{dx} + u^2\right) \text{ und}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = e^{\int u dx}\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{3udu}{dx} + u^3\right),$$

so daß man durch Division mit $e^{\int u dx}$ folgende transformirte Gleichu
findet:

$$A + Bu + Cu^2 + Du^3 + C\frac{du}{dx} + 3Du\frac{du}{dx} + D\frac{d^2u}{dx^2} =$$

welcher, weil $u = \frac{dy}{ydx}$ ist, folgendes Integrale entspricht:

$$u = \frac{\alpha\mathfrak{A}e^{\alpha x} + \beta\mathfrak{B}e^{\beta x} + \gamma\mathfrak{C}e^{\gamma x}}{\mathfrak{A}e^{\alpha x} + \mathfrak{B}e^{\beta x} + \mathfrak{C}e^{\gamma x}}.$$

Diese Gleichung wird ferner auf den ersten Grad zurückgefüh
wenn man $dx = \frac{du}{t}$ setzt, denn da das Element dx constant g
nommen wurde, so wird

$$td^2u - dtdu = 0 \quad \text{oder} \quad d^2u = \frac{dtdu}{t},$$

seyn, und daher erhält man

$$\frac{du}{dx} = t \quad \text{und} \quad \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{tdt}{du},$$

wodurch man also folgende Differenzialgleichung des ersten Grad
findet:

$$A + Bu + Cu^2 + Du^3 + t(C + 3Du) + \frac{Dtdt}{du} = 0,$$

deren Auflösung demnach in unserer Macht steht; es kann nämlich d
Werth einer jeden der beyden Veränderlichen u und t durch diesel

iable x ausgedrückt werden. Denn da y durch x gegeben iſt, ſo
) erſtlich $u = \frac{dy}{y\,dx}$ ſeyn, dann aber $t + u^2 = \frac{d^2y}{y\,dx^2}$, weil
$= t$ iſt. Wird daher für y der oben gefundene Werth ſubſtituirt,
ird man erhalten:

$$u = \frac{\alpha \mathfrak{A} e^{\alpha x} + \beta \mathfrak{B} e^{\beta x} + \gamma \mathfrak{C} e^{\gamma x}}{\mathfrak{A} e^{\alpha x} + \mathfrak{B} e^{\beta x} + \mathfrak{C} e^{\gamma x}} \text{ und}$$

$$t + u^2 = \frac{\alpha^2 \mathfrak{A} e^{\alpha x} + \beta^2 \mathfrak{B} e^{\beta x} + \gamma^2 \mathfrak{C} e^{\gamma x}}{\mathfrak{A} e^{\alpha x} + \mathfrak{B} e^{\beta x} + \mathfrak{C} e^{\gamma x}},$$

n nur α, β, γ die Wurzeln der Gleichung

$$A + B\lambda + C\lambda^2 + D\lambda^3 = 0$$

. Es muß aber bemerkt werden, daß jene Gleichung, wenn
$u^2 = z$ geſetzt wird, folgende Form erhalte:

$$A + Bu + z\,(C + Du) + D\,\frac{dz}{du}\,(z - u^2) = 0,$$

he viel allgemeiner zu ſeyn ſcheint, als jene Gleichungen dieſer
tung, welche wir oben behandelt haben, und die, weil es nicht
ſeyn wird, ſie nach den bekannten Methoden zu integriren, äußerſt
t aufgelöſt wird, wenn man

$$u = \frac{dy}{y\,dx} \text{ und } z = \frac{d^2y}{y\,dx^2}$$

, denn dann wird

$$du = \frac{d^2y}{y\,dx} - \frac{dy^2}{y^2\,dx} \text{ und}$$

$$dz = \frac{d^3y}{y\,dx^2} - \frac{dy\,d^2y}{y^2\,dx^2},$$

ich erhält man

$$\frac{dz}{du} = \frac{y\,d^3y - dy\,d^2y}{dx\,(y\,d^2y - dy^2)} \text{ und}$$

$$z - u^2 = \frac{y\,d^2y - dy^2}{y^2\,dx^2},$$

auf dieſe Art findet man die Gleichung

$$+ \frac{B\,dy}{y\,dx} + \frac{C\,d^2y}{y\,dx^2} + \frac{D\,dy\,d^2y}{y^2\,dx^3} + \frac{D\,y\,d^3y - D\,dy\,d^2y}{y^2\,dx^3} = 0,$$

$$Ay + B \cdot \frac{dy}{dx} + C \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + D \cdot \frac{d^3y}{dx^3} = 0,$$

n Auflöſung wir ſchon nachgewieſen haben.

Anmerkung 3.

§. 1124. Jene Differenzialgleichung des ersten Grades

$$Dtdt + tdu(C + 3Du) + du(A + Bu + Cu^2 + Du^3) = 0,$$

deren Integrale wir bereits gefunden haben, verdient einer noch sorgfältigern Entwickelung.

Zuerst bemerken wir, daß sie integrabel werde, wenn man sie durch den Ausdruck

$$Dt^3 + Dt^2(B + 2Cu + 3Du^2) + t(C + 3Du)(A + Bu + Cu^2 + Du^3) + (A + Bu + Cu^2 + Du^3)^2$$

dividirt, und hieraus schließen wir, daß auch die Gleichung

$$Dzdz - Du^2dz + zdu(C + Du) + du(A + Bu) = 0$$

integrabel werde, wenn man sie durch den Ausdruck

$$D^2z^3 + Dz^2(B + 2Cu) + z[AC + (3AD + BC)u + (BD + C^2)u^2] + A^2 + 2ABu + (AC + B^2)u^2 + (AD + BC)u^3$$

dividirt. Setzt man nun in beyden Fällen den Divisor $= 0$, so gibt dieser ein particuläres Integrale, und da t oder z drey Werthe erhält, so wird jeder derselben ein particuläres Integrale darstellen.

Es wird sich demnach der Mühe lohnen, im Allgemeinen die Gleichung

$$ydy + yPdx + Qdx = 0$$

aufzusuchen, welche durch die Division mit dem Ausdrucke

$$y^3 + Ly^2 + My + N$$

den Charakter der Integrabilität erhält. Durch die oben aus einander gesetzte Operation aber findet man:

$$dL = 2Pdx; \quad dM = PLdx + 3Qdx;$$
$$dN = 2QLdx \text{ und } PN - QM = 0;$$

und hieraus ergibt sich:

$$Pdx = \tfrac{1}{2}dL; \quad Qdx = \frac{dN}{2L};$$

$$dM = \tfrac{1}{2}LdL + \frac{3dN}{2L} \text{ und}$$

$$NdL = \frac{MdN}{L} \text{ oder } M = \frac{NLdL}{dN}.$$

Wird dieser Werth daselbst substituirt, und dN constant genommen, so findet man:

$$3dN^2 = L^2dLdN + 2NL^2d^2L + 2NLdL^2,$$

welche Gleichung durch die Multiplication mit dL übergeht in

$$3\,dL\,dN^2 = d\,.\,NL^2\,dL^2.$$

Allein bequemer, und zwar nach einer ganz besondern Methode, werden jene Gleichungen aufgelöst, wenn man

$$N = \alpha Z^2 \quad \text{und} \quad L = \frac{dZ}{dz}$$

setzt; wird daher das Element dz constant genommen, so findet man:

$$M = \frac{Z\,d^2Z}{2\,dz^2}, \quad \text{also} \quad dM = \frac{Z\,d^3Z + dZ\,d^2Z}{2\,dz^2} \quad \text{und}$$

$$\tfrac{1}{2}L\,dL + \frac{3\,dN}{2L} = \frac{dZ\,d^2Z}{2\,dz^2} + 3\alpha Z\,dz,$$

gleich $d^3Z = 6\alpha\,dz^3$, und daher

$$Z = \alpha z^3 + \beta z^2 + \gamma z + \delta;$$

$$P\,dx = \frac{d^2Z}{2\,dz} \quad \text{und} \quad Q\,dx = \alpha Z\,dz.$$

Nimmt man daher $Z = \alpha z^3 + \beta z^2 + \gamma z + \delta$, so wird die Gleichung

$$y\,dy + y\,.\,\frac{d^2Z}{2dz} + \alpha Z\,dz = 0$$

integrabel gemacht, wenn man sie durch den Ausdruck

$$y^3 + y^2\,.\,\frac{dZ}{dz} + y\,.\,\frac{Z\,d^2Z}{2\,dz^2} + \alpha Z^2$$

dividirt. Läßt sich überdieß Z in Factoren auflösen, so daß

$dy + y\,dz(\alpha+\beta+\gamma+3z) + dz\,(\alpha+z)\,(\beta+z)\,(\gamma+z) = 0$

die vorgelegte Gleichung ist, so wird der sie integrirende Divisor seyn:

$v + (\alpha+z)\,(\beta+z)]\,[y + (\alpha+z)\,(\gamma+z)]\,[y+(\beta+z)\,(\gamma+z)]$,

essen jeder Factor, wenn er $= 0$ gesetzt wird, ein particuläres Integrale gibt.

Aus einem jeden solchen besonderen Werthe aber findet man auf eine mehr gewöhnliche Weise das vollständige Integrale, wie folgt. Man setze

$$y = v - (\alpha + z)\,(\beta + z),$$

so erhält man:

$$v\,dv + v\,dz\,(\gamma + z) - dv\,(\alpha + z)\,(\beta + z) = 0;$$

setzt man $dv = p\,dz$, so wird

$$v = \frac{p\,(\alpha + z)\,(\beta + z)}{p + \gamma + z},$$

werden, und es wird durch Differenziation und durch die Substitution $dv = pdz$ folgende Gleichung zum Vorschein kommen:

$$dp\,(\alpha+z)\,(\beta+z)\,(\gamma+z) = \\ = dz\,[p^3 + (2\gamma-\alpha-\beta)\,p^2 + (\gamma-\alpha)\,(\gamma-\beta)\,p],$$

woraus man die abgesonderte Gleichung

$$\frac{dz}{(\alpha+z)\,(\beta+z)\,(\gamma+z)} = \frac{dp}{p\,(p+\gamma-\alpha)\,(p+\gamma-\beta)}$$

erhält.

Aufgabe 146.

§. 1125. Das vollständige Integrale der Differenzialgleichung eines beliebigen Grades

$$Ay + B\cdot\frac{dy}{dx} + C\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + D\cdot\frac{d^3y}{dx^3} + E\cdot\frac{d^4y}{dx^4} + \ldots = 0,$$

bey welcher das Element dx constant genommen ist, zu finden.

Auflösung.

Es ist einleuchtend, daß auch dieser Gleichung der Ausdruck $y = e^{\lambda x}$ Genüge leiste, denn weil hieraus

$$\frac{dy}{dx} = \lambda e^{\lambda x};\quad \frac{d^2y}{dx^2} = \lambda^2 e^{\lambda x};\quad \frac{d^3y}{dx^3} = \lambda^3 e^{\lambda x}$$

und allgemein

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \lambda^n e^{\lambda x}$$

folgt, so wird man nach gehöriger Substitution, und nachdem man durch $e^{\lambda x}$ dividirt hat, auf folgende Gleichung kommen:

$$A + B\lambda + C\lambda^2 + D\lambda^3 + E\lambda^4 + \ldots = 0,$$

woraus der Werth von λ bestimmt werden muß. Es wird demnach die Größe λ eben so viele Werthe erhalten, von der wievielten Ordnung die vorgelegte Differenzialgleichung ist, und jeder derselben wird der Gleichung Genüge leisten. Bezeichnen wir diese Werthe durch α, β, γ, $\delta\ldots$, so werden die Formeln

$$y = Ae^{\alpha x};\quad y = Be^{\beta x};\quad y = Ce^{\gamma x};\quad \text{ꝛc.}$$

zwar nur particuläre Integralien seyn; allein es leuchtet aus der Natur unserer Gleichung ein, daß jedes Aggregat von beliebig vielen dieser

erthe, folglich auch das Aggregat aller dieſer Werthe eben ſo Genüge ſten werde. Da alſo das Aggregat aller Werthe

$$y = Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x} + Ce^{\gamma x} + De^{\delta x} + \ldots$$

n ſo viele willkürliche Conſtanten A, B, C, D, ꝛc. enthält, als r Ordnungsexponent der vorgelegten Differenzialgleichung anzeigt, läßt ſich wohl nicht zweifeln, daß dieſer Ausdruck das geſuchte voll- ndige Integrale iſt.

Die Differenzialgleichung ſey vom n^{ten} Grade, ſie ſey nämlich

$$y + B \cdot \frac{dy}{dx} + C \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + D \cdot \frac{d^3y}{dx^3} + \ldots + N\frac{d^ny}{dx^n} = 0,$$

wird das vollſtändige Integrale derſelben aus n Theilen beſtehen, liche aus der Auflöſung der algebraiſchen Gleichung des n^{ten} Grades

$$A + B\lambda + C\lambda^2 + D\lambda^3 + \ldots + N\lambda^n = 0$$

ſtimmt werden müſſen; es werden nämlich die einzelnen einfachen ctoren dieſer Gleichung jene Theile geben, ſo daß, wenn $\alpha = \lambda$ er dieſer Factoren iſt, aus dieſem der Theil $Ae^{\alpha x}$ des Integrales funden wird, welcher Theil offenbar durch die Integration der ein- hen Differenzialgleichung

$$\alpha y - \frac{dy}{dx} = 0$$

halten wird. Auf ähnliche Art findet man durch Verbindung der ey Factoren

$$(\alpha - \lambda)(\beta - \lambda) = \alpha\beta - (\alpha + \beta)\lambda + \lambda^2$$

n Theil $Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x}$ des Integrales, und dieſer iſt zugleich das tegrale folgender Differenzialgleichung des zweyten Grades:

$$\alpha\beta y - (\alpha + \beta)\frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Allgemein, wenn

$$a + b\lambda + c\lambda^2 + f\lambda^3 + \ldots = 0$$

Factor jener algebraiſchen Gleichung iſt, wird aus dieſem unge- rt die Differenzialgleichung

$$ay + b\frac{dy}{dx} + c\frac{d^2y}{dx^2} + f\frac{d^3y}{dx^3} + \ldots = 0$$

bildet werden, und wenn $y = P$ das vollſtändige Integrale dieſer chung iſt, ſo wird eben dieſes ein Theil des Integrales unſerer gelegten Gleichung ſeyn.

Auf dieſe Art wird man alſo aus den einzelnen Factoren algebraiſchen Gleichung

$$A + B\lambda + C\lambda^2 + D\lambda^3 + \ldots + N\lambda^n = 0$$

die einzelnen Theile des geſuchten Integrales ableiten, ſo daß t nach die ganze Rechnung bloß auf der Auflöſung dieſer Gleich beruhet.

Zuſatz 1.

§. 1126. Wenn alſo alle einfachen Factoren jener algebraiſ Gleichung reell und zugleich von einander verſchieden ſind, ſo hat Integration gar keine Schwierigkeit; denn wenn $f + g\lambda$ ein ſol einfacher Factor iſt, ſo iſt $Ae^{-\frac{fx}{g}}$ der hieraus entſpringende Theil Integrales.

Zuſatz 2.

§. 1127. Sind zwey einfache Factoren einander gleich, oder $(f + g\lambda)^2$ ein Factor jener Gleichung, ſo iſt der hieraus entſp gende Theil des Integrales $= e^{-\frac{fx}{g}}(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x)$.

Iſt der Würfel $(f + g\lambda)^3$ ein Factor, ſo entſpringt aus die der Ausdruck $e^{-\frac{fx}{g}}(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2)$ als Theil des Integra und dem biquadratiſchen Factor $(f + g\lambda)^4$ entſpricht ein Theil der Form

$$e^{-\frac{fx}{g}}(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3),$$

und ſo fort für jede beliebige Anzahl gleicher Factoren, wie ſich §. 1120 folgern läßt.

Zuſatz 3.

§. 1128. Kommen imaginäre Factoren vor, ſo erhält man d Verbindung zweyer derſelben jedesmahl einen reellen trinomiſchen tor, der ſich unter folgender Form darſtellen läßt:

$$f^2 + 2fg\lambda \cos. \zeta + g^2\lambda^2,$$

und hieraus folgt:

$$\lambda = -\frac{f}{g}(\cos. \zeta \pm \sqrt{-1} \sin. \zeta);$$

vergleicht man dieſen Werth mit §. 1121, ſo wird

$$\mu = \frac{-f \cos. \zeta}{g} \quad \text{und} \quad \nu = \frac{f \sin. \zeta}{g}.$$

Es wird demnach der aus einem solchen Factor entspringende
eil des Integrales die Form haben:

$$e^{-\frac{fx\cos.\zeta}{g}}\left(\mathfrak{A}\cos.\frac{fx\sin.\zeta}{g}+\mathfrak{B}\sin.\frac{fx\sin.\zeta}{g}\right).$$

Zusatz 4.

§. 1129. Erscheint das Quadrat eines solchen Ausdruckes,
nlich

$$(f^2+2fg\lambda\cos.z+g^2\lambda^2)^2$$

er den Factoren, oder sind zwey solche Factoren einander gleich,
betrachte man diese als unendlich wenig von einander verschieden,
daß in dem einen die Größe $\frac{f}{g}(1+\omega)$ statt $\frac{f}{g}$ geschrieben wird,
rhält man, weil

$$e^{-\frac{fx\cos.\zeta}{g}(1+\omega)}=e^{-\frac{fx\cos.\zeta}{g}}\left(1-\frac{\omega fx}{g}\cos.z\right),$$

$$\cos.\frac{fx\sin.\zeta}{g}(1+\omega)=\cos.\frac{fx\sin.\zeta}{g}-\frac{\omega fx\sin.\zeta}{g}\sin.\frac{fx\sin.\zeta}{g}$$

$$\sin.\frac{fx\sin.\zeta}{g}(1+\omega)=\sin.\frac{fx\sin.\zeta}{g}+\frac{\omega fx\sin.\zeta}{g}\cos.\frac{fx\sin.\zeta}{g}$$

aus diesem Factor folgenden Theil des Integrales:

$$\frac{fx\cos.\zeta}{g}\left\{\begin{array}{l}\mathfrak{A}'\cos.\frac{fx\sin.\zeta}{g}-\mathfrak{A}'.\frac{\omega fx\cos.\zeta}{g}\cos.\frac{fx\sin.\zeta}{g}\\ \qquad\qquad -\mathfrak{A}'\frac{\omega fx\sin.\zeta}{g}\sin.\frac{fx\sin.\zeta}{g}\\ +\mathfrak{B}'\sin.\frac{fx\sin.\zeta}{g}-\mathfrak{B}'.\frac{\omega fx\cos.\zeta}{g}\sin.\frac{fx\sin.\zeta}{g}\\ \qquad\qquad +\mathfrak{B}'\frac{\omega fx\sin.\zeta}{g}\cos.\frac{fx\sin.\zeta}{g}\end{array}\right\}$$

welchem der erstere Theil addirt werden muß. Zu diesem Zwecke
len wir die constanten Größen zusammenziehen, indem wir

$$\mathfrak{A}+\mathfrak{A}'=\mathfrak{E};$$
$$\mathfrak{B}+\mathfrak{B}'=\mathfrak{F};$$
$$-\frac{\mathfrak{A}'\omega f\cos.\zeta}{g}+\frac{\mathfrak{B}'\omega f\sin.\zeta}{g}=\mathfrak{G}\quad\text{und}$$
$$-\frac{\mathfrak{A}'\omega f\sin.\zeta}{g}-\frac{\mathfrak{B}'\omega f\cos.\zeta}{g}=\mathfrak{H}.$$

setzen, woraus sich jene Constanten wirklich bestimmen lassen, und der entsprechende Theil des Integrales wird seyn:

$$e^{-\frac{fx\cos.\zeta}{g}}\left[(E+Gx)\cos.\frac{fx\sin.\zeta}{g}+(F+Hx)\sin.\frac{fx\sin.\zeta}{g}\right]$$

Anmerkung.

§. 1130. Wir wollen nun die ganze Methode, die Integrale der Differenzialgleichungen von der Form

$$Ay+B.\frac{dy}{dx}+C.\frac{d^2y}{dx^2}+D.\frac{d^3y}{dx^3}+\ldots+N.\frac{d^ny}{dx^n}=0$$

zu finden, kurz auf folgende Art zusammenfassen: Man schreibe, wie folgendes Schema zeigt

statt y	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{d^2y}{dx^2}$	$\frac{d^3y}{dx^3}$	$\frac{d^4y}{dx^4}$	. . .	$\frac{d^ny}{dx^n}$
schreibe man 1	z	z^2	z^3	z^4		z^n

so daß man die algebraische Gleichung

$$A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+\ldots+Nz^n=0$$

erhält; ferner notire man die einzelnen reellen Factoren, sowohl die einfachen als auch die quadratischen, und bemerke sich überdieß die Fälle, in welchen zwey oder mehrere dieser Factoren einander gleich sind. Welche Theile dann für das gesuchte Integrale aus den einzelnen Factoren entstehen, kann man aus folgender Tafel erkennen:

$f + gz$	$\mathfrak{A} e^{-\frac{fx}{g}}$
$(f + gz)^2$	$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x)\, e^{-\frac{fx}{g}}$
$(f + gz)^3$	$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2)\, e^{-\frac{fx}{g}}$
$(f + gz)^4$	$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3)\, e^{-\frac{fx}{g}}$
$f^2 + 2fgz \cos.\zeta + g^2z^2$	$e^{\frac{-fx\cos.\zeta}{g}} \left(\mathfrak{A} \cos.\frac{fx \sin.\zeta}{g} + \mathfrak{B} \sin.\frac{fx \sin.\zeta}{g}\right)$
$(f^2 + 2fgz \cos.\zeta + g^2z^2)^2$	$e^{\frac{-fx\cos.\zeta}{g}} \left\{\begin{matrix}(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x) \cos.\frac{fx \sin.\zeta}{g} \\ (a + bx) \sin.\frac{fx \sin.\zeta}{g}\end{matrix}\right\}$
$(f^2 + 2fgz \cos.\zeta + g^2z^2)^3$	$e^{\frac{-fx\cos.\zeta}{g}} \left\{\begin{matrix}(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2) \cos.\frac{fx \sin.\zeta}{g} \\ (a + bx + cx^2) \sin.\frac{fx \sin.\zeta}{g}\end{matrix}\right\}$
ꝛc. ꝛc.	ꝛc. ꝛc.

Man muß aber für die einzelnen Factoren verschiedene Buchstaben zur Bezeichnung der Constanten schreiben, um das Integrale ganz vollständig zu erhalten.

Beyspiel 1.

§. 1131. Man bestimme das vollständige Integrale der Differenzialgleichung des vierten Grades:

$$y - \frac{2\,dy}{dx} + \frac{2\,d^2y}{dx^2} - \frac{2\,d^3y}{dx^3} + \frac{d^4y}{dx^4} = 0.$$

Wir erhalten hier die algebraische Gleichung:

$$1 - 2z + 2z^2 - 2z^3 + z^4 = 0,$$

welche in die Factoren $(1-z)^2\,(1+z^2)$ zerfällt wird, deren ersterer wegen $f = 1$ und $g = -1$ den Theil $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x)\,e^x$ des Integrales gibt; der andere Factor aber gibt, weil $f = 1$, $\cos.\,\zeta = 0$, $g = 1$ und $\sin.\,\zeta = 1$ ist, $\mathfrak{A}\cos.x + \mathfrak{B}\sin.x$. Das gesuchte vollständige Integrale wird demnach

$$y = (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x)\,e^x + \mathfrak{C}\cos.x + \mathfrak{D}\sin.x$$

seyn, und enthält vier willkürliche constante Größen. Wollen wir, daß $y = 0$ für $x = 0$ werde, so muß $\mathfrak{A} + \mathfrak{C} = 0$ werden, und soll in eben diesem Falle auch $\frac{dy}{dx}$ verschwinden, so muß, weil

$$\frac{dy}{dx} = (\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{B}x)\,e^x - \mathfrak{C}\sin.x + \mathfrak{D}\cos.x$$

ist, $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{D} = 0$ werden. Soll überdieß auch $\frac{d^2y}{dx^2}$ verschwinden, so muß, da

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (\mathfrak{A} + 2\mathfrak{B} + \mathfrak{B}x)\,e^x - \mathfrak{C}\cos.x - \mathfrak{D}\sin.x \text{ ist,}$$

$$\mathfrak{A} + 2\mathfrak{B} - \mathfrak{C} = 0 \text{ seyn.}$$

Diesen drey Bedingungen werden wir daher Genüge leisten, wenn wir $\mathfrak{C} = -\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} = -\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{D} = 0$ setzen, so daß

$$y = \mathfrak{A}\,(1-x)\,e^x - \mathfrak{A}\cos.x$$

das Integrale ist.

Beyspiel 2.

§. 1132. Die Differenzialgleichung des vierten Grades

$$Ay + C\frac{d^2y}{dx^2} + E\frac{d^4y}{dx^4} = 0,$$

ey welcher das Element dx constant genommen ist, u integriren.

Die algebraische Gleichung, welche uns zum Integrale leitet, ist

$$A + Cz^2 + Ez^4 = 0,$$

nd diese Gleichung hat immer zwey reelle quadratische Factoren, die ine zweyfache Form haben können, nämlich entweder

$$(a^2 + 2maz + nz^2)\,(a^2 - 2maz + nz^2), \text{ oder}$$
$$(a^2 + mz^2)\,(a^2 + nz^2).$$

Aus der erstern ergibt sich

$$A = a^4;\quad C = 2na^2 - 4m^2a^2;\quad E = n^2;$$

us der letztern aber

$$A = a^4;\quad C = (m+n)\,a^2;\quad E = mn;$$

mmer aber kann man das erste Glied A durch das Biquadrat a^4 dar- tellen, und es findet die erstere Auflösung Statt, wenn E eine positive Zahl bezeichnet, und auch $2na^2 - C$ oder $2\sqrt{AE} - C$ positiv, lso $4AE > C^2$ ist. Die zweyte Auflösung aber findet Statt, wenn $^2 < 4AE$ ist.

Man hat also darauf zu sehen, zu welcher Classe die einzelnen actoren gehören, und es werden sich demnach folgende Fälle darbiethen:

I. Sind alle vier einfachen Factoren reell, so wird

$$A + Cz^2 + Ez^4 = (a+z)\,(a-z)\,(b+z)\,(b-z)$$

eyn, und man wird die Gleichung

$$a^2b^2y - (a^2+b^2)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^4y}{dx^4} = 0$$

rhalten, deren vollständiges Integrale

$$y = \mathfrak{A}e^{ax} + \mathfrak{B}e^{-ax} + \mathfrak{C}e^{bx} + \mathfrak{D}e^{-bx}$$

st. Wenn aber $b = a$ ist, so wird der Gleichung

$$a^4y - \frac{2a^2d^2y}{dx^2} + \frac{d^4y}{dx^4} = 0$$

as vollständige Integrale

$$y = (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x)\,e^{ax} + (\mathfrak{C} + \mathfrak{D}x)\,e^{-ax}$$

ugehören.

II. Sind zwey einfache Factoren reell, die beyden andern aber imaginär, so wird

$$A + Cz^2 + Ez^4 = (a+z)\,(a-z)\,(b^2+z^2)$$

ſeyn, und man erhält die Gleichung

$$a^2 b^2 y + (a^2 - b^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{d^4 y}{dx^4} = 0,$$

welcher der Ausdruck

$$y = \mathfrak{A} e^{ax} + \mathfrak{B} e^{-ax} + \mathfrak{C} \cos. bx + \mathfrak{D} \sin. bx$$

als vollſtändiges Integrale zugehört.

III. Sind alle einfachen Factoren imaginär, ſo müſſen zwey Fälle entwickelt werden:

1) Wenn

$$A + Cz^2 + Ez^4 = (a^2 + z^2)(b^2 + z^2)$$

iſt, woraus ſich die Gleichung

$$a^2 b^2 y + (a^2 + b^2) \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{d^4 y}{dx^4} = 0$$

ergibt, und dieſer entſpricht das vollſtändige Integrale

$$y = \mathfrak{A} \cos. ax + \mathfrak{B} \sin. ax + \mathfrak{C} \cos. bx + \mathfrak{D} \sin. bx.$$

2) Wenn

$$A + Cz^2 + Ez^4 = (a^2 + 2az \cos. \zeta + z^2)(a^2 - 2az \cos. \zeta + z^2)$$

iſt, ſo erhält man die Gleichung

$$a^4 y - \frac{2a^2 d^2 y}{dx^2} \cos. 2\zeta + \frac{d^4 y}{dx^4} = 0,$$

und ihr vollſtändiges Integrale iſt

$$y = e^{ax \cos. \zeta} (\mathfrak{A} \cos. ax \sin. \zeta + \mathfrak{B} \sin. ax \sin. \zeta)$$
$$+ e^{-ax \cos. \zeta} (\mathfrak{C} \cos. ax \sin. \zeta + \mathfrak{D} \sin. ax \sin. \zeta).$$

Wenn aber im erſtern Falle $b = a$, im letztern aber $\cos. \zeta = 0$ iſt, ſo entſpricht der Gleichung

$$a^4 y + \frac{2a^2 d^2 y}{dx^2} + \frac{d^4 y}{dx^4} = 0$$

das vollſtändige Integrale

$$y = (\mathfrak{A} + \mathfrak{B} x) \cos. ax + (\mathfrak{C} + \mathfrak{D} x) \sin. ax.$$

Anmerkung 1.

§. 1133. Da alſo das Integrale der Gleichung

$$Ay + \frac{C d^2 y}{dx^2} + \frac{E d^4 y}{dx^4} = 0$$

angegeben werden kann, ſo werden ſich auch alle Gleichungen, welche man daraus ableiten kann, integriren laſſen. Dieſe Gleichung wird

ber, wenn man ſie mit 2dy multiplicirt, zuerſt durch Integration uf folgende Differenzialgleichung des dritten Grades zurückgeführt:

$$Ay^2 + \frac{C\,dy^2}{dx^2} + \frac{2E\,dy\,d^3y - E\,(d^2y)^2}{dx^4} = \text{Const.}$$

In dem vorhin gefundenen Integrale aber können die conſtanten röße A, B, C, D ſo beſtimmt werden, daß dieſe unveränderliche röße Const. verſchwindet, und wir werden demnach im Stande ſeyn, is vollſtändige Integrale der Gleichung

$$Ay^2 + \frac{C\,dy^2}{dx^2} + \frac{2E\,dy\,d^3y - E\,(d^2y)^2}{dx^4} = 0$$

zugeben. Nun ſetze man

$$y = e^{\int v\,dx}, \text{ ſo daß } v = \frac{dy}{y\,dx} \text{ wird,}$$

wird unſere Gleichung wegen

$$\frac{dy}{dx} = e^{\int v\,dx} v, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = e^{\int v\,dx}\left(\frac{dv}{dx} + v^2\right) \text{ und}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = e^{\int v\,dx}\left(\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{3v\,dv}{dx} + v^3\right)$$

lgende Form annehmen:

$$A + Cv^2 + E\left(\frac{2v\,d^2v}{dx^2} + \frac{4v^2\,dv}{dx} + v^4 - \frac{dv^2}{dx^2}\right) = 0.$$

Sey ferner

$$dx = \frac{dv}{s}, \text{ alſo } s = \frac{dv}{dx} = \frac{d^2y}{y\,dx^2} - \frac{dy^2}{y^2\,dx^2},$$

wird man finden:

$$\frac{d^2v}{dx} = ds \quad \text{und} \quad \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{s\,ds}{dv},$$

oraus man folgende Differenzialgleichung des erſten Grades erhält:

$$A + Cv^2 + E\left(\frac{2vs\,ds}{dv} - s^2 + 4v^2s + v^4\right) = 0,$$

nd dieſe Gleichung zwiſchen v und s, welche wir aus der zwiſchen und y beſtehenden Relation gefunden haben, läßt ſich ſo beſtimmen, aß

$$v = \frac{dy}{y\,dx} \quad \text{und} \quad s = \frac{y\,d^2y - dy^2}{y^2\,dx^2}$$

ird.

Anmerkung 2.

§. 1134. Behält man aber jene Conſtante, welche durch Inte-

gration in die Rechnung eingeführt wurde, bey, so daß also

$$Ay^2 + \frac{C\,dy^2}{dx^2} + \frac{2E\,dy\,d^3y - E\,(d^2y)^2}{dx^4} = G$$

ist, so wird man in dem vollständigen Integrale, in welchem y durch x ausgedrückt wird, die Constanten A, B, C, D dieser Größe G gemäß bestimmen können. Man setze also nun

$$dx = \frac{dy}{u}, \text{ mithin } \frac{dy}{dx} = u,$$

so wird

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{u\,du}{dy} \text{ und } \frac{d^3y}{dx^2} = d \cdot \frac{u\,du}{dy},$$

folglich

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{u}{dy}\, d \cdot \frac{u\,du}{dy}.$$

Hieraus ergibt sich die Differenzialgleichung des zweyten Grades;

$$Ay^2 + Cu^2 + E\left(\frac{2u^2}{dy}\, d \cdot \frac{u\,du}{dy} - \frac{u^2\,du^2}{dy^2}\right) = G,$$

wo die Betrachtung des als constant genommenen Elementes beseitigt ist. Es hindert uns also nichts, dy als unveränderlich anzusehen, und dann wird

$$Ay^2 + Cu^2 + E\left(\frac{2u^3\,d^2u}{dy^2} + \frac{u^2\,du^2}{dy^2}\right) = G$$

werden, welche Gleichung also auch integrirt werden kann.

Oder es wird, wenn wir $y^2 = p$ und $u^2 = q$ setzen, und das Element dp als unveränderlich betrachten, folgende Gleichung zum Vorschein kommen:

$$Ap + Cq + E\left(\frac{4pq\,d^2q + 2q\,dp\,dq - p\,dq^2}{dp^2}\right) = G;$$

oder, wenn in jener Gleichung $u = r^{\frac{3}{2}}$ gesetzt wird:

$$Ay^2 + Cr^{\frac{4}{3}} + \tfrac{4}{3}Er^{\frac{5}{3}} \cdot \frac{d^2r}{dy^2} = G.$$

Die Integration dieser Formeln erscheint ohne dieses Hülfsmittel äußerst schwierig.

Aufgabe 147.

§. 1135. Eine Differenzialgleichung von was immer für einer Ordnung

$$a^n y \pm \frac{d^n y}{dx^n} = 0,$$

bey welcher das Element dx als constant angenommen ist, sey gegeben; man bestimme das vollständige Integrale derselben.

Auflösung.

Die algebraische Gleichung, welche uns zur Auflösung führt, ist

$$a^n \pm z^n = o,$$

für deren Resolution zwey Fälle betrachtet werden müssen, je nachdem nämlich das obere oder untere Zeichen gilt.

I. Es gelte das obere Zeichen, es sey nämlich die Gleichung

$$a^n y + \frac{d^n y}{dx^n} = o$$

gegeben. Die reellen Factoren des Ausdruckes $a^n + z^n$ sind:

$$a^2 - 2az \cos.\frac{\pi}{n} + z^2;$$

$$a^2 - 2az \cos.\frac{3\pi}{n} + z^2;$$

$$a^2 - 2az \cos.\frac{5\pi}{n} + z^2;$$

$$\text{ꝛc.} \qquad \text{ꝛc.};$$

der letzte hievon ist entweder

$$a^2 - 2az \cos.\frac{n\pi}{n} + z^2, \text{ oder}$$

$$a^2 - 2az \cos.\frac{(n-1)\pi}{n} + z^2;$$

je nachdem entweder n oder $n - 1$ eine ungerade Zahl ist, und im erstern Falle muß man statt des quadratischen Factors $a^2 + 2az + z^2$ seine Wurzel $a + z$ nehmen.

Das vollständige Integrale jener Gleichung ist demnach

$$y = + e^{ax \cos.\frac{\pi}{n}} \left(\mathfrak{A} \cos. ax \sin.\frac{\pi}{n} + \mathfrak{B} \sin. ax \sin.\frac{\pi}{n} \right)$$
$$+ e^{ax \cos.\frac{3\pi}{n}} \left(\mathfrak{C} \cos. ax \sin.\frac{3\pi}{n} + \mathfrak{D} \sin. ax \sin.\frac{3\pi}{n} \right)$$
$$+ e^{ax \cos.\frac{5\pi}{n}} \left(\mathfrak{E} \cos. ax \sin.\frac{5\pi}{n} + \mathfrak{F} \sin. ax \sin.\frac{5\pi}{n} \right)$$
$$+ \ldots.$$

in welchem Ausdrucke Ne^{-ax} das letzte Glied ist, wenn n eine ungerade Zahl bezeichnet. Dieses Integrale läßt sich auch unter folgender Form darstellen:

$$y = Ae^{ax\cos.\frac{\pi}{n}}\cos.\left(ax\sin.\frac{\pi}{n}+a\right)+$$
$$+Be^{ax\cos.\frac{3\pi}{n}}\cos.\left(ax\sin.\frac{3\pi}{n}+b\right)$$
$$+Ce^{ax\cos.\frac{5\pi}{n}}\cos.\left(ax\sin.\frac{5\pi}{n}+c\right)+$$
$$+De^{ax\cos.\frac{7\pi}{n}}\cos.\left(ax\sin.\frac{7\pi}{n}+b\right)$$
$$+\ldots\ldots$$

welche Reihe so lange fortgesetzt werden muß, bis wieder ähnliche Glieder zum Vorschein kommen.

II. Wenn das untere Zeichen gilt, wenn also die Gleichung

$$a^n y - \frac{d^n y}{dx^n} = 0$$

gegeben ist, so entsprechen der Formel $a^n - z^n$ die reellen Factoren

$$a - z;$$
$$a^2 - 2az\cos.\frac{2\pi}{n} + z^2;$$
$$a^2 - 2az\cos.\frac{4\pi}{n} + z^2;$$
$$a^2 - 2az\cos.\frac{6\pi}{n} + z^2;$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

wo der letzte Factor $a+z$ ist, wenn n eine gerade Zahl bezeichnet; ist aber n ungerade, so ist es

$$a^2 - 2az\cos.\frac{(n-1)\pi}{n} + z^2.$$

Das vollständige Integrale dieser Gleichung ist daher:

$$= \mathfrak{A}e^{ax} + e^{ax\cos.\frac{2\pi}{n}}\left(\mathfrak{B}\cos.ax\sin.\frac{2\pi}{n} + \mathfrak{C}\sin.ax\sin.\frac{2\pi}{n}\right)$$
$$+ e^{ax\cos.\frac{4\pi}{n}}\left(\mathfrak{D}\cos.ax\sin.\frac{4\pi}{n} + \mathfrak{E}\sin.ax\sin.\frac{4\pi}{n}\right)$$
$$+ e^{ax\cos.\frac{6\pi}{n}}\left(\mathfrak{F}\cos.ax\sin.\frac{6\pi}{n} + \mathfrak{G}\sin.ax\sin.\frac{6\pi}{n}\right)$$
$$+ \ldots\ldots$$

ches Integrale auch so ausgedrückt werden kann:

$$y = \mathfrak{A}e^{ax} + \mathfrak{B}e^{ax\cos.\frac{2\pi}{n}}\cos.\left(ax\sin.\frac{2\pi}{n} + b\right)$$
$$+ \mathfrak{C}e^{ax\cos.\frac{4\pi}{n}}\cos.\left(ax\sin.\frac{4\pi}{n} + c\right)$$
$$+ \mathfrak{D}e^{ax\cos.\frac{6\pi}{n}}\cos.\left(ax\sin.\frac{6\pi}{n} + d\right)$$
$$+ \ldots\ldots$$

› diese Reihe muß so lange fortgesetzt werden, als noch Glieder zum ›rschein kommen, die von den Anfangsgliedern verschieden sind.

Anmerkung 1.

§. 1136. Für die verschiedenen Werthe des Exponenten n also ›rden sich die Integralien auf folgende Art darstellen, und zwar erst für die Gleichung

$$a^n y + \frac{d^n y}{dx^n} = 0.$$

I. Das Integrale der Gleichung $ay + \frac{dy}{dx} = 0$ ist

$$y = \mathfrak{A}e^{-ax}.$$

II. Der Gleichung $a^2 y + \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$ entspricht das Integrale

$$y = \mathfrak{A}\cos.(ax + \alpha).$$

III. Der Gleichung $a^3 y + \frac{d^3 y}{dx^3} = 0$ entspricht das Integrale

$$y = \mathfrak{A}e^{\frac{1}{2}ax}\cos.\left(\frac{ax\sqrt{3}}{2} + \alpha\right) + \mathfrak{B}e^{-ax}.$$

IV. Die Gleichung $a^4 y + \frac{d^4 y}{dx^4} = 0$ hat das Integrale

$$y = \mathfrak{A} e^{\frac{ax}{\sqrt{2}}} \cos.\left(\frac{ax}{\sqrt{2}} + \alpha\right) + \mathfrak{B} e^{\frac{-ax}{\sqrt{2}}} \cos.\left(\frac{ax}{\sqrt{2}} + b\right).$$

V. Das Integrale der Gleichung $a^5 y + \frac{d^5 y}{dx^5} = 0$ ist

$$y = \mathfrak{A} e^{ax \cos. 36^\circ} \cos.(ax \sin. 36^\circ + \alpha) +$$
$$+ \mathfrak{B} e^{-ax \cos. 72^\circ} \cos.(ax \sin. 72^\circ + b$$
$$+ \mathfrak{C} e^{-ax}.$$

VI. Die Gleichung $a^6 y + \frac{d^6 y}{dx^6} = 0$ hat das Integrale

$$y = \mathfrak{A} e^{\frac{ax\sqrt{3}}{2}} \cos.(\tfrac{1}{2}ax + \alpha) + \mathfrak{B} \cos.(ax + b)$$
$$+ \mathfrak{C} e^{\frac{-ax\sqrt{3}}{2}} \cos.(\tfrac{1}{2}ax + c$$

u. s. w.

Auf ähnliche Art entsprechen der zweyten Form

$$a^n y - \frac{d^n y}{dx^n} = 0$$

folgende Integrationen, nach den einfachern Werthen des Exponent n geordnet:

I. Das Integrale der Gleichung $ay - \frac{dy}{dx} = 0$ ist

$$y = \mathfrak{A} e^{ax}.$$

II. Der Gleichung $a^2 y - \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$ entspricht das Integra

$$y = \mathfrak{A} e^{ax} + \mathfrak{B} e^{-ax}.$$

III. Zur Gleichung

$$a^3 y - \frac{d^3 y}{dx^3} = 0$$

gehört das Integrale

$$y = \mathfrak{A} e^{ax} + \mathfrak{B} e^{-\frac{1}{2}ax} \cos.\left(\frac{ax\sqrt{3}}{2} + b\right).$$

IV. Das Integrale der Gleichung $a^4 y - \frac{d^4 y}{dx^4} = 0$ ist

$$y = \mathfrak{A} e^{ax} + \mathfrak{B} \cos.(ax + b) + \mathfrak{C} e^{-ax}.$$

V. Die Gleichung $a^5 y - \frac{d^5 y}{dx^5} = 0$ hat das Integrale

$$= Ae^{ax} + Be^{ax \cos. 72^\circ} \cos. (ax \sin. 72^\circ + b) + Ce^{-ax \cos. 36^\circ} \cos. (ax \sin. 36^\circ + c).$$

VI. Für die Gleichung $a^6 y - \frac{d^6 y}{dx^6} = 0$ erhält man das tegrale

$$= Ae^{ax} + Be^{\frac{1}{2}ax} \cos. \left(\frac{ax\sqrt{3}}{2} + b\right) + Ce^{-\frac{1}{2}ax} \cos. \left(\frac{ax\sqrt{3}}{2} + c\right) + De^{-ax},$$

d so kann man so weit fortgehen, als man will.

Anmerkung 2.

§. 1137. Gibt gleichwohl die Methode, deren wir uns hier benten, die Integralien der unter der vorgelegten Form enthaltenen eichungen ohne Schwierigkeit, so weicht sie dennoch von den Prinien der Integration gänzlich ab. Denn wenn die Differenzialgleiing von einem höhern Grade ist, so erfordern die Gesetze der Intetion, daß man sie eben so oft nach einander integrire, bevor man der endlichen Relation zwischen den beyden Veränderlichen kommt, em bey jeder einzelnen Integration eine willkürliche Constante einührt wird; auf diese Art wird endlich das vollständige Integrale unden.

Hier haben wir aber das letzte Integrale gleichsam durch eine zige Operation entwickelt, und zwar mit allen Constanten, durch lche dasselbe zum vollständigen erhoben wird; wir haben nämlich in That bloß durch Errathen mehrere particuläre Integralien gefun, und die Natur der Gleichung ließ es gerade zu, daß wir aus iselben das vollständige Integrale bilden konnten. Wollten wir aber Integrationsvorschriften strenge befolgen, und es wäre z. B. eine fferenzialgleichung des vierten Grades gegeben, so würden wir eine rfache Integration vornehmen müssen, durch deren erste die vorgete Gleichung auf eine Differenzialgleichung des dritten Grades, diese r durch eine neue Integration auf eine Differenzialgleichung des yten Grades zurückgeführt wird. Integrirt man dann diese letztere eichung von neuem, so kömmt man auf eine Differenzialgleichung erſten Grades, und diese leitet endlich nach nochmahliger Integran auf die zwischen den beyden Veränderlichen gesuchte Relation.

Es kann die Form der hier behandelten Gleichungen also auch auf die Art aufgelöst werden, daß man sie durch fortgesetztes Integriren auf immer niedrigere Grade zurückführt, wodurch endlich dieselben Integralien, die wir hier entwickelt haben, gefunden werden. Da aber diese Methode sich nicht bloß auf die hier betrachteten Formen erstreckt, sondern nach derselben auch die allgemeinere Gleichung

$$X = Ay + B \cdot \frac{dy}{dx} + C \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + D \cdot \frac{d^3y}{dx^3} + \ldots$$

wo X eine beliebige Function von x bezeichnet, integrirt werden kann, zu deren Auflösung die vorhergehende Methode ganz und gar nicht zureichend ist, so wollen wir sogleich eine neue Methode auf diese allgemeinere Form anwenden.

Kapitel III.

Von der Integration der Differenzialgleichungen von der Form:

$$X = Ay + \frac{B\,dy}{dx} + \frac{C\,d^2y}{dx^2} + \frac{D\,d^3y}{dx^3} + \ldots$$

Aufgabe 148.

§. 1138. Die Differenzialgleichung

$$X = Ay + \frac{B\,dy}{dx} + \frac{C\,d^2y}{dx^2} + \frac{D\,d^3y}{dx^3} + \ldots + \frac{N\,d^ny}{dx^n}$$

ey welcher das Element dx constant gesetzt ist, und irgend eine Function von x bezeichnet, sey gegeben; an suche eine Function von x, mit welcher diese Gleichung multiplicirt integrabel wird.

Auflösung.

Sey P dx der Multiplicator, welchen wir suchen, so muß man, a das erste Glied X durch denselben integrabel gemacht wird, dessen Beziehung aus dem andern Gliede bestimmen. Es ist aber leicht einzusehen, daß $e^{\lambda x}$ die Form dieses Multiplicators P seyn werde, so daß man bloß die Größe λ zu bestimmen hat.

Sey also $e^{\lambda x}\,dx$ der Multiplicator, so muß der Ausdruck

$$\lambda x\,dx\left[Ay + \frac{B\,dy}{dx} + \frac{C\,d^2y}{dx^2} + \frac{D\,d^3y}{dx^3} + \ldots\ldots + \frac{N\,d^ny}{dx^n}\right]$$

integrabel seyn. Man nehme an, das Integrale desselben sey

$$e^{\lambda x}\left[A'y + \frac{B'\,dy}{dx} + \frac{C'\,d^2y}{dx^2} + \ldots + \frac{M'\,d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right],$$

daß das Differenziale hievon mit jenem Ausdrucke übereinstimmen muß. Da dieses nun

$$\lambda x\,dx\left\{\begin{array}{l}\lambda A'y + \frac{\lambda B'\,dy}{dx} + \frac{\lambda C'\,d^2y}{dx^2} + \ldots\ldots + \frac{\lambda M'\,d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \\ \quad + \frac{A'\,dy}{dx} + \frac{B'\,d^2y}{dx^2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{M'\,d^ny}{dx^n}\end{array}\right\}$$

ist, so müssen nothwendig folgende Gleichungen Statt finden:

$$A' = \frac{A}{\lambda};\quad B' = \frac{B - A'}{\lambda};\quad C' = \frac{C - B'}{\lambda};\quad D' = \frac{D - C'}{\lambda};\ldots$$

$$M' = \frac{M - L'}{\lambda} \text{ und } M' = N.$$

Man wird demnach erhalten:

$$A' = \frac{A}{\lambda}$$

$$B' = \frac{B}{\lambda} - \frac{A}{\lambda^2}$$

$$C' = \frac{C}{\lambda} - \frac{B}{\lambda^2} + \frac{A}{\lambda^3}$$

$$D' = \frac{D}{\lambda} - \frac{C}{\lambda^2} + \frac{B}{\lambda^3} - \frac{A}{\lambda^4}$$

. . . . . .

$$M' = \frac{M}{\lambda} - \frac{L}{\lambda^2} + \frac{K}{\lambda^3} - \ldots. \pm \frac{A}{\lambda^n} \text{ und}$$

$$o = \frac{N}{\lambda} - \frac{M}{\lambda^2} + \frac{L}{\lambda^3} - \ldots. \mp \frac{A}{\lambda^{n+1}},$$

wo man aus der letzten Gleichung die Größe λ entwickeln muß, welche Gleichung folgende Form annimmt:

$$-A - B\lambda + C\lambda^2 - D\lambda^3 + E\lambda^4 - \ldots \pm N\lambda^n = o,$$

und da hieraus n Werthe für λ gefunden werden, so ergeben sich auch eben so viele Multiplicatoren.

Wir wollen nun sehen, wie sich diese Bestimmungen für die einzelnen Werthe des Exponenten n verhalten.

I. Für $n = 1$ wird $A - B\lambda = o$, dann aber ist

$$A' = \frac{A}{\lambda} = B.$$

II. Für $n = 2$ wird $A - B\lambda + C\lambda^2 = o$, dann aber ist

$$A' = \frac{A}{\lambda} = B - C\lambda \text{ und } B' = \frac{B\lambda - A}{\lambda^2} = C.$$

III. Für $n = 3$ wird $A - B\lambda + C\lambda^2 - D\lambda^3 = o$, dann aber ist

$$A' = \frac{A}{\lambda} = B - C\lambda + D\lambda^2;$$

$$B' = \frac{B\lambda - A}{\lambda^2} = C - D\lambda \text{ und}$$

$$C' = \frac{C\lambda^2 - B\lambda + A}{\lambda^3} = D.$$

IV. Für $n = 4$ wird $A - B\lambda + C\lambda^2 - D\lambda^3 + E\lambda^4 = 0$, nn aber iſt

$$A' = \frac{A}{\lambda} = B - C\lambda + D\lambda^2 - E\lambda^3$$

$$B' = \frac{B\lambda - A}{\lambda^2} = C - D\lambda + E\lambda^2$$

$$C' = \frac{C\lambda^2 - B\lambda + A}{\lambda^3} = D - E\lambda$$

$$D' = \frac{D\lambda^3 - C\lambda^2 + B\lambda - A}{\lambda^4} = E.$$

V. Für $n = 5$ wird $A - B\lambda + C\lambda^2 - D\lambda^3 + E\lambda^4 - F\lambda^5 = 0$, nn aber iſt

$$A' = \frac{A}{\lambda} = B - C\lambda + D\lambda^2 - E\lambda^3 + F\lambda^4$$

$$B' = \frac{B\lambda - A}{\lambda^2} = C - D\lambda + E\lambda^2 - F\lambda^3$$

$$C' = \frac{C\lambda^2 - B\lambda + A}{\lambda^3} = D - E\lambda + F\lambda^2$$

$$D' = \frac{D\lambda^3 - C\lambda^2 + B\lambda - A}{\lambda^4} = E - F\lambda$$

$$E' = \frac{E\lambda^4 - D\lambda^3 + C\lambda^2 - B\lambda + A}{\lambda^5} = F$$

d ſo weiter fort.

Hat man aber den Multiplicator $e^{\lambda x} dx$ gefunden, ſo wird das te Glied der Gleichung $= \int e^{\lambda x} X dx$, und die vorgelegte Gleichung, lche eine Differenzialgleichung des n^{ten} Grades iſt, wird durch Inration auf folgende, um einen Grad niedrigere Gleichung zurückführt:

$$\lambda x X dx = e^{\lambda x}\left[A'y + B'\frac{dy}{dx} + C'\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots + \frac{M'd^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right].$$

Zuſatz 1.

§. 1139. Hat man alſo dieſe erſte Integration ausgeführt, ſo rd die vorgelegte Gleichung um einen Grad niedriger, und wenn : Coefficienten A', B', C' ... aus den obigen Formeln beſtimmt ıd, ſo kann die Integralgleichung unter folgender Form dargeſtellt erden:

$$-\lambda x \int e^{\lambda x} X dx = A'y + B'\frac{dy}{dx} + C'\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots + \frac{M'd^{n-1}y}{dx^{n-1}}.$$

Zuſatz 2.

§. 1140. Da das erſtere Glied $e^{-\lambda x} \int e^{\lambda x} X dx$ eine Function von x iſt, welche eine willkürliche Conſtante mit ſich führt, ſo hat dieſe Gleichung, wenn ſtatt jener Function X' geſchrieben wird, eine ähnliche Form wie die vorgelegte Gleichung ſelbſt, und kann daher nach derſelben Methode von Neuem integrirt und auf eine Differenzialgleichung des $(n-2)^{ten}$ Grades zurückgeführt werden, welche folgende Geſtalt haben wird:

$$X'' = A''y + B''\frac{dy}{dx} + C''\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots + L''\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}.$$

Zuſatz 3.

§. 1141. Geht man auf dieſe Weiſe fort, ſo wird man endlich auf die Differenzialgleichung des erſten Grades

$$X^{(n-1)} = A^{(n-1)}y + B^{(n-1)}\frac{dy}{dx}$$

kommen, welche auf ähnliche Weiſe auf die endliche Gleichung $X^{(n)} = A^{(n)}y$ zurückgeführt wird, durch welche die zwiſchen den Veränderlichen x und y beſtehende Relation ausgedrückt wird.

Anmerkung.

§. 1142. Dieſes iſt alſo die Methode, ſolche Differenzialgleichungen höherer Grade ſtufenweiſe durch die einzelnen Grade zu integriren, wobey eben ſo viele Integrationen erforderlich ſind, vom wie vielten Grade die vorgelegte Differenzialgleichung iſt. Die ganze Rechnung beruht demnach in der ſucceſſiven Auffindung der Coefficienten, welche man mit Hülfe des Multiplicators aus dem Vorhergehenden beſtimmen muß. Zwar iſt im Allgemeinen das Geſetz, nach welchem die Coefficienten immer aus den vorhergehenden gefunden werden, nicht ſo einleuchtend, daß man hieraus die Form des letzten Integralausdrucks erkennen könnte; allein weil wir im obigen Kapitel geſehen haben, daß in dem Falle, in welchem das erſte Glied X verſchwindet, auch das letzte Integrale nach einem ziemlich einfachen Geſetze erhalten werde, ſo vermuthen wir mit Recht, daß dieß auch hier der Fall ſeyn werde, und wir werden jenes Geſetz gar leicht erkennen, wenn wir allmählich von den niedrigeren Graden zu den höhern übergehen. Im erſten Falle, in welchem die Differenzialgleichung

$$X = Ay + B\frac{dy}{dx}$$

vom ersten Grade ist, wird $e^{\lambda x} dx$ der Multiplicator seyn, wenn $A - \lambda B = o$, also $\lambda = \frac{A}{B}$ gesetzt wird, und weil $A' = \frac{A}{\lambda} = B$ ist, so wird das Integrale seyn:

$$\int e^{\lambda x} X dx = B e^{\lambda x} y \quad \text{oder} \quad e^{-\lambda x} \int e^{\lambda x} X dx = By.$$

Auf diese Weise wollen wir die Gleichungen höherer Grade entwickeln und die Form des letzten Integrals aufsuchen.

Aufgabe 149.

§. 1143. Die Differenzialgleichung des zweyten Grades

$$X = Ay + B \frac{dy}{dx} + C \frac{d^2 y}{dx^2}$$

sey gegeben, man bestimme die zwischen x und y bestehende Relation durch eine doppelte Integration.

Auflösung.

Sey $e^{\lambda x} dx$ der Multiplicator, durch welchen diese Gleichung integrabel gemacht wird, so wird

$$A - B\lambda + C\lambda^2 = o$$

seyn, dann nehme man

$$A' = \frac{A}{\lambda} = B - C\lambda \quad \text{und} \quad B' = \frac{B\lambda - A}{\lambda^2} = C,$$

und wenn

$$e^{-\lambda x} \int e^{\lambda x} X dx = X'$$

gesetzt wird, so ist die Gleichung nach der ersten Integration

$$X' = A'y + B' \frac{dy}{dx}$$

Nun sey für diese Gleichung $e^{\mu x} dx$ der Multiplicator, so wird $A' - B'\mu = o$, und wenn $A'' = \frac{A'}{\mu} = B'$ genommen, und $e^{-\mu x} \int e^{\mu x} X' dx = X''$ gesetzt wird, so werden wir erhalten $X'' = A''y$, welche Gleichung durch zweymahlige Integration erhalten wurde, und welche die zwischen x und y gesuchte Relation ausdrückt.

Da also hier $A'' = B'$ und $B' = C$ ist, so wird $A'' = C$ seyn; substituirt man ferner für A' und B' die Werthe, so nimmt die

Gleichung $A' - B'\mu = o$ folgende Form an:

$$B - C\lambda - C\mu = o \quad \text{oder} \quad B - C(\lambda + \mu) = o.$$

Da nun hieraus $\lambda + \mu = \frac{B}{C}$ gefunden wird, so ist einleuchtend, daß $\lambda + \mu$ der Summe der beyden Wurzeln der Gleichung

$$A - B\lambda + C\lambda^2 = o$$

gleich sey. Weil also λ eine Wurzel dieser Gleichung ist, so bezeichnet μ nothwendig die andere Wurzel derselben. Wenn wir daher aus der vorgelegten Gleichung, wie wir es im vorhergehenden Kapitel gethan haben, die Gleichung

$$A + Bz + Cz^2 = o$$

bilden, so werden $z = -\lambda$ und $z = -\mu$ die Wurzeln derselben seyn, oder wenn wir $C(\alpha + z)(\beta + z)$ als die Factoren derselben annehmen, so werden die Buchstaben α und β die Werthe λ und μ vorstellen. Da nun

$$X' = e^{-\alpha x} \int e^{\alpha x} X dx$$

ist, so wird man erhalten:

$$X'' = e^{-\beta x} \int e^{(\beta-\alpha)x} dx \int e^{\alpha x} X dx.$$

Es ist aber

$$\int e^{(\beta-\alpha)x} dx \int e^{\alpha x} X dx =$$

$$= \frac{1}{\beta-\alpha} e^{(\beta-\alpha)x} \int e^{\alpha x} X dx - \frac{1}{\beta-\alpha} \int e^{\beta x} X dx,$$

und hieraus folgern wir:

$$X'' = \frac{1}{\beta-\alpha} e^{-\alpha x} \int e^{\alpha x} X dx + \frac{1}{\alpha-\beta} e^{-\beta x} \int e^{\beta x} X dx.$$

Es ist demnach das vollständige Integrale der vorgelegten Gleichung

$$Cy = \frac{1}{\beta-\alpha} e^{-\alpha x} \int e^{\alpha x} X dx + \frac{1}{\alpha-\beta} e^{-\beta x} \int e^{\beta x} X dx,$$

wo die Größen α und β so genommen werden müssen, daß

$$A + Bz + Cz^2 = C(\alpha + z)(\beta + z)$$

wird.

Zusatz 1.

§. 1144. Sind diese beyden Factoren einander gleich, oder ist $\beta = \alpha$, so wird

$$X'' = e^{-\alpha x} \int dx \int e^{\alpha x} X dx =$$
$$= e^{-\alpha x} x \int e^{\alpha x} X dx - e^{-\alpha x} \int e^{\alpha x} X x dx;$$

nd daher iſt für den Fall, in welchem

$$A + Bz + Cz^2 = C(\alpha + z)^2$$

t, das Integrale unſerer Gleichung

$$Cy = e^{-\alpha x}(x \int e^{\alpha x} X dx - \int e^{\alpha x} X x dx).$$

Zuſatz 2.

§. 1145. Werden beyde Factoren imaginär, welches der Fall t, wenn

$$A + Bz + Cz^2 = C(f^2 + 2fz \cos.\theta + z^2),$$

o wird

$\alpha = f(\cos.\theta + \sqrt{-1} \sin.\theta)$ und $\beta = f(\cos.\theta - \sqrt{-1} \sin.\theta)$,

nd daher iſt

$$e^{\alpha x} = e^{fx \cos.\theta}(\cos. fx \sin.\theta + \sqrt{-1} \sin. fx \sin.\theta)$$

nd

$$e^{\beta x} = e^{fx \cos.\theta}(\cos. fx \sin.\theta - \sqrt{-1} \sin. fx \sin.\theta)$$

nd

$$\beta - \alpha = -2\sqrt{-1} f \sin.\theta.$$

Zuſatz 3.

§. 1146. Um nun dieſe Ausdrücke leichter ſubſtituiren zu können, ſey Kürze halber

$e^{fx \cos.\theta} = m$; $\cos. fx \sin.\theta = p$ und $\sin. fx \sin.\theta = q$,

o daß

$$e^{\alpha x} = mp + mq\sqrt{-1} \quad \text{und} \quad e^{\beta x} = mp - mq\sqrt{-1}$$

t. Man erhält demnach

$$\int e^{\alpha x} X dx = \int mpX dx + \int mqX dx \sqrt{-1} \quad \text{und}$$
$$\int e^{\beta x} X dx = \int mpX dx - \int mqX dx \sqrt{-1}.$$

Dann aber iſt

$$e^{-\alpha x} = \frac{p - q\sqrt{-1}}{m} \quad \text{und} \quad e^{-\beta x} = \frac{p + q\sqrt{-1}}{m}.$$

Zusatz 4.

§. 1147. Hieraus folgern wir:

$$e^{-\alpha x}\int e^{\alpha x} X dx = \frac{p}{m}\int m p X dx - \frac{q\sqrt{-1}}{m}\int m p X dx + \frac{p\sqrt{-1}}{m}\int m q X dx + \frac{q}{m}\int m q X dx,$$

und wenn $\sqrt{-1}$ negativ genommen wird, so kommt

$$e^{-\beta x}\int e^{\beta x} X dx$$

zum Vorschein, und nach Subtraction dieses Ausdruckes bleibt

$$-\frac{2q\sqrt{-1}}{m}\int m p X dx + \frac{2p\sqrt{-1}}{m}\int m q X dx,$$

welcher Rest theilbar seyn muß durch

$$\beta - \alpha = -2\sqrt{-1}\, f \sin.\theta.$$

Hieraus ergibt sich nun das Integrale

$$Cy = \frac{q}{m \sin.\theta}\int m p X dx - \frac{p}{m \sin.\theta}\int m q X dx.$$

Zusatz 5.

§. 1148. Werden die für m, p und q angenommenen Werthe wieder substituirt, so wird, wenn

$$A + Bz + Cz^2 = C(f^2 + 2fz\cos.\theta + z^2)$$

ist, das Integrale unserer Gleichung seyn:

$$Cy = e^{-fx\cos.\theta}\left[\frac{\sin. fx \sin.\theta}{\sin.\theta}\int e^{fx\cos.\theta} X dx \cos. fx \sin.\theta - \frac{\cos. fx \sin.\theta}{\sin.\theta}\int e^{fx\cos.\theta} X dx \sin. fx \sin.\theta\right],$$

welcher Ausdruck also jenem gleich ist, wenn α und β imaginäre Werthe erhalten.

Aufgabe 150.

§. 1149. Die Differenzialgleichung des dritten Grades

$$X = Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} + D\frac{d^3y}{dx^3}$$

sey gegeben; man bestimme das vollständige Integrale derselben durch eine dreyfache Integration.

Auflöſung.

Wird $e^{\lambda x} dx$ als Multiplicator angenommen, ſo muß

$$A - B\lambda + C\lambda^2 - D\lambda^3 = 0$$

ſeyn; dann nehme man

$$A' = B - C\lambda + D\lambda^2;$$
$$B' = C - D\lambda \text{ und}$$
$$C' = D;$$

und ſetzt man endlich

$$e^{-\lambda x} \int e^{\lambda x} X dx = X',$$

ſo gibt die Gleichung nach der erſten Integration

$$X' = A'y + B' \frac{dy}{dx} + C' \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Man nehme ferner an, der Multiplicator dieſer Gleichung ſey $e^{\mu x} dx$, ſo daß

$$A' - B'\mu + C'\mu^2 = 0$$

wird, und nehme

$$A'' = B' - C'\mu \text{ und } B'' = C',$$

ſo wird, wenn

$$e^{-\mu x} \int e^{\mu x} X' dx = X''$$

geſetzt wird, die zweyte Integralgleichung folgende ſeyn:

$$X'' = A''y + B'' \frac{dy}{dx},$$

deren Multiplicator $e^{\nu x} dx$ ſeyn wird, indem man $A'' - B''\nu = 0$ annimt, und wenn $A''' = B''$ geſetzt wird, ſo erhält man als dritte Integralgleichung

$$e^{-\nu x} \int e^{\nu x} X'' dx = A'''y = Dy;$$

Man muß alſo die Größen λ, μ und ν ſuchen; es iſt aber erſtens

$$A - B\lambda + C\lambda^2 - D\lambda^3 = 0, \text{ dann}$$
$$B - C(\lambda + \mu) + D(\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2) = 0,$$

und weil

$$A'' = C - D(\lambda + \mu) \text{ und } B'' = D$$

iſt, ſo wird drittens

$$C - D(\lambda + \mu + \nu) = 0.$$

Aus dieſer letztern Gleichung erhellet, daß $\lambda + \mu + \nu$ die Summe

der Wurzeln der erſtern Gleichung gleich ſey, wobey λ die eine W iſt; daß aber μ und ν die beyden übrigen Wurzeln bezeichnen, man auf folgende Art: Man betrachte die Gleichung

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 = 0.$$

Wenn nun $z = -\lambda$ eine Wurzel oder $\lambda + z$ ein Factor ſelben iſt, ſo dividire man durch dieſen die Gleichung, und man erhalten:

$$Dz^2 + (C - D\lambda)\, z + B - C\lambda + D\lambda^2 = 0,$$

welches unſere zweyte Gleichung

$$C'z^2 + B'z + A' = 0$$

iſt, deren Wurzeln $z = -\mu$ und $z = -\nu$ ſind, oder deren toren $\mu + z$ und $\nu + z$ ſind, wie wir in der vorhergehenden gabe nachgewieſen haben. Hat demnach die Formel

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3$$

die Factoren

$$D\,(\alpha + z)\,(\beta + z)\,(\gamma + z),$$

ſo ſetze man zur Auffindung des letzten Integrals

$$e^{-\alpha x} \int e^{\alpha x} X\,dx = X';$$

$$e^{-\beta x} \int e^{\beta x} X'\,dx = X'' \quad \text{und}$$

$$e^{-\gamma x} \int e^{\gamma x} X''\,dx = X''';$$

ſo wird

$$Dy = X'''.$$

Allein durch die Reduction der Integralien erhalten wir, wi oben geſehen haben

$$X'' = \frac{1}{\beta - \alpha} e^{-\alpha x} \int e^{\alpha x} X\,dx + \frac{1}{\alpha - \beta} e^{-\beta x} \int e^{\beta x} X$$

und hieraus ferner

$$\int e^{\gamma x} X''\,dx = \frac{1}{(\beta-\alpha)\,(\gamma-\alpha)} e^{(\gamma-\alpha)x} \int e^{\alpha x} X\,dx -$$

$$- \frac{1}{(\beta-\alpha)\,(\gamma-\alpha)} \int e^{\gamma x} X\,dx + \frac{1}{(\alpha-\beta)\,(\gamma-\beta)} e^{(\gamma-\beta)x} \int e^{\beta x}$$

$$- \frac{1}{(\alpha-\beta)\,(\gamma-\beta)} \int e^{\gamma x} X$$

wo die beyden letzten Glieder in folgenden Ausdruck

$$\frac{1}{(\alpha-\gamma)\,(\beta-\gamma)} \int e^{\gamma x} X\,dx$$

ammen gezogen werden. Das gesuchte Integrale wird demnach
s:

$$y = \frac{e^{-\alpha x}\int e^{\alpha x} X dx}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)} + \frac{e^{-\beta x}\int e^{\beta x} X dx}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)} + \frac{e^{-\gamma x}\int e^{\gamma x} X dx}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}.$$

Zusatz 1.

§. 1150. Wenn die Formel

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3$$

ey gleiche Factoren hat, wenn nämlich $\gamma = \beta$ ist, so wird man
alten:

$$\int X'' dx = \frac{1}{(\beta-\alpha)^2} e^{(\beta-\alpha)x} \int e^{\alpha x} X dx -$$
$$- \frac{1}{(\beta-\alpha)^2} \int e^{\beta x} X dx + \frac{1}{\alpha-\beta} x \int e^{\beta x} X dx$$
$$- \frac{1}{\alpha-\beta} \int e^{\beta x} X x dx,$$

) daher wird in diesem Falle das Integrale seyn:

$$y = \frac{e^{-\alpha x}\int e^{\alpha x} X dx - e^{-\beta x}\int e^{\beta x} X dx}{(\beta-\alpha)^2} +$$
$$+ \frac{e^{-\beta x} x \int e^{\beta x} X dx - e^{-\beta x}\int e^{\beta x} X x dx}{\alpha-\beta}.$$

Zusatz 2.

§. 1151. Sind alle drey Factoren einander gleich, oder ist
$= \beta = \gamma$, so wird man finden:

$$e^{\alpha x} X'' = \int dx \int e^{\alpha x} X dx = x\int e^{\alpha x} X dx - \int e^{\alpha x} X x dx$$

)

$$e^{\alpha x} X''' = \int e^{\alpha x} X'' dx = \int dx \int dx \int e^{\alpha x} X dx$$

r

$$X''' = \tfrac{1}{2} x^2 \int e^{\alpha x} X dx - x\int e^{\alpha x} X x dx + \tfrac{1}{2}\int e^{\alpha x} X x^2 dx,$$

glich wird in diesem Falle das Integrale seyn:

$$y = \tfrac{1}{2} e^{-\alpha x}(x^2 \int e^{\alpha x} X dx - 2x\int e^{\alpha x} X x dx + \int e^{\alpha x} X x^2 dx)$$

r

$$Dy = e^{-\alpha x} \int dx \int dx \int e^{\alpha x} X dx.$$

Anmerkung.

§. 1152. Werden die Integralien nicht reducirt, so läßt sich das Integrale unserer Gleichung im Allgemeinen auch so darstellen, daß

$$Dy = e^{-\gamma x} \int e^{(\gamma-\beta)x} dx \int e^{(\beta-\alpha)x} dx \int e^{\alpha x} X dx$$

wird, wenn man setzt:

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 = D(\alpha + z)(\beta + z)(\gamma + z),$$

wobey sich der besonders merkwürdige Fall ereignet, daß die drey Größen α, β und γ wie immer unter einander vertauscht werden können, so daß dieser Integralausdruck sechs Veränderungen zuläßt. Auch bey dem vorhergehenden Probleme, wo nur zwey Factoren

$$C(\alpha + z)(\beta + z) = A + Bz + Cz^2$$

vorkommen, kann das vollständige Integrale der Gleichung

$$X = Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2}$$

auf folgende Art dargestellt werden:

$$Cy = e^{-\beta x} \int e^{(\beta-\alpha)x} dx \int e^{\alpha x} X dx,$$

und wenn die Größen α und β mit einander vertauscht werden, auch auf folgende Art:

$$Cy = e^{-\alpha x} \int e^{(\alpha-\beta)x} dx \int e^{\beta x} X dx.$$

Hat man die Gleichheit dieser Formeln eingesehen, wovon man sich durch einen Versuch leicht überzeugen kann, so klärt diese auch die Veränderung der vorhergehenden Ausdrücke auf. Denn es sey

$$e^{-\alpha x} \int e^{\alpha x} X dx = X',$$

so wird man für die obige Formel erhalten:

$$Dy = e^{-\gamma x} \int e^{(\gamma-\beta)x} dx \int e^{\beta x} X' dx,$$

und da diesem Ausdrucke folgender

$$Dy = e^{-\beta x} \int e^{(\beta-\gamma)x} dx \int e^{\gamma x} X' dx$$

gleich ist, so wird auch, nach Herstellung des Werthes von X'

$$Dy = e^{-\beta x} \int e^{(\beta-\gamma)x} dx \int e^{(\gamma-\alpha)x} dx \int e^{\alpha x} X dx$$

seyn, welcher Ausdruck von dem erstern nur dadurch unterschieden ist, daß die Buchstaben β und γ mit einander verwechselt sind. Daß aber auch die Buchstaben β und γ mit α vertauscht werden können, läßt

auf dieſe Weiſe nicht ſo leicht zeigen, iſt aber mit Berückſichtigung in der Auflöſung gebrauchten Reduction, und der Natur der Auf- ung ſelbſt gemäß für ſich klar.

Aufgabe 151.

§. 1153. Sey gegeben die Differenzialgleichung 3 vierten Grades

$$X = Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} + D\frac{d^3y}{dx^3} + E\frac{d^4y}{dx^4},$$

bey das Element dx conſtant geſetzt iſt, und wo X jend eine Function von x bezeichnet; man ſuche das tegrale derſelben.

Auflöſung.

Man nehme den algebraiſchen Ausdruck

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 = P,$$

lcher ſich aus der vorgelegten Gleichung leicht bilden läßt, zu Hülfe, e dieſen in ſeine einfachen Factoren auf, ſo daß

$$P = E(\alpha + z)(\beta + z)(\gamma + z)(\delta + z),$$

wird der Multiplicator, der unſere Gleichung integrabel macht, $^{\lambda}dx$ ſeyn, wenn man λ einer der Größen α, β, γ, δ gleich mt. Man ſetze alſo $\lambda = \alpha$, ſo daß $e^{\alpha x}dx$ der Multiplicator d, und ſetze

$$e^{-\alpha x}\int e^{\alpha x} X dx = X'$$

wird die erſte Integralgleichung ſeyn:

$$X' = A'y + B'\frac{dy}{dx} + C'\frac{d^2y}{dx^2} + D'\frac{d^3y}{dx^3},$$

die Coefficienten A', B', C', D' ſo beſtimmt werden, daß

$$= \frac{A}{\alpha};\quad B' = \frac{-A + B\alpha}{\alpha^2};\quad C' = \frac{C\alpha^2 - B\alpha + A}{\alpha^3};$$

$$D' = \frac{D\alpha^3 - C\alpha^2 + B\alpha - A}{\alpha^4},$$

r

$$A' = \frac{A}{\alpha};\quad B' = \frac{B - A'}{\alpha};\quad C' = \frac{C - B'}{\alpha};\quad D' = \frac{D - C'}{\alpha};$$

r auch

$$= A'\alpha;\quad B = B'\alpha + A';\quad C = C'\alpha + B';\quad D = D'\alpha + C'.$$

Setzt man

$$A' + B'z + C'z^2 + D'z^3 = Q,$$

so erhellt aus diesen Bestimmungen, daß diese Formel Q aus d Ausdrucke für P entstehe, wenn man diesen durch $\alpha + z$ dividirt, daß

$$Q = \frac{P}{\alpha + z} = E\,(\beta + z)\,(\gamma + z)\,(\delta + z)$$

wird. Auf diese Weise wollen wir also die zweyte Integration i Hülfe des Multiplicators $e^{\beta x}dx$ ausführen, so wird, wenn man

$$e^{-\beta x}\int e^{\beta x}\,X'dx = X''$$

setzt, die Integralgleichung seyn:

$$X'' = A''y + B''\frac{dy}{dx} + C''\frac{d^2y}{dx^2},$$

wenn die Coefficienten A'', B'', C'' so genommen werden, daß

$$A'' + B''z + C''z^2 = \frac{P}{(\alpha + z)\,(\beta + z)} = E\,(\gamma + z)\,(\delta +$$

Integrirt man ferner mit Hülfe des Multiplicators $e^{\gamma x}dx$ v Neuem, so werden wir, indem

$$e^{-\gamma x}\int e^{\gamma x}\,X''dx = X'''$$

gesetzt wird, finden:

$$X''' = A'''y + B'''\frac{dy}{dx},$$

wobey die Relation Statt findet, daß

$$A''' + B'''z = \frac{P}{(\alpha + z)\,(\beta + z)\,(\gamma + z)} = E\,(\delta + z)$$

ist. Endlich findet man mit Hülfe des Multiplicators $e^{\delta x}dx$, wen der Ausdruck

$$e^{-\delta x}\int e^{\delta x}\,X'''dx = X^{IV}$$

gesetzt wird, das letzte Integrale

$$X^{IV} = A^{IV}y, \quad \text{wobey} \quad A^{IV} = E \quad \text{ist.}$$

Läßt man alle diese Relationen zusammen bestehen, so wird da gesuchte Integrale seyn:

$$Ey = e^{-\delta x}\int e^{(\delta-\gamma)x}dx\int e^{(\gamma-\beta)x}dx\int e^{(\beta-\alpha)x}dx\int e^{\alpha x}Xdx$$

welcher Ausdruck nun ohne alle Umschweife mittelst der Auflösung d Grundformel

$$P = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4$$

in Factoren, nämlich

$$P = E(\alpha + z)(\beta + z)(\gamma + z)(\delta + z)$$

ausgemittelt werden kann, wobey zu bemerken ist, daß für Ey immer derselbe Werth zum Vorschein kommen müsse, wie man auch immer die Ordnung der Größen α, β, γ, δ verändern mag.

Zusatz 1.

§. 1154. Da

$$X' = e^{-\alpha x} \int e^{\alpha x} X dx$$

ist, so wird, wie wir bereits gesehen haben, folgende Gleichung Statt finden:

$$X'' = e^{-\beta x} \int e^{\beta x} X' dx$$

$$= e^{-\beta x} \left[\frac{e^{(\beta-\alpha)x}}{\beta - \alpha} \int e^{\alpha x} X dx - \frac{1}{\beta - \alpha} \int e^{\beta x} X dx \right],$$

oder

$$X'' = \frac{e^{-\alpha x} \int e^{\alpha x} X dx}{\beta - \alpha} + \frac{e^{-\beta x} \int e^{\beta x} X dx}{\alpha - \beta}.$$

Zusatz 2.

§. 1155. Weil ferner $X''' = e^{-\gamma x} \int e^{\gamma x} X'' dx$ ist, so wird man durch eine ähnliche Reduction erhalten:

$$X''' = \frac{e^{-\alpha x} \int e^{\alpha x} X dx}{(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)} + \frac{e^{-\gamma x} \int e^{\gamma x} X dx}{(\beta - \alpha)(\alpha - \gamma)}$$

$$+ \frac{e^{-\beta x} \int e^{\beta x} X dx}{(\alpha - \beta)(\gamma - \beta)} + \frac{e^{-\gamma x} \int e^{\gamma x} X dx}{(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)},$$

welcher Ausdruck sich auf folgende Form bringen läßt:

$$X''' = \frac{e^{-\alpha x} \int e^{\alpha x} X dx}{(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)} + \frac{e^{-\beta x} \int e^{\beta x} X dx}{(\alpha - \beta)(\gamma - \beta)} + \frac{e^{-\gamma x} \int e^{\gamma x} X dx}{(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)}.$$

Zusatz 3.

§. 1156. Auf ähnliche Weise wird hieraus der Werth von X^{IV} entwickelt, wobey es übrigens genügen würde, das erste Glied bestimmt zu haben, weil sich aus diesem die übrigen wegen der Permutabilität von selbst darbiethen. Auf diese Weise wird das Integrale unserer Gleichung unter folgender Form erscheinen:

$$Ey = \frac{e^{-\alpha x}\int e^{\alpha x} X dx}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\delta-\alpha)} + \frac{e^{-\beta x}\int e^{\beta x} X dx}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)(\delta-\beta)}$$
$$+ \frac{e^{-\gamma x}\int e^{\gamma x} X dx}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\delta-\gamma)} + \frac{e^{-\delta x}\int e^{\delta x} X dx}{(\alpha-\delta)(\beta-\delta)(\gamma-\delta)}.$$

Anmerkung.

§. 1157. Sind zwey oder mehrere Wurzeln einander gleich od imaginär, so erfordern die gefundenen Integralien eine Transform tion, welche wir sogleich aufsuchen wollen. Diese letztere Form schei geeigneter zu seyn, um aus ihr Transformationen ableiten zu können

Wenn $\delta = \gamma$ ist, so erfordern, wegen der Gleichheit der Fact ren, die beyden letzten Glieder allein eine Reduction, und um diese z finden, setze man $\delta = \gamma - \omega$, so wird das vorletzte Glied seyn:

$$-\frac{e^{-\gamma x}\int e^{\gamma x} X dx}{\omega(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}.$$

Rücksichtlich des letzten Gliedes aber ist zu bemerken, daß

$$\frac{1}{\alpha-\delta} = \frac{1}{\alpha-\gamma+\omega} = \frac{1}{\alpha-\gamma} - \frac{\omega}{(\alpha-\gamma)^2} \text{ und}$$

$$\frac{1}{\beta-\delta} = \frac{1}{\beta-\gamma} - \frac{\omega}{(\beta-\gamma)^2}, \text{ also}$$

$$\frac{1}{(\alpha-\delta)(\beta-\delta)} = \frac{1}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)} + \frac{\omega(2\gamma-\alpha-\beta)}{(\alpha-\gamma)^2(\beta-\gamma)^2},$$

und daher ist:

$$\frac{1}{(\alpha-\delta)(\beta-\delta)(\gamma-\delta)} = \frac{1}{\omega(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)} + \frac{2\gamma-\alpha-\beta}{(\alpha-\gamma)^2(\beta-\gamma)^2}.$$

Dann aber wird man für den Zähler erhalten:

$$e^{-\delta x} = e^{-\gamma x}(1+\omega x) \text{ und}$$

$$e^{\delta x} = e^{\gamma x}(1-\omega x), \text{ folglich:}$$

$$e^{-\delta x}\int e^{\delta x} X dx = e^{-\gamma x}\int e^{\gamma x} X dx + e^{-\gamma x}\omega x \int e^{\gamma x} X dx$$
$$- \omega e^{-\gamma x}\int e^{\gamma x} X x dx;$$

und die beyden letzten Glieder gehen, weil die durch ω dividirten Theile sich aufheben, über in folgende Form:

$$-\frac{(2\gamma-\alpha-\beta)\, e^{-\gamma x}\int e^{\gamma x} X dx}{(\alpha-\gamma)^2(\beta-\gamma)^2}$$
$$+ \frac{e^{-\gamma x} x \int e^{\gamma x} X dx - e^{-\gamma x}\int e^{\gamma x} X x dx}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)},$$

welcher Ausdruck auch aus der ersten Formel erhalten wird. Auf dieselbe Weise kann das Problem allgemein aufgelöst werden.

Aufgabe 152.

§. 1158. Sey gegeben die Differenzialgleichung irgend eines Grades:

$$X = Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} + D\frac{d^3y}{dx^3} + \ldots + N\frac{d^ny}{dx^n},$$

wobey das Element dx constant genommen ist, und X irgend eine Function von x bezeichnet; man bestimme das Integrale derselben.

Auflösung.

Man bilde aus dieser Gleichung die algebraische Formel

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots + Nz^n = P,$$

oder, wenn man diese in die einfachen Factoren auflöst:

$$P = N(\alpha + z)(\beta + z)(\gamma + z)\ldots(\nu + z),$$

deren Anzahl gleich n ist. Wenn wir nun auf ähnliche Weise mittelst einzelner Integrationen immer weiter gehen, so werden wir endlich auf folgende letzte Integralgleichung kommen:

$$Ny = e^{-\nu x}\int e^{(\nu-\mu)x}dx\int e^{(\mu-\lambda)x}dx\int\ldots\int e^{(\beta-\alpha)x}dx\int e^{\alpha x}Xdx,$$

oder, weil wir die Factoren auch unter einander verwechseln können,

$$Ny = e^{-\alpha x}\int e^{(\alpha-\beta)x}dx\int e^{(\beta-\gamma)x}dx\int\ldots\int e^{(\mu-\nu)x}dx\int e^{\nu x}Xdx.$$

Allein dieser Ausdruck läßt sich durch ähnliche Reductionen, wie wir sie oben gebraucht haben, in nachstehende Theile auflösen, und zu deren bequemeren Darstellung sey Kürze halber

$$\begin{aligned}
(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\delta-\alpha)\ldots(\nu-\alpha) &= \alpha'\\
(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)(\delta-\beta)\ldots(\nu-\beta) &= \beta'\\
(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\delta-\gamma)\ldots(\nu-\gamma) &= \gamma'\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(\alpha-\nu)(\beta-\nu)(\gamma-\nu)\ldots(\mu-\nu) &= \nu',
\end{aligned}$$

und daher wird man erhalten:

$$Ny = \frac{1}{\alpha'}e^{-\alpha x}\int e^{\alpha x}Xdx + \frac{1}{\beta'}e^{-\beta x}\int e^{\beta x}Xdx$$
$$+\frac{1}{\gamma'}e^{-\gamma x}\int e^{\gamma x}Xdx + \ldots + \frac{1}{\nu'}e^{-\nu x}\int e^{\nu x}Xdx.$$

Damit man aber zur Auffindung der Werthe α', β', γ' ... nicht so viele Factoren mit einander zu multiplicíren braucht, so ist einleuchtend, daß, weil

$$\frac{P}{N(\alpha+z)} = (\beta+z)(\gamma+z)(\delta+z)\ldots(\nu+z)$$

ist, diese Formel den Werth von α' gebe, wenn man in derselben $z = -\alpha$ setzt; in diesem Falle aber verschwindet sowohl der Zähler als der Nenner des Bruches $\frac{P}{N(\alpha+z)}$, und daher wird sein Werth durch den Ausdruck $\frac{dP}{N dz}$ gegeben seyn.

Da also

$$P = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots + Nz^n$$

ist, so wird man erhalten:

$$\frac{dP}{dz} = B + 2Cz + 3Dz^2 + \ldots + nNz^{n-1},$$

welchen Ausdruck wir durch Q bezeichnen wollen. Hieraus geht nun hervor, daß

$\alpha' = \frac{Q}{N}$, wenn $z = -\alpha$ gesetzt wird,

$\beta' = \frac{Q}{N}$, » $z = -\beta$ » »

$\gamma' = \frac{Q}{N}$, » $z = -\gamma$ » »

. . . . . .

oder, es ergeben sich, weil nach Substitution dieser Werthe die Integralgleichung durch N getheilt werden kann, folgende Werthe:

$$B - 2C\alpha + 3D\alpha^2 - 4E\alpha^3 + \ldots \pm nN\alpha^{n-1} = \mathfrak{A},$$
$$B - 2C\beta + 3D\beta^2 - 4E\beta^3 + \ldots \pm nN\beta^{n-1} = \mathfrak{B},$$
$$B - 2C\gamma + 3D\gamma^2 - 4E\gamma^3 + \ldots \pm nN\gamma^{n-1} = \mathfrak{C},$$
. . . . . .
$$B - 2C\nu + 3D\nu^2 - 4E\nu^3 + \ldots \pm nN\nu^{n-1} = \mathfrak{N},$$

und nach Bestimmung dieser Werthe wird man zum vollständigen Integrale erhalten:

$$y = \frac{1}{\mathfrak{A}} e^{-\alpha x} \int e^{\alpha x} X dx + \frac{1}{\mathfrak{B}} e^{-\beta x} \int e^{\beta x} X dx + \frac{1}{\mathfrak{C}} e^{-\gamma x} \int e^{\gamma x} X dx \ldots$$

in wiefern man alle Factoren in Rechnung gebracht hat.

Zuſatz 1.

§. 1159. Da

$$\alpha' = \frac{\mathfrak{A}}{N}, \quad \beta' = \frac{\mathfrak{B}}{N}, \quad \gamma' = \frac{\mathfrak{C}}{N} \ldots$$

, ſo wird man erhalten:

$$\mathfrak{A} = N\alpha', \quad \mathfrak{B} = N\beta', \quad \mathfrak{C} = N\gamma' \ldots,$$

d weil

$$= A + Bz + Cz^2 + Dz^3 \ldots + Nz^n = N(\alpha+z)(\beta+z)(\gamma+z)\ldots(\nu+z),$$

wird auch

$$\mathfrak{A} = \frac{P}{\alpha+z}, \quad \text{wenn} \quad z = -\alpha \quad \text{geſetzt wird},$$

$$\mathfrak{B} = \frac{P}{\beta+z}, \quad \text{»} \quad z = -\beta \quad \text{»} \quad \text{»}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{P}{\gamma+z}, \quad \text{»} \quad z = -\gamma \quad \text{»} \quad \text{»}$$

d ſo weiter.

Zuſatz 2.

§. 1160. Wir erhalten demnach folgende Regel für die Auffin-ng des vollſtändigen Integrals der vorgelegten Gleichung:

$$X = Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} + D\frac{d^3y}{dx^3} + \ldots + N\frac{d^ny}{dx^n}.$$

Man bilde ſich aus dieſer Gleichung den algebraiſchen Ausdruck

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots + Nz^n = P,$$

he alle einfachen Factoren desſelben, welche wir durch

$$\alpha + z, \quad \beta + z, \quad \gamma + z, \quad \delta + z, \quad \ldots$$

eichnen wollen, und deren Anzahl durch die Zahl n gegeben iſt, n beſtimme man für dieſe einzelnen Factoren folgende conſtante ößen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$..., ſo daß

$$\mathfrak{A} = \frac{P}{\alpha+z}, \quad \text{wenn} \quad z = -\alpha \quad \text{geſetzt wird, oder}$$

$$\mathfrak{A} = B - 2C\alpha + 3D\alpha^2 - 4E\alpha^3 + \ldots \pm nN\alpha^{n-1}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{P}{\beta+z}, \quad \text{wenn} \quad z = -\beta \quad \text{geſetzt wird, oder}$$

$$\mathfrak{B} = B - 2C\beta + 3D\beta^2 - 4E\beta^3 + \ldots \pm nN\beta^{n-1}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{P}{\gamma+z}, \quad \text{wenn} \quad z = -\gamma \quad \text{geſetzt wird, oder}$$

$$\mathfrak{C} = B - 2C\gamma + 3D\gamma^2 - 4E\gamma^3 + \ldots \pm nN\gamma^{n-1}.$$

Nach Auffindung aller dieser Werthe wird das vollständige Integrale seyn:

$$y = \frac{1}{\mathfrak{A}} e^{-\alpha x} \int e^{\alpha x} X dx + \frac{1}{\mathfrak{B}} e^{-\beta x} \int e^{\beta x} X dx + \frac{1}{\mathfrak{C}} e^{-\gamma x} \int e^{\gamma x} X dx + \ldots,$$

welcher Ausdruck aus so vielen Theilen besteht, wie viele einfache Factoren die Formel P enthält.

Zusatz 3.

§. 1161. Da auf diese Weise das Integrale aus so vielen Theilen zusammengesetzt ist, von der wievielsten Ordnung die vorgelegte Differenzialgleichung ist, und jeder einzelne Theil bey der Integration eine willkürliche Constante aufnimmt, so ist offenbar das mit Hülfe dieser Regel gefundene Integrale das vollständige.

Anmerkung.

§. 1162. Die Integration solcher Differenzialgleichungen hat also weiter keine Schwierigkeit mehr, wenn sich nur von jenem durch P bezeichneten algebraischen Ausdrucke alle einfachen Factoren, oder was dasselbe ist, wenn sich alle n Wurzeln der algebraischen Gleichung

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots + Nz^n = 0$$

angeben lassen. Es können aber hier zwey Hauptfälle vorkommen, in welchen diese Integration sehr beschwerlich ist; wenn nämlich entweder zwey oder mehrere jener einfachen Factoren einander gleich, oder imaginär sind, in welchem letztern Falle jedoch nur die Unbequemlichkeit Statt findet, daß die einzelnen Theile des gefundenen Integrals imaginäre Ausdrücke enthalten, welche sich aber nach gehöriger Reduction gegenseitig tilgen. Im ersteren Falle aber werden die aus den gleichen Factoren entstandenen Theile sogar unendlich, allein sie sind mit verschiedenen Zeichen so behaftet, daß durch ihre Verbindung demungeachtet eine endliche Größe erhalten wird, deren Werth wir nur durch mehrere Umwege bestimmen können, wobey jedoch wohl zu bemerken ist, daß in beyden Fällen die Auffindung der übrigen Theile des Integrals, welche den ungleichen Factoren entsprechen, dadurch keineswegs gestört werde. Ich will jedoch in folgendem Probleme eine Methode aus einander setzen, welche diesem Zwecke entspricht.

Aufgabe 153.

§. 1163. Sey die Differenzialgleichung eines beliebigen Grades, nämlich

$$K = Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} + D\frac{d^3y}{dx^3} + E\frac{d^4y}{dx^4} + \ldots + N\frac{d^ny}{dx^n}$$

gegeben; wenn nun der hieraus gebildete algebraische Ausdruck

$$P = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \ldots + Nz^n$$

zwey oder mehrere gleiche einfache Factoren enthält, so soll man den sich hieraus ergebenden Theil des Integrals bestimmen.

Auflösung.

Es seyen zuerst zwey Factoren, nämlich $\alpha + z$ und $\beta + z$ einander gleich, oder es sey $\beta = \alpha$, der übrige Factor des Ausdruckes P aber sey $= Q$, so daß

$$P = (\alpha + z)(\beta + z)Q = (\alpha + z)^2 Q,$$

und es gehe Q in C über, wenn $z = -\alpha$ gesetzt wird. Nun betrachte man, wenigstens anfänglich, die Größen α und β als verschieden, mit Ausnahme der Größe C, welche immer dieselbe bleibt, und wir werden für die beyden Theile des Integrals, welche aus diesen zwey Factoren sich ergeben, erhalten:

$$\mathfrak{A} = (\beta - \alpha)C \quad \text{und} \quad \mathfrak{B} = (\alpha - \beta)C.$$

Die Theile des Integrals aber, welche hieraus entstehen, bezeichne man durch den Buchstaben v, so daß

$$(\beta - \alpha)Cv = e^{-\alpha x}\int e^{\alpha x} X\,dx - e^{-\beta x}\int e^{\beta x} X\,dx$$

wird, so finden wir dann durch Differenziation

$$(\beta - \alpha)C\,dv = -\alpha e^{-\alpha x}\,dx\int e^{\alpha x} X\,dx + \beta e^{-\beta x}\,dx\int e^{\beta x} X\,dx,$$

aus dieser Gleichung addire man die erstere, nachdem man sie durch dx multiplicirt hat, und man wird erhalten:

$$(\beta - \alpha)C\,dv + (\beta - \alpha)C\beta v\,dx = (\beta - \alpha)e^{-\alpha x}\,dx\int e^{\alpha x} X\,dx.$$

Dividirt man diese Gleichung durch $\beta - \alpha$, und multiplicirt sie mit $e^{-\alpha x}$, so gibt sie, weil $\beta = \alpha$ ist, zum Integrale

$$Ce^{\alpha x}v = \int dx\int e^{\alpha x} X\,dx.$$

Man muß deßhalb ſtatt der beyden Theile, welche aus den gleichen Factoren $\alpha + z$ und $\beta + z$ entſtehen, folgenden Ausdruck ſchreiben:

$$v = \frac{1}{\mathfrak{C}} e^{-\alpha x} \int dx \int e^{\alpha x} X dx,$$

wobey $\mathfrak{C}$ erhalten wird aus der Form

$$\frac{P}{(\alpha + z)^2}, \text{ wenn } z = -\alpha \text{ geſetzt wird.}$$

Nehmen wir nun an, die Formel P habe drey gleiche einfache Factoren, nämlich es ſey

$$(\alpha + z) = (\beta + z) = (\gamma + z),$$

welche wir aber anfänglich als verſchieden anſehen wollen. Nehmen wir alſo an, es ſey

$$P = (\alpha + z)(\beta + z)(\gamma + z) Q,$$

und es gehe Q in $\mathfrak{M}$ über für $z = -\alpha$, ſo werden wir für die Integraltheile erhalten:

$$\mathfrak{A} = (\beta - \alpha)(\gamma - \alpha) \mathfrak{M};$$
$$\mathfrak{B} = (\alpha - \beta)(\gamma - \beta) \mathfrak{M};$$
$$\mathfrak{C} = (\alpha - \gamma)(\beta - \gamma) \mathfrak{M}.$$

Bezeichnen wir demnach die geſuchte Summe der drey Integraltheile durch den Buchſtaben v, ſo werden wir erhalten:

$$\mathfrak{M} v = \frac{e^{-\alpha x} \int e^{\alpha x} X dx}{(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)} + \frac{e^{-\beta x} \int e^{\beta x} X dx}{(\alpha - \beta)(\gamma - \beta)} + \frac{e^{-\gamma x} \int e^{\gamma x} X dx}{(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)}.$$

Da nun

$$\frac{1}{(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)} + \frac{1}{(\alpha - \beta)(\gamma - \beta)} + \frac{1}{(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)} = 0$$

iſt, ſo erhält man durch Differenziation:

$$\frac{\mathfrak{M} dv}{dx} = \frac{-\alpha e^{-\alpha x} \int e^{\alpha x} X dx}{(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)} - \frac{\beta e^{-\beta x} \int e^{\beta x} X dx}{(\alpha - \beta)(\gamma - \beta)} - \frac{\gamma e^{-\gamma x} \int e^{\gamma x} X dx}{(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)},$$

und wenn man zu dieſer Gleichung die erſte, nachdem man ſie mit α multiplicirt hat, addirt, ſo erhält man:

$$\mathfrak{M} \left(\frac{dv}{dx} + \alpha v \right) = \frac{e^{-\beta x} \int e^{\beta x} X dx}{\gamma - \beta} + \frac{e^{-\gamma x} \int e^{\gamma x} X dx}{\beta - \gamma}.$$

Dieſe Gleichung differenzire man von neuem, wodurch man hält:

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{\alpha\, dv}{dx} = \frac{-\beta e^{-\beta x} \int e^{\beta x} X dx}{\gamma - \beta} - \frac{\gamma e^{-\gamma x} \int e^{\gamma x} X dx}{\beta - \gamma};$$

enn man nun zu dieſer Gleichung die obige, nach der Multiplication it α addirt, ſo entſteht die neue Gleichung:

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{2\alpha\, dv}{dx} + \alpha^2 v = e^{-\gamma x} \int e^{\gamma x} X dx = e^{-\alpha x} \int e^{\alpha x} X dx,$$

odurch nun alle Unbequemlichkeiten beſeitigt ſind.

Multiplicirt man jetzt mit $e^{\alpha x} dx$, ſo gibt die Integration

$$\mathfrak{M} e^{\alpha x} \left(\frac{dv}{dx} + \alpha v\right) = \int dx \int e^{\alpha x} X dx,$$

elche durch die Multiplication mit dx von neuem integrabel wird, id man findet

$$\mathfrak{M} e^{\alpha x} v = \int dx \int dx \int e^{\alpha x} X dx.$$

Enthält demnach die Formel P den kubiſchen Factor $(\alpha + z)^3$, ſuche man die Größe $\mathfrak{M}$, ſo daß

$$\mathfrak{M} = \frac{P}{(\alpha + z)^3} \quad \text{für} \quad z = -\alpha$$

rd, und der hieraus entſtehende Theil des Integrals wird ſeyn:

$$\frac{1}{\mathfrak{M}} e^{-\alpha x} \int dx \int dx \int e^{\alpha x} X dx.$$

Eben ſo wenn die Formel P vier gleiche Factoren hat, ſo daß

$$P = (\alpha + z)^4 Q$$

rd, nehme man

$$\mathfrak{M} = \frac{P}{(\alpha + z)^4} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{N} = Q \quad \text{für} \quad z = -\alpha,$$

d der entſprechende Theil des Integrals wird ſeyn:

$$\frac{1}{\mathfrak{N}} e^{-\alpha x} \int dx \int dx \int dx \int e^{\alpha x} X dx,$$

d ſo werden auch die Fälle, in welchen der Ausdruck P noch mehrere iche Factoren hat, leicht aufgelöſt werden *).

*) Dieſe ganze Auflöſung iſt fehlerhaft, weil, obgleich die Größen α, β, γ, ..., welche einander gleich geſetzt wurden, als verſchieden betrachtet werden, dennoch angenommen wird, daß die Größe $\mathfrak{M}$ für die einzelnen Glieder denſelben Werth beybehalte; denn denkt man ſich die Größen

Zuſatz 1.

§. 1164. Es iſt hier allerdings bemerkenswerth, daß die Ausdrücke

$$dv + \alpha v dx;$$
$$d^2v + 2\alpha dx dv + \alpha^2 v dx^2;$$
$$d^3v + 3\alpha dx d^2v + 3\alpha^2 dx^2 dv + \alpha^3 v^3 dx^3;$$

und allgemein die Formel

$$d^n v + \frac{n}{1}\alpha dx d^{n-1}v + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\alpha^2 dx^2 d^{n-2}v + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^3 dx^3 d^{n-3}v + \ldots$$

wenn man ſie einmahl mit $e^{\alpha x}$ multiplicirt, nach und nach die Integration ſo oft zulaſſen, als der Index n Einheiten enthält, ſo daß man zuletzt auf das Integrale $e^{\alpha x}$ kömmt.

Zuſatz 2.

§. 1165. Der Grund dieſer Erſcheinung aber leuchtet daraus ein, daß, wenn man die Formel $e^{\alpha x}v$ immer differenzirt, während man das Element dx als conſtant anſieht, jene Differenzialausdrücke mit $e^{\alpha x}$ multiplicirt zum Vorſchein kommen, ſo nämlich, daß

$$d^n e^{\alpha x}v = e^{\alpha x}\left[d^n v + \frac{n}{1}\alpha dx d^{n-1}v + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\alpha^2 dx^2 d^{n-2}v + \ldots\right]$$

wird.

α, β, γ... unendlich wenig von einander verſchieden, ſo muß auch in den, durch den Buchſtaben M ausgedrückten Werthen, eine unendlich kleine Differenz Statt finden; da alſo die einzelnen Theile des Integrals unendlich werden, und nach ihrer Entwickelung die unendlichen Glieder ſich gegenſeitig tilgen, ſo werden aus den unendlich kleinen Differenzen der Größe M auch endliche Theile hervorgehen. Die Verbeſſerung dieſer Fehler hat man in dem folgenden Probleme 155 zu ſuchen, wenn in der beſondern Gleichung gleiche Factoren erſcheinen. Ich habe es aber vorgezogen, die Mühe dieſer Correction dem Fleiße der Leſer zu überlaſſen, als dieſes Werk von einem ſolchen Irrthume zu befreyen; denn es iſt oft weit nützlicher, die Irrthümer, in welche auch die Geübten fallen können, zu erhalten, damit diejenigen, die ſich mit dieſem Gegenſtande befaſſen, deſto beſſer lernen mögen, mit welcher Behutſamkeit man zu Werke gehen müſſe, um ſich im Schließen nicht zu täuſchen.

Zusatz 3.

§. 1166. Eben so merkwürdig ist auch die andere Erscheinung, welche uns diese Auflösung darbiethet, daß nämlich, welche Zahlenwerthe auch für α, β, γ, δ genommen werden mögen, immer folgende Gleichungen Statt finden:

$$\frac{1}{\alpha-\beta}+\frac{1}{\beta-\alpha}=0;$$

$$\frac{1}{(\alpha-\beta)\ (\alpha-\gamma)}+\frac{1}{(\beta-\alpha)\ (\beta-\gamma)}+\frac{1}{(\gamma-\alpha)\ (\gamma-\beta)}=0;$$

$$\frac{1}{(\alpha-\beta)\ (\alpha-\gamma)\ (\alpha-\delta)}+\frac{1}{(\beta-\alpha)\ (\beta-\gamma)\ (\beta-\delta)}$$
$$+\frac{1}{(\gamma-\alpha)\ (\gamma-\beta)\ (\gamma-\delta)}+\frac{1}{(\delta-\alpha)\ (\delta-\beta)\ (\delta-\gamma)}=0$$

u. s. w.;

so viele Zahlen auf diese Art auch genommen werden.

Zusatz 4.

§. 1167. Wenn man die Formel P in ihre einfachen Factoren auflöst, und setzt

$$P=N\,(\alpha+z)\,(\beta+z)\,(\gamma+z)\ldots(\mu+z)\,(\nu+z),$$

so hat der früher (§. 1158) gefundene Integralausdruck, nämlich

$$Ny=e^{-\alpha x}\int e^{(\alpha-\beta)x}\,dx\int e^{(\beta-\gamma)x}\,dx\int e^{(\gamma-\delta)x}\,dx\ldots$$
$$\int e^{(\mu-\nu)x}\,dx\int e^{\nu x}\,X\,dx,$$

wegen den gleichen Factoren keine Schwierigkeit; desto schwieriger aber war die Entwickelung der letztern Form, durch welche das Integrale in Theilen, welche aus den einzelnen Factoren entstanden, dargestellt wird, und welche für die Anwendung bey weitem geeigneter zu seyn scheint.

Anmerkung.

§. 1168. Das im Zusatze 3 bemerkte Ergebniß verdient unsere Aufmerksamkeit um so mehr, weil es auch auf die gemeine Arithmetik übertragen werden kann, wo es vortreffliche Anwendungen zu haben scheint, besonders weil seine Demonstration nicht so klar am Tage liegt, und eine tiefe Kenntniß der Analysis erfordert. Ich glaube daher, daß es nicht unzweckmäßig ist, wenn ich diesem schönen arithmetischen Theoreme hier einen Platz einräume, und zwar um so mehr,

weil die hier aus einander gesetzte Auflösung des Problemes ohne Beweis jenes Lehrsatzes keineswegs vollendet wäre.

Arithmetischer Lehrsatz.

§. 1169. Wenn man noch so viele Zahlen a, b, c, d, ... hat, und man bildet aus denselben, indem man von jeder alle übrigen abzieht, folgende Producte:

$$(a-b)(a-c)(a-d)(a-e)\ldots = \mathfrak{A},$$
$$(b-a)(b-c)(b-d)(b-e)\ldots = \mathfrak{B},$$
$$(c-a)(c-b)(c-d)(c-e)\ldots = \mathfrak{C},$$
$$(d-a)(d-b)(d-c)(d-e)\ldots = \mathfrak{D},$$
$$\text{u. s. w.,}$$

so wird immer folgende Gleichung Statt finden:

$$\frac{1}{\mathfrak{A}} + \frac{1}{\mathfrak{B}} + \frac{1}{\mathfrak{C}} + \frac{1}{\mathfrak{D}} + \ldots = 0.$$

Beweis.

Man betrachte nach den in der Einleitung zur Analysis gelehrten Principien den Bruch

$$\frac{Z}{(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)\ldots},$$

wo Z eine solche rationale, ganze Function von z bezeichnen soll, in welcher die höchste Potenz von z kleiner ist, als die Anzahl der Factoren im Nenner, so wird man diesen Bruch zerlegen können in folgende einfache Brüche, welchen zusammen genommen er gleich ist; nämlich:

$$\frac{A}{z-a} + \frac{B}{z-b} + \frac{C}{z-c} + \frac{D}{z-d} + \ldots$$

Um nun diese Auflösung zu bewerkstelligen, setzen wir jenen Zähler $Z = z^n$, wobey n eine ganze Zahl bezeichnet, die kleiner ist als die Anzahl der Factoren des Nenners, so werden die Zähler dieser Theilbrüche auf folgende Art bestimmt:

$$A = \frac{a^n}{(a-b)(a-c)(a-d)\ldots},$$
$$B = \frac{b^n}{(b-a)(b-c)(b-d)\ldots},$$
$$C = \frac{c^n}{(c-a)(c-b)(c-d)\ldots},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Da also jene Brüche negativ genommen, nämlich

$$\frac{A}{a-z}+\frac{B}{b-z}+\frac{C}{c-z}+\frac{D}{d-z}+\ldots$$

dem vorgelegten Bruche addirt, verschwinden, wenn z die letzte der gelegten Zahlen a, b, c, d bezeichnet, deren Anzahl sogar größer $n+1$ ist, so setze man

$$\begin{aligned}
(a-b)(a-c)(a-d)\ldots(a-z) &= \mathfrak{A},\\
(b-a)(b-c)(b-d)\ldots(b-z) &= \mathfrak{B},\\
(c-a)(c-b)(c-d)\ldots(c-z) &= \mathfrak{C},\\
(d-a)(d-b)(d-e)\ldots(d-z) &= \mathfrak{D},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(z-a)(z-b)(z-c)\ldots(z-y) &= \mathfrak{Z},
\end{aligned}$$

daß $\frac{z^n}{\mathfrak{Z}}$ den vorgelegten Bruch bezeichnet. Hieraus leuchtet nun, daß die Summe aller dieser Brüche sey:

$$\frac{a^n}{\mathfrak{A}}+\frac{b^n}{\mathfrak{B}}+\frac{c^n}{\mathfrak{C}}+\frac{d^n}{\mathfrak{D}}+\ldots+\frac{z^n}{\mathfrak{Z}}=0,$$

n nur $n+1$ kleiner ist als die Anzahl der Glieder. Wird also $=0$ gesetzt, so entsteht der Fall unseres Theoremes.

Zusatz 1.

§. 1170. Überträgt man diese Bemerkung auf die Zahlen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$, ..., welche wir oben (1160) bestimmt haben, und wo ein ier Unterschied in der Bildung der Factoren wohl zu bemerken ist, wird man einsehen, daß

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mathfrak{A}}+\frac{1}{\mathfrak{B}}+\frac{1}{\mathfrak{C}}+\frac{1}{\mathfrak{D}}+\ldots &= 0\\
-\frac{\alpha}{\mathfrak{A}}-\frac{\beta}{\mathfrak{B}}-\frac{\gamma}{\mathfrak{C}}-\frac{\delta}{\mathfrak{D}}-\ldots &= 0\\
+\frac{\alpha^2}{\mathfrak{A}}+\frac{\beta^2}{\mathfrak{B}}+\frac{\gamma^2}{\mathfrak{C}}+\frac{\delta^2}{\mathfrak{D}}+\ldots &= 0\\
-\frac{\alpha^3}{\mathfrak{A}}-\frac{\beta^3}{\mathfrak{B}}-\frac{\gamma^3}{\mathfrak{C}}-\frac{\delta^3}{\mathfrak{D}}-\ldots &= 0\\
\text{u. s. w.}&
\end{aligned}$$

man endlich auf folgende Form kömmt:

$$\pm\frac{\alpha^{n-1}}{\mathfrak{A}}\pm\frac{\beta^{n-1}}{\mathfrak{B}}\pm\frac{\gamma^{n-1}}{\mathfrak{C}}\pm\frac{\delta^{n-1}}{\mathfrak{D}}\pm\ldots,$$

deren Summe nicht mehr verschwindet, sondern dem Bruche $\frac{1}{N}$ gleich wird.

Zusatz 2.

§. 1171. Dieß kann man auch aus der Entwickelung der im Lehrsatze aufgestellten Form folgern, denn nimmt man an, jener Ausdruck sey

$$\frac{z^{n-1}}{(z-a)\,(z-b)\,(z-c)\,\ldots\,(z-y)},$$

wobey die Anzahl aller Größen a, b, c, ... = n ist, weil hier der Zähler z^{n-1} eben so viele Dimensionen hat, als Factoren im Nenner erscheinen, so ist die in diesem Buche enthaltene ganze Zahl die Einheit. Dieser Werth wird auch nach geschehener Auflösung beybehalten, und verwandelt sich in $\frac{1}{N}$, wenn man ihn auf den erwähnten Fall anwendet.

Anmerkung.

§. 1172. Nachdem wir nun diesen Lehrsatz erwiesen haben, können wir endlich deutlich aposteriori nachweisen, wie das oben (§. 1160) aufgestellte Integrale, der dort vorgelegten Differenzialgleichung Genüge leistet. Denn hat man die Ausdrücke §. 1170 bemerkt, so wird man, da wir oben das Integrale

$$y = \frac{1}{\mathfrak{A}}\, e^{-\alpha x} \int e^{\alpha x} X dx + \frac{1}{\mathfrak{B}}\, e^{-\beta x} \int e^{\beta x} X dx + \ldots$$

gefunden haben, durch fortgesetzte Differenziation erhalten:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\alpha}{\mathfrak{A}}\, e^{-\alpha x} \int e^{\alpha x} X dx - \frac{\beta}{\mathfrak{B}}\, e^{-\beta x} \int e^{\beta x} X dx - \ldots$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\alpha^2}{\mathfrak{A}}\, e^{-\alpha x} \int e^{\alpha x} X dx + \frac{\beta^2}{\mathfrak{B}}\, e^{-\beta x} \int e^{\beta x} X dx + \ldots$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{\alpha^3}{\mathfrak{A}}\, e^{-\alpha x} \int e^{\alpha x} X dx - \frac{\beta^3}{\mathfrak{B}}\, e^{-\beta x} \int e^{\beta x} X dx - \ldots$$

u. f. w.

bis man auf den Ausdruck kömmt:

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \pm\frac{\alpha^{n-1}}{\mathfrak{A}}\, e^{-\alpha x} \int e^{\alpha x} X dx \pm \frac{\beta^{n-1}}{\mathfrak{B}}\, e^{-\beta x} \int e^{\beta x} X dx \pm \ldots$$

Hieraus ergibt sich nun folgende Differenzialformel:

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = \mp \frac{\alpha^n}{\mathfrak{A}} e^{-\alpha x} \int e^{\alpha x} X dx \mp \frac{\beta^n}{\mathfrak{B}} e^{-\beta x} \int e^{\beta x} X dx \mp \ldots$$
$$\pm \left[\frac{\alpha^{n-1}}{\mathfrak{A}} + \frac{\beta^{n-1}}{\mathfrak{B}} + \ldots \right] X,$$

wo das letzte Glied in $\frac{1}{N} X$ übergeht.

Multiplicirt man nun alle diese Ausdrücke einzeln mit den Größen A, B, C, D ... N, so wird man, weil

$$A - B\alpha + C\alpha^2 - D\alpha^3 + \ldots \mp N\alpha^n = 0$$
$$A - B\beta + C\beta^2 - D\beta^3 + \ldots \mp N\beta^n = 0$$

ist, und weil überdieß $\alpha + z$, $\beta + z$, $\gamma + z$, ... Factoren des Ausdruckes

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots + Nz^n$$

sind, offenbar erhalten:

$$Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} + D\frac{d^3y}{dx^3} + \ldots + N\frac{d^n y}{dx^n} = X,$$

welches die Anfangs vorgelegte Differenzialgleichung selbst ist.

Aufgabe 154.

§. 1173. Sey gegeben die Differenzialgleichung eines beliebigen Grades:

$$X = Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} + D\frac{d^3y}{dx^3} + \ldots + N\frac{d^n y}{dx^n}.$$

Wenn nun der hieraus gebildete algebraische Ausdruck

$$P = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots + Nz^n$$

zwey einfache imaginäre Factoren hat, die in dem quadratischen Factor

$$f^2 + 2fz \cos. \theta + z^2$$

enthalten sind, so soll man die demselben entsprechenden Theile des Integrals bestimmen.

Auflösung.

Es seyen $\alpha + z$ und $\beta + z$ diese zwey imaginären Factoren, so daß

$$\alpha = f(\cos.\theta + \sqrt{-1}\,\sin.\theta) \text{ und}$$
$$\beta = f(\cos.\theta - \sqrt{-1}\,\sin.\theta), \text{ weil}$$
$$(\alpha + z)(\beta + z) = f^2 + 2fz\cos.\theta + z^2$$

ist, und man setze

$$P = (f^2 + 2fz\cos.\theta + z^2)\,Q,$$

wobey

$$Q = A' + B'z + C'z^2 + \ldots + N'z^{n-2}.$$

Da also die aus jenen beyden einfachen imaginären Factoren entstandenen Theile des Integrales

$$\frac{1}{\mathfrak{A}} e^{-\alpha x} \int e^{\alpha x} X\,dx + \frac{1}{\mathfrak{B}} e^{-\beta x} \int e^{\beta x} X\,dx = v$$

so muß man diese imaginären Werthe auf einen reellen Ausdruck zurückführen. Es werden aber $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ imaginäre Größen seyn, welche sich aus der Form

$$(f\cos.\theta \mp \sqrt{-1}\,f\sin.\theta + z)\,Q$$

ergeben, wenn man statt z schreibt:

$$-f\cos.\theta \mp \sqrt{-1}\,f\sin.\theta.$$

Hat man aber diese Substitution gemacht, so findet man

$$Q = A' - B'f\cos.\theta + C'f^2\cos.2\theta - D'f^3\cos.3\theta + \ldots$$
$$\mp \sqrt{-1}\,B'f\sin.\theta \pm \sqrt{-1}\,C'f^2\sin.2\theta \mp \sqrt{-1}\,D'f^3\sin.3\theta \pm \ldots$$

Man setze Kürze halber

$$A' - B'f\cos.\theta + C'f^2\cos.2\theta - D'f^3\cos.3\theta + \ldots = \mathfrak{M}$$

und

$$-B'f\sin.\theta + C'f^2\sin.2\theta - D'f^3\sin.3\theta + \ldots = \mathfrak{N},$$

so daß

$$Q = \mathfrak{M} \pm \mathfrak{N}\sqrt{-1}$$

wird, wo das obere Zeichen für die Größen α und $\mathfrak{A}$, das untere aber für die Größen β und $\mathfrak{B}$ gilt. Es wird also seyn:

$$\mathfrak{A} = -2\sqrt{-1}\,f\sin.\theta\,(\mathfrak{M} + \mathfrak{N}\sqrt{-1}) \text{ und}$$
$$\mathfrak{B} = +2\sqrt{-1}\,f\sin.\theta\,(\mathfrak{M} - \mathfrak{N}\sqrt{-1}),$$

und daher ist

$$2v\sqrt{-1}\,f\sin.\theta = \frac{-e^{-\alpha x}\int e^{\alpha x} X\,dx}{\mathfrak{M} + \mathfrak{N}\sqrt{-1}} + \frac{e^{-\beta x}\int e^{\beta x} X\,dx}{\mathfrak{M} - \mathfrak{N}\sqrt{-1}}.$$

$$e^{\alpha x} = e^{fx\cos.\theta}\,[\cos.(fx\sin.\theta) + \sqrt{-1}\,\sin.(fx\sin.\theta)] \quad \text{und}$$
$$e^{\beta x} = e^{fx\cos.\theta}\,[\cos.(fx\sin.\theta) - \sqrt{-1}\,\sin.(fx\sin.\theta)],$$

sey Kürze halber der Winkel $fx\sin.\theta = \varphi$, so wird man erhalten:

$$2\sqrt{-1}\,v\,(\mathfrak{M}^2+\mathfrak{N}^2)\,f\sin.\theta =$$
$$= -(\mathfrak{M}-\mathfrak{N}\sqrt{-1})\,e^{-fx\cos.\theta}\,(\cos.\varphi - \sqrt{-1}\sin.\varphi)\int e^{fx\cos.\theta}\,X\,dx\,(\cos.\varphi+\sqrt{-1}\sin.\varphi)$$
$$+(\mathfrak{M}+\mathfrak{N}\sqrt{-1})\,e^{-fx\cos.\theta}\,(\cos.\varphi+\sqrt{-1}\sin.\varphi)\int e^{fx\cos.\theta}\,X\,dx\,(\cos.\varphi-\sqrt{-1}\sin.\varphi)$$
$$= e^{-fx\cos.\theta}\,2\sqrt{-1}\,(\mathfrak{M}\sin.\varphi+\mathfrak{N}\cos.\varphi)\int e^{fx\cos.\theta}\,X\,dx\cos.\varphi$$
$$-e^{-fx\cos.\theta}\,2\sqrt{-1}\,(\mathfrak{M}\cos.\varphi-\mathfrak{N}\sin.\varphi)\int e^{fx\cos.\theta}\,X\,dx\sin.\varphi.$$

Es wird daher der gesuchte Theil des Integrales seyn:

$$v = \frac{\left(\begin{matrix}+e^{-fx\cos.\theta}\,(\mathfrak{M}\sin.\varphi+\mathfrak{N}\cos.\varphi)\int e^{fx\cos.\theta}\,X\,dx\cos.\varphi \\ -e^{-fx\cos.\theta}\,(\mathfrak{M}\cos.\varphi-\mathfrak{N}\sin.\varphi)\int e^{fx\cos.\theta}\,X\,dx\sin.\varphi\end{matrix}\right)}{(\mathfrak{M}^2+\mathfrak{N}^2)\,f\sin.\theta}$$

wobey $\varphi = fx\sin.\theta$ ist.

Zusatz 1.

§. 1174. Es kömmt also hier vorzüglich darauf an, den imaginären Ausdruck $\mathfrak{M}+\mathfrak{N}\sqrt{-1}$ zu finden, welcher aus der Größe Q bestimmt werden muß, indem man statt z den imaginären Werth

$$-f(\cos.\theta+\sqrt{-1}\sin.\theta)$$

ſchreibt, weßhalb hier die Bequemlichkeit Statt findet, daß man für z^n ſchreiben muß:

$$(-f)^n (\cos. n\theta + \sqrt{-1} \sin. n\theta).$$

Zuſatz 2.

§. 1175. Da

$$Q = \frac{P}{f^2 + 2fz \cos. \theta + z^2}$$

iſt, ſo kann auch aus dieſem Ausdrucke durch dieſelbe Subſtitution die imaginäre Formel $\mathfrak{M} + \mathfrak{N}\sqrt{-1}$ gefunden werden, wobey aber zu bemerken iſt, daß durch dieſe Subſtitution ſowohl der Zähler P als auch der Nenner verſchwinde. Hieraus leuchtet nun ein, daß der Werth jener Formel richtig erhalten werde aus dem Bruche

$$\frac{dP}{2(f \cos. \theta + z)\, dz} = \frac{dP}{-2\sqrt{-1} \cdot f \sin. \theta\, dz}.$$

Zuſatz 3.

§. 1176. Weil alſo

$$\frac{dP}{dz} = B + 2Cz + 3Dz^2 + 4Ez^3 + \ldots + nNz^{n-1}$$

iſt, und wenn man

$$\mathfrak{P} = B - 2Cf \cos. \theta + 3Df^2 \cos. 2\theta - 4Ef^3 \cos. 3\theta + \ldots \pm nNf^{n-1} \cos. (n-1)\theta,$$

$$\mathfrak{Q} = -2Cf \sin. \theta + 3Df^2 \sin. 2\theta - 4Ef^3 \sin. 3\theta + \ldots \pm nNf^{n-1} \sin. (n-1)\theta$$

Damit durch dieſe Subſtitution

$$\frac{dP}{dz} = \mathfrak{P} + \sqrt{-1}\, \mathfrak{Q}$$

erhalten wird, ſo werden wir finden:

$$\mathfrak{M} + \sqrt{-1}\, \mathfrak{N} = \frac{\mathfrak{P} + \sqrt{-1}\, \mathfrak{Q}}{-2\sqrt{-1} f \sin. \theta} = \frac{-\mathfrak{Q} + \sqrt{-1}\, \mathfrak{P}}{2f \sin. \theta}$$

und daher iſt

$$\mathfrak{M} = \frac{-\mathfrak{Q}}{2f \sin. \theta} \quad \text{und} \quad \mathfrak{N} = \frac{\mathfrak{P}}{2f \sin. \theta}.$$

Zuſatz 4.

§. 1177. Der Theil des Integrals, welcher aus dem doppelten Factor $f^2 + 2fz \cos. \theta + z^2$ entſteht, wird alſo unmittelbar durch

die Größe P und den daraus abgeleiteten Werthen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ ausgedrückt, wenn $fx \sin.\theta = \varphi$ gesetzt wird, folgende seyn:

$$v = \frac{2e^{-fx\cos.\theta}}{\mathfrak{P}^2 + \mathfrak{Q}^2}\left[(\mathfrak{P}\cos.\varphi - \mathfrak{Q}\sin.\varphi)\int e^{fx\cos.\theta} X dx \cos.\varphi + (\mathfrak{P}\sin.\varphi + \mathfrak{Q}\cos.\varphi)\int e^{fx\sin.\theta} X dx \sin.\varphi\right].$$

Anmerkung.

§. 1178. So viele doppelte Factoren also der Ausdruck

$$P = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots$$

auch haben mag, so werden doch für die einzelnen Factoren mit Hülfe dieser Vorschriften die Theile des Integrales leicht bestimmt; und weil die Auffindung der Theile, welche den einfachen Factoren entsprechen, diese mögen ungleich oder gleich seyn, nicht gestört wird, so wird man durch Verbindung aller Theile in eine einzige Summe das vollständige Integrale der vorgelegten Differenzialgleichung erhalten. Allein diese Vorschriften sind doch nicht hinreichend, wenn zwey oder mehrere dieser quadratischen Factoren einander gleich sind, denn solche Fälle erfordern eine ganz eigene Entwickelung, ähnlich jener, deren wir uns in jenem Falle bedient haben, in welchem zwey oder mehrere einfache Factoren einander gleich waren. Um aber diese Abhandlung nicht zu sehr in die Länge zu ziehen, so wird es hinreichend seyn, den Fall für zwey gleiche quadratische Factoren zu entwickeln, weil dann die Methode leicht auf mehrere ausgedehnt werden kann.

Aufgabe 155.

§. 1179. Wenn die Differenzialgleichung eines beliebigen Grades

$$X = Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} + D\frac{d^3y}{dx^3} + \ldots + N\frac{d^ny}{dx^n}$$

gegeben ist, und enthält der hieraus gebildete algebraische Ausdruck

$$P = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots + Nz^n$$

das Quadrat eines doppelten Factors, nämlich

$$(f^2 + 2fz\cos.\theta + z^2)^2,$$

so soll man den ihm zugehörigen Theil des Integrales aufsuchen.

Zuſatz 1.

§. 1164. Es iſt hier allerdings bemerkenswerth, daß die Ausdrücke

$$dv + \alpha v dx;$$
$$d^2v + 2\alpha dx dv + \alpha^2 v dx^2;$$
$$d^3v + 3\alpha dx d^2v + 3\alpha^2 dx^2 dv + \alpha^3 v^3 dx^3;$$

und allgemein die Formel

$$d^n v + \frac{n}{1}\alpha dx d^{n-1}v + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\alpha^2 dx^2 d^{n-2}v + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^3 dx^3 d^{n-3}v + \ldots$$

wenn man ſie einmahl mit $e^{\alpha x}$ multiplicirt, nach und nach die Integration ſo oft zulaſſen, als der Index n Einheiten enthält, ſo daß man zuletzt auf das Integrale $e^{\alpha x}$ kömmt.

Zuſatz 2.

§. 1165. Der Grund dieſer Erſcheinung aber leuchtet daraus ein, daß, wenn man die Formel $e^{\alpha x}v$ immer differenzirt, während man das Element dx als conſtant anſieht, jene Differenzialausdrücke mit $e^{\alpha x}$ multiplicirt zum Vorſchein kommen, ſo nämlich, daß

$$d^n e^{\alpha x}v = e^{\alpha x}\left[d^n v + \frac{n}{1}\alpha dx d^{n-1}v + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\alpha^2 dx^2 d^{n-2}v + \ldots\right]$$

wird.

α, β, γ... unendlich wenig von einander verſchieden, ſo muß auch in den, durch den Buchſtaben M ausgedrückten Werthen, eine unendlich kleine Differenz Statt finden; da alſo die einzelnen Theile des Integrals unendlich werden, und nach ihrer Entwickelung die unendlichen Glieder ſich gegenſeitig tilgen, ſo werden aus den unendlich kleinen Differenzen der Größe M auch endliche Theile hervorgehen. Die Verbeſſerung dieſer Fehler hat man in dem folgenden Probleme 155 zu ſuchen, wenn in der beſondern Gleichung gleiche Factoren erſcheinen. Ich habe es aber vorgezogen, die Mühe dieſer Correction dem Fleiße der Leſer zu überlaſſen, als dieſes Werk von einem ſolchen Irrthume zu befreyen; denn es iſt oft weit nützlicher, die Irrthümer, in welche auch die Geübten fallen können, zu erhalten, damit diejenigen, die ſich mit dieſem Gegenſtande befaſſen, deſto beſſer lernen mögen, mit welcher Behutſamkeit man zu Werke gehen müſſe, um ſich im Schließen nicht zu täuſchen.

Zusatz 3.

§. 1166. Eben so merkwürdig ist auch die andere Erscheinung, welche uns diese Auflösung darbiethet, daß nämlich, welche Zahlenwerthe auch für α, β, γ, δ genommen werden mögen, immer folgende Gleichungen Statt finden:

$$\frac{1}{\alpha-\beta}+\frac{1}{\beta-\alpha}=0;$$

$$\frac{1}{(\alpha-\beta)\ (\alpha-\gamma)}+\frac{1}{(\beta-\alpha)\ (\beta-\gamma)}+\frac{1}{(\gamma-\alpha)\ (\gamma-\beta)}=0;$$

$$\frac{1}{(\alpha-\beta)\ (\alpha-\gamma)\ (\alpha-\delta)}+\frac{1}{(\beta-\alpha)\ (\beta-\gamma)\ (\beta-\delta)}$$
$$+\frac{1}{(\gamma-\alpha)\ (\gamma-\beta)\ (\gamma-\delta)}+\frac{1}{(\delta-\alpha)\ (\delta-\beta)\ (\delta-\gamma)}=0$$

u. s. w.;

so viele Zahlen auf diese Art auch genommen werden.

Zusatz 4.

§. 1167. Wenn man die Formel P in ihre einfachen Factoren auflöst, und setzt

$$P = N\ (\alpha+z)\ (\beta+z)\ (\gamma+z)\ \ldots\ (\mu+z)\ (\nu+z),$$

so hat der früher (§. 1158) gefundene Integralausdruck, nämlich

$$Ny = e^{-\alpha x}\int e^{(\alpha-\beta)x}\,dx\int e^{(\beta-\gamma)x}\,dx\int e^{(\gamma-\delta)x}\,dx\ \ldots$$
$$\int e^{(\mu-\nu)x}\,dx\int e^{\nu x}\,X\,dx,$$

wegen den gleichen Factoren keine Schwierigkeit; desto schwieriger aber war die Entwickelung der letztern Form, durch welche das Integrale in Theilen, welche aus den einzelnen Factoren entstanden, dargestellt wird, und welche für die Anwendung bey weitem geeigneter zu seyn scheint.

Anmerkung.

§. 1168. Das im Zusatze 3 bemerkte Ergebniß verdient unsere Aufmerksamkeit um so mehr, weil es auch auf die gemeine Arithmetik übertragen werden kann, wo es vortreffliche Anwendungen zu haben scheint, besonders weil seine Demonstration nicht so klar am Tage liegt, und eine tiefe Kenntniß der Analysis erfordert. Ich glaube daher, daß es nicht unzweckmäßig ist, wenn ich diesem schönen arithmetischen Theoreme hier einen Platz einräume, und zwar um so mehr,

weil die hier aus einander gesetzte Auflösung des Problemes ohne Beweis jenes Lehrsatzes keineswegs vollendet wäre.

Arithmetischer Lehrsatz.

§. 1169. Wenn man noch so viele Zahlen a, b, c, d, ... hat, und man bildet aus denselben, indem man von jeder alle übrigen abzieht, folgende Producte:

$$(a-b)(a-c)(a-d)(a-e)\ldots = \mathfrak{A},$$
$$(b-a)(b-c)(b-d)(b-e)\ldots = \mathfrak{B},$$
$$(c-a)(c-b)(c-d)(c-e)\ldots = \mathfrak{C},$$
$$(d-a)(d-b)(d-c)(d-e)\ldots = \mathfrak{D},$$
$$\text{u. s. w.,}$$

so wird immer folgende Gleichung Statt finden:

$$\frac{1}{\mathfrak{A}} + \frac{1}{\mathfrak{B}} + \frac{1}{\mathfrak{C}} + \frac{1}{\mathfrak{D}} + \ldots = 0.$$

Beweis.

Man betrachte nach den in der Einleitung zur Analysis gelehrten Principien den Bruch

$$\frac{Z}{(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)\ldots},$$

wo Z eine solche rationale, ganze Function von z bezeichnen soll, in welcher die höchste Potenz von z kleiner ist, als die Anzahl der Factoren im Nenner, so wird man diesen Bruch zerlegen können in folgende einfache Brüche, welchen zusammen genommen er gleich ist; nämlich:

$$\frac{A}{z-a} + \frac{B}{z-b} + \frac{C}{z-c} + \frac{D}{z-d} + \ldots$$

Um nun diese Auflösung zu bewerkstelligen, setzen wir jenen Zähler $Z = z^n$, wobey n eine ganze Zahl bezeichnet, die kleiner ist als die Anzahl der Factoren des Nenners, so werden die Zähler dieser Theilbrüche auf folgende Art bestimmt:

$$A = \frac{a^n}{(a-b)(a-c)(a-d)\ldots},$$
$$B = \frac{b^n}{(b-a)(b-c)(b-d)\ldots},$$
$$C = \frac{c^n}{(c-a)(c-b)(c-d)\ldots},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Da also jene Brüche negativ genommen, nämlich

$$\frac{A}{a-z}+\frac{B}{b-z}+\frac{C}{c-z}+\frac{D}{d-z}+\ldots$$

dem vorgelegten Bruche addirt, verschwinden, wenn z die letzte der gelegten Zahlen a, b, c, d bezeichnet, deren Anzahl sogar größer $n+1$ ist, so setze man

$$\begin{aligned}
(a-b)(a-c)(a-d)\ldots(a-z) &= \mathfrak{A},\\
(b-a)(b-c)(b-d)\ldots(b-z) &= \mathfrak{B},\\
(c-a)(c-b)(c-d)\ldots(c-z) &= \mathfrak{C},\\
(d-a)(d-b)(d-c)\ldots(d-z) &= \mathfrak{D},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(z-a)(z-b)(z-c)\ldots(z-y) &= \mathfrak{Z},
\end{aligned}$$

daß $\frac{z^n}{\mathfrak{Z}}$ den vorgelegten Bruch bezeichnet. Hieraus leuchtet nun , daß die Summe aller dieser Brüche sey:

$$\frac{a^n}{\mathfrak{A}}+\frac{b^n}{\mathfrak{B}}+\frac{c^n}{\mathfrak{C}}+\frac{d^n}{\mathfrak{D}}+\ldots+\frac{z^n}{\mathfrak{Z}}=0,$$

n nur $n+1$ kleiner ist als die Anzahl der Glieder. Wird also = 0 gesetzt, so entsteht der Fall unseres Theoremes.

Zusatz 1.

§. 1170. Überträgt man diese Bemerkung auf die Zahlen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$, ..., welche wir oben (1160) bestimmt haben, und wo ein ier Unterschied in der Bildung der Factoren wohl zu bemerken ist, ird man einsehen, daß

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mathfrak{A}}+\frac{1}{\mathfrak{B}}+\frac{1}{\mathfrak{C}}+\frac{1}{\mathfrak{D}}+\ldots &= 0\\
-\frac{\alpha}{\mathfrak{A}}-\frac{\beta}{\mathfrak{B}}-\frac{\gamma}{\mathfrak{C}}-\frac{\delta}{\mathfrak{D}}-\ldots &= 0\\
+\frac{\alpha^2}{\mathfrak{A}}+\frac{\beta^2}{\mathfrak{B}}+\frac{\gamma^2}{\mathfrak{C}}+\frac{\delta^2}{\mathfrak{D}}+\ldots &= 0\\
-\frac{\alpha^3}{\mathfrak{A}}-\frac{\beta^3}{\mathfrak{B}}-\frac{\gamma^3}{\mathfrak{C}}-\frac{\delta^3}{\mathfrak{D}}-\ldots &= 0
\end{aligned}$$

u. f. w.

man endlich auf folgende Form kömmt:

$$\pm\frac{\alpha^{n-1}}{\mathfrak{A}}\pm\frac{\beta^{n-1}}{\mathfrak{B}}\pm\frac{\gamma^{n-1}}{\mathfrak{C}}\pm\frac{\delta^{n-1}}{\mathfrak{D}}\pm\ldots,$$

deren Summe nicht mehr verschwindet, sondern dem Bruche $\frac{1}{N}$ gleich wird.

Zusatz 2.

§. 1171. Dieß kann man auch aus der Entwickelung der im Lehrsatze aufgestellten Form folgern, denn nimmt man an, jener Ausdruck sey

$$\frac{z^{n-1}}{(z-a)\,(z-b)\,(z-c)\,\ldots\,(z-y)},$$

wobey die Anzahl aller Größen a, b, c, ... = n ist, weil hier der Zähler z^{n-1} eben so viele Dimensionen hat, als Factoren im Nenner erscheinen, so ist die in diesem Buche enthaltene ganze Zahl die Einheit. Dieser Werth wird auch nach geschehener Auflösung beybehalten, und verwandelt sich in $\frac{1}{N}$, wenn man ihn auf den erwähnten Fall anwendet.

Anmerkung.

§. 1172. Nachdem wir nun diesen Lehrsatz erwiesen haben, können wir endlich deutlich a posteriori nachweisen, wie das oben (§. 1160) aufgestellte Integrale, der dort vorgelegten Differenzialgleichung Genüge leistet. Denn hat man die Ausdrücke §. 1170 bemerkt, so wird man, da wir oben das Integrale

$$y = \frac{1}{\mathfrak{A}}\, e^{-\alpha x} \int e^{\alpha x} X\,dx + \frac{1}{\mathfrak{B}}\, e^{-\beta x} \int e^{\beta x} X\,dx + \ldots$$

gefunden haben, durch fortgesetzte Differenziation erhalten:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\alpha}{\mathfrak{A}}\, e^{-\alpha x} \int e^{\alpha x} X\,dx - \frac{\beta}{\mathfrak{B}}\, e^{-\beta x} \int e^{\beta x} X\,dx - \ldots$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\alpha^2}{\mathfrak{A}}\, e^{-\alpha x} \int e^{\alpha x} X\,dx + \frac{\beta^2}{\mathfrak{B}}\, e^{-\beta x} \int e^{\beta x} X\,dx + \ldots$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{\alpha^3}{\mathfrak{A}}\, e^{-\alpha x} \int e^{\alpha x} X\,dx - \frac{\beta^3}{\mathfrak{B}}\, e^{-\beta x} \int e^{\beta x} X\,dx - \ldots$$

u. s. w.

bis man auf den Ausdruck kömmt:

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \pm\frac{\alpha^{n-1}}{\mathfrak{A}}\, e^{-\alpha x} \int e^{\alpha x} X\,dx \pm \frac{\beta^{n-1}}{\mathfrak{B}}\, e^{-\beta x} \int e^{\beta x} X\,dx \pm \ldots$$

Hieraus ergibt sich nun folgende Differenzialformel:

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = \mp \frac{\alpha^n}{\mathfrak{A}} e^{-\alpha x} \int e^{\alpha x} X dx \mp \frac{\beta^n}{\mathfrak{B}} e^{-\beta x} \int e^{\beta x} X dx \mp \ldots$$
$$\pm \left[\frac{\alpha^{n-1}}{\mathfrak{A}} + \frac{\beta^{n-1}}{\mathfrak{B}} + \ldots \right] X,$$

wo das letzte Glied in $\frac{1}{N} X$ übergeht.

Multiplicirt man nun alle diese Ausdrücke einzeln mit den Größen $A, B, C, D \ldots N$, so wird man, weil

$$A - B\alpha + C\alpha^2 - D\alpha^3 + \ldots \mp N\alpha^n = 0$$
$$A - B\beta + C\beta^2 - D\beta^3 + \ldots \mp N\beta^n = 0$$

ist, und weil überdieß $\alpha + z$, $\beta + z$, $\gamma + z$, ... Factoren des Ausdruckes

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots + Nz^n$$

sind, offenbar erhalten:

$$Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} + D\frac{d^3y}{dx^3} + \ldots + N\frac{d^n y}{dx^n} = X,$$

welches die Anfangs vorgelegte Differenzialgleichung selbst ist.

Aufgabe 154.

§. 1173. Sey gegeben die Differenzialgleichung eines beliebigen Grades:

$$X = Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} + D\frac{d^3y}{dx^3} + \ldots + N\frac{d^n y}{dx^n}.$$

Wenn nun der hieraus gebildete algebraische Ausdruck

$$P = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots + Nz^n$$

zwey einfache imaginäre Factoren hat, die in dem quadratischen Factor

$$f^2 + 2fz \cos. \theta + z^2$$

enthalten sind, so soll man die demselben entsprechenden Theile des Integrals bestimmen.

Auflösung.

Es seyen $\alpha + z$ und $\beta + z$ diese zwey imaginären Factoren, so daß

$$\alpha = f(\cos.\theta + \sqrt{-1}\,\sin.\theta) \text{ und}$$
$$\beta = f(\cos.\theta - \sqrt{-1}\,\sin.\theta), \text{ weil}$$
$$(\alpha + z)(\beta + z) = f^2 + 2fz\cos.\theta + z^2$$

ist, und man setze

$$P = (f^2 + 2fz\cos.\theta + z^2)\,Q,$$

wobey

$$Q = A' + B'z + C'z^2 + \ldots + N'z^{n-2}.$$

Da also die aus jenen beyden einfachen imaginären Factoren entstandenen Theile des Integrales

$$\frac{1}{\mathfrak{A}} e^{-\alpha x} \int e^{\alpha x} X\,dx + \frac{1}{\mathfrak{B}} e^{-\beta x} \int e^{\beta x} X\,dx = v$$

so muß man diese imaginären Werthe auf einen reellen Ausdruck zurückführen. Es werden aber $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ imaginäre Größen seyn, welche sich aus der Form

$$(f\cos.\theta \mp \sqrt{-1}\,f\sin.\theta + z)\,Q$$

ergeben, wenn man statt z schreibt:

$$-f\cos.\theta \mp \sqrt{-1}\,f\sin.\theta.$$

Hat man aber diese Substitution gemacht, so findet man

$$Q = A' - B'f\cos.\theta + C'f^2\cos.2\theta - D'f^3\cos.3\theta + \ldots$$
$$\mp \sqrt{-1}\,B'f\sin.\theta \pm \sqrt{-1}\,C'f^2\sin.2\theta \mp \sqrt{-1}\,D'f^3\sin.3\theta \pm \ldots$$

Man setze Kürze halber

$$A' - B'f\cos.\theta + C'f^2\cos.2\theta - D'f^3\cos.3\theta + \ldots = \mathfrak{M}$$

und

$$-B'f\sin.\theta + C'f^2\sin.2\theta - D'f^3\sin.3\theta + \ldots = \mathfrak{N},$$

so daß

$$Q = \mathfrak{M} \pm \mathfrak{N}\sqrt{-1}$$

wird, wo das obere Zeichen für die Größen α und $\mathfrak{A}$, das untere aber für die Größen β und $\mathfrak{B}$ gilt. Es wird also seyn:

$$\mathfrak{A} = -2\sqrt{-1}\,f\sin.\theta\,(\mathfrak{M} + \mathfrak{N}\sqrt{-1}) \text{ und}$$
$$\mathfrak{B} = +2\sqrt{-1}\,f\sin.\theta\,(\mathfrak{M} - \mathfrak{N}\sqrt{-1}),$$

und daher ist

$$2v\sqrt{-1}\,f\sin.\theta = \frac{-e^{-\alpha x}\int e^{\alpha x} X\,dx}{\mathfrak{M} + \mathfrak{N}\sqrt{-1}} + \frac{e^{-\beta x}\int e^{\beta x} X\,dx}{\mathfrak{M} - \mathfrak{N}\sqrt{-1}}$$

Es ist aber

$$e^{\alpha x} = e^{fx\cos.\theta}\,[\cos.(fx\sin.\theta) + \sqrt{-1}\,\sin.(fx\sin.\theta)] \quad \text{und}$$

$$e^{\beta x} = e^{fx\cos.\theta}\,[\cos.(fx\sin.\theta) - \sqrt{-1}\,\sin.(fx\sin.\theta)],$$

sey Kürze halber der Winkel $fx\sin.\theta = \varphi$, so wird man erhalten:

$$2\sqrt{-1}\,v\,(\mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2)\,f\sin.\theta =$$

$$= -(\mathfrak{M} - \mathfrak{N}\sqrt{-1})\,e^{-fx\cos.\theta}\,(\cos.\varphi - \sqrt{-1}\,\sin.\varphi)\int e^{fx\cos.\theta}\,X\,dx\,(\cos.\varphi + \sqrt{-1}\,\sin.\varphi)$$

$$+ (\mathfrak{M} + \mathfrak{N}\sqrt{-1})\,e^{-fx\cos.\theta}\,(\cos.\varphi + \sqrt{-1}\,\sin.\varphi)\int e^{fx\cos.\theta}\,X\,dx\,(\cos.\varphi - \sqrt{-1}\,\sin.\varphi)$$

$$= e^{-fx\cos.\theta}\,2\sqrt{-1}\,(\mathfrak{M}\sin.\varphi + \mathfrak{N}\cos.\varphi)\int e^{fx\cos.\theta}\,X\,dx\cos.\varphi$$

$$- e^{-fx\cos.\theta}\,2\sqrt{-1}\,(\mathfrak{M}\cos.\varphi - \mathfrak{N}\sin.\varphi)\int e^{fx\cos.\theta}\,X\,dx\sin.\varphi.$$

Es wird daher der gesuchte Theil des Integrales seyn:

$$v = \frac{\left(\begin{matrix} + e^{-fx\cos.\theta}\,(\mathfrak{M}\sin.\varphi + \mathfrak{N}\cos.\varphi)\int e^{fx\cos.\theta}\,X\,dx\cos.\varphi \\ - e^{-fx\cos.\theta}\,(\mathfrak{M}\cos.\varphi - \mathfrak{N}\sin.\varphi)\int e^{fx\cos.\theta}\,X\,dx\sin.\varphi \end{matrix}\right)}{(\mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2)\,f\sin.\theta}$$

wobey $\varphi = fx\sin.\theta$ ist.

Zusatz 1.

§. 1174. Es kömmt also hier vorzüglich darauf an, den imaginären Ausdruck $\mathfrak{M} + \mathfrak{N}\sqrt{-1}$ zu finden, welcher aus der Größe Q bestimmt werden muß, indem man statt z den imaginären Werth

$$-f(\cos.\theta + \sqrt{-1}\,\sin.\theta)$$

schreibt, weßhalb hier die Bequemlichkeit Statt findet, daß man für z^n schreiben muß:

$$(-f)^n (\cos. n\theta + \sqrt{-1} \sin. n\theta).$$

Zusatz 2.

§. 1175. Da

$$Q = \frac{P}{f^2 + 2fz \cos. \theta + z^2}$$

ist, so kann auch aus diesem Ausdrucke durch dieselbe Substitution die imaginäre Formel $\mathfrak{M} + \mathfrak{N}\sqrt{-1}$ gefunden werden, wobey aber zu bemerken ist, daß durch diese Substitution sowohl der Zähler P als auch der Nenner verschwinde. Hieraus leuchtet nun ein, daß der Werth jener Formel richtig erhalten werde aus dem Bruche

$$\frac{dP}{2(f \cos. \theta + z)\, dz} = \frac{dP}{-2\sqrt{-1} \cdot f \sin. \theta\, dz}.$$

Zusatz 3.

§. 1176. Weil also

$$\frac{dP}{dz} = B + 2Cz + 3Dz^2 + 4Ez^3 + \ldots + nNz^{n-1}$$

ist, und wenn man

$$\mathfrak{P} = B - 2Cf \cos. \theta + 3Df^2 \cos. 2\theta - 4Ef^3 \cos. 3\theta + \ldots \pm nNf^{n-1} \cos. (n-1)\theta,$$

$$\mathfrak{Q} = -2Cf \sin. \theta + 3Df^2 \sin. 2\theta - 4Ef^3 \sin. 3\theta + \ldots \pm nNf^{n-1} \sin. (n-1)\theta$$

Damit durch diese Substitution

$$\frac{dP}{dz} = \mathfrak{P} + \sqrt{-1}\, \mathfrak{Q}$$

erhalten wird, so werden wir finden:

$$\mathfrak{M} + \sqrt{-1}\, \mathfrak{N} = \frac{\mathfrak{P} + \sqrt{-1}\, \mathfrak{Q}}{-2\sqrt{-1} f \sin. \theta} = \frac{-\mathfrak{Q} + \sqrt{-1}\, \mathfrak{P}}{2f \sin. \theta}$$

und daher ist

$$\mathfrak{M} = \frac{-\mathfrak{Q}}{2f \sin. \theta} \quad \text{und} \quad \mathfrak{N} = \frac{\mathfrak{P}}{2f \sin. \theta}.$$

Zusatz 4.

§. 1177. Der Theil des Integrals, welcher aus dem doppelten Factor $f^2 + 2fz \cos. \theta + z^2$ entsteht, wird also unmittelbar durch

die Größe P und den daraus abgeleiteten Werthen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ ausgedrückt, wenn $fx \sin.\theta = \varphi$ gesetzt wird, folgende seyn:

$$v = \frac{2e^{-fx\cos.\theta}}{\mathfrak{P}^2 + \mathfrak{Q}^2}\left[(\mathfrak{P}\cos.\varphi - \mathfrak{Q}\sin.\varphi)\int e^{fx\cos.\theta} X dx \cos.\varphi + (\mathfrak{P}\sin.\varphi + \mathfrak{Q}\cos.\varphi)\int e^{fx\sin.\theta} X dx \sin.\varphi\right].$$

Anmerkung.

§. 1178. So viele doppelte Factoren also der Ausdruck

$$P = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots$$

auch haben mag, so werden doch für die einzelnen Factoren mit Hülfe dieser Vorschriften die Theile des Integrales leicht bestimmt; und weil die Auffindung der Theile, welche den einfachen Factoren entsprechen, diese mögen ungleich oder gleich seyn, nicht gestört wird, so wird man durch Verbindung aller Theile in eine einzige Summe das vollständige Integrale der vorgelegten Differenzialgleichung erhalten. Allein diese Vorschriften sind doch nicht hinreichend, wenn zwey oder mehrere dieser quadratischen Factoren einander gleich sind, denn solche Fälle erfordern eine ganz eigene Entwickelung, ähnlich jener, deren wir uns in jenem Falle bedient haben, in welchem zwey oder mehrere einfache Factoren einander gleich waren. Um aber diese Abhandlung nicht zu sehr in die Länge zu ziehen, so wird es hinreichend seyn, den Fall für zwey gleiche quadratische Factoren zu entwickeln, weil dann die Methode leicht auf mehrere ausgedehnt werden kann.

Aufgabe 155.

§. 1179. Wenn die Differenzialgleichung eines beliebigen Grades

$$X = Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} + D\frac{d^3y}{dx^3} + \ldots + N\frac{d^ny}{dx^n}$$

gegeben ist, und enthält der hieraus gebildete algebraische Ausdruck

$$P = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots + Nz^n$$

das Quadrat eines doppelten Factors, nämlich

$$(f^2 + 2fz\cos.\theta + z^2)^2,$$

so soll man den ihm zugehörigen Theil des Integrales aufsuchen.

Auflöſung.

Setzen wir alſo

$$P = (f^2 + 2fz\cos.\theta + z^2)^2\, Q,$$

ſo wird

$$Q = A' + B'z + C'z^2 + \ldots + N'z^{n-4},$$

und ſetzen, indem wir uns anfänglich um die imaginären Größen nicht kümmern:

$$\alpha = f(\cos.\theta + \sqrt{-1}\sin.\theta) \text{ und}$$
$$\beta = f(\cos.\theta - \sqrt{-1}\sin.\theta),$$

ſo daß

$$P = (\alpha + z)^2(\beta + z)^2 Q.$$

Nun ſetzen wir nach den Vorſchriften, welche wir §. 1163 für zwey gleiche einfache Factoren gelehrt haben, daß der Ausdruck

$$\frac{P}{(\alpha + z)^2} = (\beta + z)^2 Q$$

für $z = -\alpha$ in $\mathfrak{A}$ übergehe; der Ausdruck

$$\frac{P}{(\beta + z)^2} = (\alpha + z)^2 Q$$

aber für $z = -\beta$ in $\mathfrak{B}$. Sind die Größen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gefunden, ſo werden, wie ich am angeführten Ort gezeigt habe, die hieraus entſtehenden Theile des Integrales folgende ſeyn:

$$\frac{1}{\mathfrak{A}} e^{-\alpha x} \int dx \int e^{\alpha x} X dx + \frac{1}{\mathfrak{B}} e^{-\beta x} \int dx \int e^{\beta x} X dx = V,$$

welche wir, da ſie nun imaginäre Ausdrücke enthalten, auf eine reelle Form zurückführen müſſen. Setzen wir alſo, wie in dem vorhergehenden Probleme

$$\mathfrak{M} = A' - B'f\cos.\theta + C'f^2\cos.2\theta - D'f^3\cos.3\theta + \ldots$$
$$\mathfrak{N} = \quad - B'f\sin.\theta + C'f^2\sin.2\theta - D'f^3\sin.3\theta + \ldots,$$

ſo daß die Größe Q, wenn

$$z = -\alpha = -f(\cos.\theta + \sqrt{-1}\sin.\theta)$$

geſetzt wird, übergeht in $\mathfrak{M} + \mathfrak{N}\sqrt{-1}$, für

$$z = +\beta = -f(\cos.\theta - \sqrt{-1}\sin.\theta)$$

in $\mathfrak{M} - \mathfrak{N}\sqrt{-1}$. Da nun

$$(\beta - \alpha)^2 = (-2\sqrt{-1}\, f\sin.\theta)^2 = -4f^2\sin.\theta^2,$$

welcher Ausdruck auch $(\alpha - \beta)^2$ gleich iſt, ſo wird man erhalten:

$$\mathfrak{A} = -4f^2 \sin.\theta^2 (\mathfrak{M} + \mathfrak{N}\sqrt{-1}) \text{ und}$$
$$\mathfrak{B} = -4f^2 \sin.\theta^2 (\mathfrak{M} - \mathfrak{N}\sqrt{-1}),$$

und daher

$$-4f^2 \sin.\theta^2 (\mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2) v = (\mathfrak{M} - \mathfrak{N}\sqrt{-1}) e^{-\alpha x} \int dx \int e^{\alpha x} X dx + (\mathfrak{M} + \mathfrak{N}\sqrt{-1}) e^{-\beta x} \int dx \int e^{\beta x} X dx.$$

Wird aber $fx \sin.\theta = \varphi$ geſetzt, ſo wird, wie wir geſehen haben;

$$e^{\alpha x} = e^{fx \cos.\theta} (\cos.\varphi + \sqrt{-1} \sin.\varphi);$$
$$e^{-\alpha x} = e^{-fx \cos.\theta} (\cos.\varphi - \sqrt{-1} \sin.\varphi);$$
$$e^{\beta x} = e^{fx \cos.\theta} (\cos.\varphi - \sqrt{-1} \sin.\varphi);$$
$$e^{-\beta x} = e^{-fx \cos.\theta} (\cos.\varphi + \sqrt{-1} \sin.\varphi);$$

und daher verwandelt ſich das zweyte Glied jener Gleichung in

$$+ e^{-fx \cos.\theta} [\mathfrak{M} \cos.\varphi - \mathfrak{N} \sin.\varphi - \mathfrak{N}\sqrt{-1} \cos.\varphi - \mathfrak{M}\sqrt{-1} \sin.\varphi] \int dx \int e^{fx \cos.\theta} X dx (\cos.\varphi + \sqrt{-1} \sin.\varphi)$$
$$+ e^{-fx \cos.\theta} [\mathfrak{M} \cos.\varphi - \mathfrak{N} \sin.\varphi + \mathfrak{N}\sqrt{-1} \cos.\varphi + \mathfrak{M}\sqrt{-1} \sin.\varphi] \int dx \int e^{fx \cos.\theta} X dx (\cos.\varphi - \sqrt{-1} \sin.\varphi),$$

wo die imaginären Theile von ſelbſt wegfallen, ſo daß man nun erhält:

$$v = \frac{\left\{\begin{array}{l} -e^{-fx \cos.\theta} (\mathfrak{M} \cos.\varphi - \mathfrak{N} \sin.\varphi) \int dx \int e^{fx \cos.\theta} X dx \cos.\varphi \\ -e^{-fx \cos.\theta} (\mathfrak{N} \cos.\varphi + \mathfrak{M} \sin.\varphi) \int dx \int e^{fx \cos.\theta} X dx \sin.\varphi \end{array}\right\}}{2 (\mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2) f^2 \sin.\theta^2}$$

oder auch

$$v = \frac{-e^{-fx \cos.\theta}}{2 (\mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2) f^2 \sin.\theta^2} \left\{\begin{array}{l} + (\mathfrak{M} \cos.\varphi - \\ - \mathfrak{N} \sin.\varphi) \int dx \int e^{fx \cos.\theta} X dx \cos.\varphi \\ + (\mathfrak{M} \sin.\varphi + \\ + \mathfrak{N} \cos.\varphi) \int dx \int e^{fx \cos.\theta} X dx \sin.\varphi \end{array}\right\}$$

welcher Ausdruck von imaginären Theilen ganz frey iſt *).

Zuſatz 1.

§. 1180. Weil die imaginäre Formel $\mathfrak{M} + \mathfrak{N}\sqrt{-1}$ aus der

*) Auch dieſe Auflöſung bedarf einer ſorgfältigen Verbeſſerung, welche wir dem Fleiße der Leſer überlaſſen.

Größe Q entſteht, wenn man ſtatt z ſchreibt:

$$-f(\cos.\theta + \sqrt{-1}\sin.\theta);$$

ſo wird man ſie durch dieſelbe Annahme auch aus dem Ausdrucke

$$\frac{P}{(f^2 + 2fz\cos.\theta + z^2)^2}$$

finden, allein hier wird ſowohl der Zähler als der Nenner verſchwinden.

Zuſatz 2.

§. 1181. Man findet alſo denſelben Werth auch aus der Formel

$$\frac{dP}{4dz\,[f^3\cos.\theta + f^2z(1 + 2\cos.\theta^2) + 3fz^2\cos.\theta + z^3]},$$

wenn man auch hier wieder auf dieſelbe Unbequemlichkeit ſtößt, ſo wird man ihn auch erhalten aus der Formel

$$\frac{d^2P}{4dz^2\,[f^2(1 + 2\cos.\theta^2) + 6fz\cos.\theta + 3z^2]}.$$

Zuſatz 3.

§. 1182. Man ſetze hier zuerſt im Nenner

$$z = -f(\cos.\theta + \sqrt{-1}\sin.\theta),$$

und man wird folgenden Ausdruck erhalten:

$$\frac{-d^2P}{8f^2dz^2\sin.^2\theta}.$$

Da ferner

$$\frac{d^2P}{2dz^2} = C + 3Dz + 6Ez^2 + \ldots + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}Nz^{n-2}$$

iſt, ſo ſetzen wir Kürze halber

$$\mathfrak{P} = C - 3Df\cos.\theta + 6Ef^2\cos.2\theta - \ldots$$
$$\ldots \pm \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}Nf^{n-2}\cos.(n-2)\theta,$$

$$\mathfrak{Q} = -3Df\sin.\theta + 6Ef^2\sin.2\theta - \ldots$$
$$\ldots \pm \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}Nf^{n-2}\sin.(n-2)\theta,$$

ſo daß man nach gehöriger Subſtitution erhält:

$$\frac{d^2P}{dz^2} = \mathfrak{P} + \mathfrak{Q}\sqrt{-1},$$

ıd daher

$$\mathfrak{M} + \mathfrak{N}\sqrt{-1} = \frac{-\mathfrak{P} - \mathfrak{Q}\sqrt{-1}}{4f^2 \sin.^2\theta},$$

lglich

$$\mathfrak{M} = \frac{-\mathfrak{P}}{4f^2 \sin.^2\theta} \quad \text{und} \quad \mathfrak{N} = \frac{-\mathfrak{Q}}{4f^2 \sin.^2\theta},$$

lche Werthe man alſo in den gefundenen Theil des Integrals ſubtuiren kann.

Zuſatz 4.

§. 1183. Hat man aber dieſe Subſtitution gemacht, ſo gibt das uadrat des doppelten Factors, nämlich

$$(f^2 + 2fz\cos.\theta + z^2)^2$$

genden Theil des Integrals:

$$= \frac{2e^{-fx\cos.\theta}}{\mathfrak{P}^2 + \mathfrak{Q}^2}\left\{\begin{array}{l} +(\mathfrak{P}\cos.\varphi - \mathfrak{Q}\sin.\varphi)\int dx \int e^{fx\cos.\theta} X dx \cos.\varphi \\ +(\mathfrak{P}\sin.\varphi + \mathfrak{Q}\cos.\varphi)\int dx \int e^{fx\cos.\theta} X dx \sin.\varphi \end{array}\right\}$$

φ den Winkel $fx\sin.\theta$ bezeichnet.

Anmerkung.

§. 1184. Vergleichen wir dieſen Ausdruck mit jenem, welchen r im vorhergehenden Probleme gefunden haben, ſo wird es kaum thig ſeyn, für die verwickelteren Fälle eine ähnliche Entwickelung rklich vorzunehmen. Wenn z. B. die Größe

$$P = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots + Nz^n$$

ien quadratiſchen Factor in der dritten Potenz enthält, nämlich:

$$(f^2 + 2fz\cos.\theta + z^2)^3,$$

beſtimmen ſich die Größen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ ſo, daß

$$= D - 4Ef\cos.\theta + 10Ff^2\cos.2\theta - 20Gf^3\cos.3\theta + \ldots$$
$$\ldots \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} Nf^{n-3}\cos.(n-3)\theta,$$

$$= -4Ef\sin.\theta + 10Ff^2\sin.2\theta - 20Gf^3\sin.3\theta + \ldots$$
$$\ldots \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} Nf^{n-3}\sin.(n-3)\theta,$$

d nach Auffindung dieſer Werthe wird der zugehörige Theil des Inrales ſeyn:

$$\frac{ze^{-fx\cos.\theta}}{\mathfrak{P}^2+\mathfrak{Q}^2}\left\{\begin{array}{l}+(\mathfrak{P}\cos.\varphi-\mathfrak{Q}\sin.\varphi)\int dx\int dx\int e^{fx\cos.\theta}Xdx\cos.\varphi\\+(\mathfrak{P}\sin.\varphi+\mathfrak{Q}\cos.\varphi)\int dx\int dx\int e^{fx\cos.\theta}Xdx\sin.\varphi\end{array}\right\}$$

und man wird beym weitern Fortschreiten auf keine Schwierigkeit mehr stoßen. Ich glaube daher die Auflösung der in diesem Kapitel vorgelegten Gleichung so gut ausgeführt zu haben, daß nichts mehr zu wünschen übrig bleibt. Inzwischen wird diese Materie nicht wenig an Deutlichkeit gewinnen, wenn wir die gegebenen Vorschriften auf besondere Beyspiele anwenden, und für diesen Zweck ist das nächste Kapitel bestimmt; früher aber wollen wir noch eine vortreffliche Eigenschaft solcher allgemeinen Gleichungen anführen, welche in der Analysis einen ausgezeichneten Nutzen zu haben scheint.

Aufgabe 156.

§. 1185. Sey gegeben die Differenzialgleichung irgend eines Grades:

$$X = Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} + D\frac{d^3y}{dx^3} + \ldots + N\frac{d^{m+n}y}{dx^{m+n}};$$

wenn nun die hieraus gebildete algebraische Formel

$$P = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots + Nz^{m+n}$$

aus zwey Factoren besteht, wenn nämlich $P = QR$ ist, so daß

$$Q = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}z + \mathfrak{C}z^2 + \ldots + \mathfrak{N}z^m \text{ und}$$
$$R = a + bz + cz^2 + \ldots + nz^n,$$

soll man die Integration jener Gleichung auf die Integration zweyer einfachern Gleichungen zurückführen.

Auflösung.

Wenn wir zuerst den (1158) gefundenen Integralausdruck betrachten, so bemerken wir ohne Schwierigkeit, daß, nachdem wir die Gleichung

$$X = \mathfrak{A}v + \mathfrak{B}\frac{dv}{dx} + \mathfrak{C}\frac{d^2v}{dx^2} + \ldots + \mathfrak{N}\frac{d^mv}{dx^m}$$

integrirt, und daraus den Werth von v mittelst x und X bestimmt haben, der Werth von y für die vorgelegte Gleichung aus der nachstehenden sich ergeben werde:

$$v = ay + b\frac{dy}{dx} + c\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots + n\frac{d^ny}{dx^n},$$

essen Beziehung auf der Stelle bekannt wird, wenn man die aus die-
er Gleichung sich ergebenden Werthe für v und seine Differenzialien
ubstituirt, denn man wird erhalten:

$$X = \mathfrak{A}ay + \mathfrak{A}b\frac{dy}{dx} + \mathfrak{A}c\frac{d^2y}{dx^2} + \mathfrak{A}d\frac{d^3y}{dx^3} + \ldots$$
$$+ \mathfrak{B}a \quad + \mathfrak{B}b \quad + \mathfrak{B}c$$
$$+ \mathfrak{C}a \quad + \mathfrak{C}b$$
$$+ \mathfrak{D}a.$$

Da aber der Voraussetzung gemäß $P = QR$ ist, so muß man,
enn die Reihen Q und R mit einander multiplicirt worden sind,
othwendig erhalten:

$A = \mathfrak{A}a$; $B = \mathfrak{A}b + \mathfrak{B}a$; $C = \mathfrak{A}c + \mathfrak{B}b + \mathfrak{C}a$; u. s. w.

nd so wird diese letzte Gleichung auf die vorgelegte selbst zurückgeführt.

Zusatz 1.

§. 1186. Wenn wir bloß auf die einfachen Factoren sehen, so
ird das Integrale der ersteren Gleichung ausgedrückt durch Glieder
on der Form

$$v = \Gamma e^{-\alpha x} \int e^{\alpha x} X dx \ldots;$$

as Integrale der letztern Gleichung aber durch

$$y = \Delta e^{-\beta x} \int e^{\beta x} v dx \ldots$$

Zusatz 2.

§. 1187. Substituiren wir nun in den einzelnen Gliedern des
etzten Integrales die einzelnen Theile des erstern, so wird man
halten:

$$y = \Gamma\Delta e^{-\beta x} \int e^{(\beta-\alpha)x} dx \int e^{\alpha x} X dx,$$

elcher Ausdruck sich auf folgende Form zurückführen läßt:

$$y = \frac{r\Delta}{\beta-\alpha}\left(e^{-\alpha x}\int e^{\alpha x} X dx - e^{-\beta x}\int e^{\beta x} X dx\right).$$

Solche Glieder werden nun unmittelbar durch die Integration
er vorgelegten Gleichung gefunden.

Zusatz 3.

§. 1188. Wäre hier $\beta = \alpha$ gewesen, so hätte man ohne alle

Reduction sogleich den Ausdruck erhalten:

$$y = \Gamma\Delta e^{-\alpha x} \int dx \int e^{\alpha x} X dx,$$

welche aber für den Fall zweyer gleicher einfacher Factoren gefunden worden ist. Da übrigens hier alles darauf ankömmt, die einfachen oder doppelten reellen Factoren zu finden, so wird die vorgelegte Gleichung selbst, nach der früher entwickelten Methode, sehr leicht aufgelöst.

Kapitel IV.

Anwendung der im vorigen Kapitel gelehrten Integrationsmethode auf Beyspiele.

Aufgabe 157.

§. 1189. Sey folgende Differenzialgleichung gegeben:

$$X = a^n y + \frac{d^n y}{dx^n};$$

n bestimme das vollständige Integrale derselben.

Auflösung.

Hier ist also $P = a^n + z^n$, wobey zuerst zu bemerken ist, daß er Ausdruck, wenn n eine ungerade Zahl bezeichnet, den einfachen tor $a + z$ enthalte, woraus der Theil des Integrals gefunden d:

$$\frac{1}{A} e^{-ax} \int e^{ax} X dx,$$

bey der Werth von A aus dem Ausdrucke $\frac{P}{a+z}$ hervorgeht, wenn n daselbst $z = -a$ setzt. Da nun dieser Werth auch

$$\frac{dP}{dz} = n z^{n-1}$$

so wird, weil $n - 1$ eine gerade Zahl bezeichnet, $A = n a^{n-1}$, und daher ist dieser Theil des Integrals

$$= \frac{1}{n a^{n-1}} e^{-ax} \int e^{ax} X dx.$$

Alle übrigen Factoren enthält der Ausdruck

$$a^2 - 2az \cos. \theta + z^2,$$

bey $\theta = \frac{(2k+1)\pi}{n}$ ist, k aber eine beliebige ganze Zahl bezeich-, und π einen Winkel, der gleich ist zweyen Rechten. Vergleicht n diesen Ausdruck mit der Aufgabe 154 und Zusatz 1, so wird $= -a$, und weil $z = a(\cos. \theta + \sqrt{-1} \sin. \theta)$, so erhält man der Formel $\frac{dP}{dz}$ die Gleichungen:

$\mathfrak{P} = n a^{n-1} \cos.(n-1)\theta$ und $\mathfrak{Q} = n a^{n-1} \sin.(n-1$

da alſo

$$\cos. n\theta = -1 \quad \text{und} \quad \sin. n\theta = 0$$

iſt, ſo wird auch ſeyn:

$$\mathfrak{P} = -n a^{n-1} \cos.\theta \quad \text{und} \quad \mathfrak{Q} = n a^{n-1} \sin.\theta.$$

Wenn daher

$$fx \sin.\theta = -ax \sin.\theta = \varphi$$

geſetzt wird, ſo iſt der aus jedem doppelten Factor entſtehende des Integrals

$$\frac{2e^{ax\cos.\theta}}{n a^{n-1}} \begin{cases} (-\cos.\theta\cos.\varphi - \sin.\theta\sin.\varphi) \int e^{-ax\cos.\theta} X dx \cos. \\ (-\cos.\theta\sin.\varphi + \sin.\theta\cos.\varphi) \int e^{-ax\cos.\theta} X dx \sin. \end{cases}$$

oder

$$\frac{-2e^{ax\cos.\theta}}{n a^{n-1}} [\cos.(\theta-\varphi) \int e^{-ax\cos.\theta} X dx \cos.\varphi - \sin.(\theta-\varphi) \int e^{-ax\cos.\theta} X dx \sin.$$

und, wenn man den Werth von φ wieder ſubſtituirt:

$$\frac{-2e^{ax\cos\theta}}{n a^{n-1}} [\cos.(\theta+ax\sin.\theta) \int e^{-ax\cos.\theta} X dx \cos.(ax\sin. + \sin.(\theta+ax\sin.\theta) \int e^{-ax\cos.\theta} X dx \sin.(ax\sin.$$

Nun ſetze man für θ nach und nach die Werthe $\frac{\pi}{n}, \frac{3\pi}{n}, \frac{5\pi}{n},$ ſo lange ſie kleiner ſind als π, und hat man alle dieſe Ausdrück eine Summe gebracht, ſo werden ſie, wenn man in jenem Falle welchem n eine ungerade Zahl iſt, noch den Anfangs gefund Ausdruck

$$\frac{1}{n a^{n-1}} e^{-ax} \int e^{ax} X dx$$

hinzu addirt, das vollſtändige Integrale geben.

Zuſatz 1.

§. 1190. In dem Falle, in welchem n eine ungerade Zahl wäre zwar π der letzte Werth von θ, welchen man aber hier a Acht zu laſſen angegeben hat; dann aber würde man, wegen

$$ax \sin.\theta = 0 \quad \text{und} \quad \cos.\theta = -1$$

zum letzten Theil des Integrals erhalten:

$$\frac{2e^{-ax}}{n a^{n-1}} \int e^{ax} X dx,$$

welcher das doppelte von jenem iſt, den man zu nehmen hat. Der Grund hievon liegt darin, daß, wenn $\theta = \pi$ geſetzt wird, der Ausdruck $a^2 + 2az + z^2$ nicht mehr Factor iſt, ſondern die Quadratwurzel $a + z$ desſelben, und daher mußte dieſer Fall für ſich erörtert werden.

Zuſatz 2.

§. 1191. Wenn $X = 0$ iſt, ſo gehen die Integralformeln in willkürliche Conſtanten über, und aus dem Factor

$$a^2 - 2az \cos. \theta + z^2$$

hält man den Integraltheil

$$\frac{2e^{ax \cos. \theta}}{n a^{n-1}} [A \cos. (\theta + ax \sin. \theta) + \mathfrak{A} \sin. (\theta + ax \sin. \theta)],$$

welcher ſich auf folgende Form bringen läßt:

$$A e^{ax \cos. \theta} \cos. (\zeta + ax \sin. \theta),$$

wobey ζ einen beliebigen unveränderlichen Winkel bezeichnet, wie wir bereits oben gefunden haben.

Aufgabe 158.

§. 1192. Das vollſtändige Integrale der Differenzialgleichung

$$X = a^n y - \frac{d^n y}{dx^n}$$

zu finden.

Auflöſung.

Der hieraus entſtehende algebraiſche Ausdruck $P = a^n - z^n$ enthält immer den Factor $a - z$, und hieraus ergibt ſich als Theil des Integrals:

$$\frac{1}{\mathfrak{A}} e^{ax} \int e^{-ax} X dx,$$

wobey $\mathfrak{A} = \frac{P}{z - a}$, für $z = a$ bezeichnet. Da alſo auch

$$\mathfrak{A} = \frac{dP}{dz} = -n z^{n-1}$$

iſt, ſo wird man

$$\mathfrak{A} = -n a^{n-1}$$

erhalten, und daher ist der zugehörige Theil des Integrales

$$= \frac{-1}{n a^{n-1}} e^{ax} \int e^{-ax} X dx.$$

Wenn ferner n eine gerade Zahl, mithin $n-1$ eine ungerade bezeichnet, so wird auch $a+z$ ein Factor seyn, und dieser gibt den Theil des Integrals

$$= \frac{1}{n a^{n-1}} e^{-ax} \int e^{ax} X dx.$$

Alle übrigen Factoren von P haben die quadratische Form

$$a^2 - 2az \cos. \theta + z^2,$$

wobey der Winkel $\theta = \frac{2k\pi}{n}$ ist. Vergleichen wir diesen Ausdruck mit dem allgemeinen oben angenommenen

$$f^2 + 2fz \cos. \theta + z^2,$$

so finden wir $f = -a$, und man muß aus der Gleichung

$$\frac{dP}{dz} = -n z^{n-1}$$

die Formel $\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}\sqrt{-1}$ suchen, nachdem man

$$z = a(\cos. \theta + \sqrt{-1} \sin. \theta)$$

gesetzt hat. Hieraus ergibt sich

$\mathfrak{P} = -n a^{n-1} \cos.(n-1)\theta$ und $\mathfrak{Q} = -n a^{n-1} \sin.(n-1)\theta$,

oder, weil $\cos. n\theta = 1$ und $\sin. n\theta = 0$ ist:

$\mathfrak{P} = -n a^{n-1} \cos. \theta$ und $\mathfrak{Q} = +n a^{n-1} \sin. \theta$.

Wird nun der Winkel $-ax \sin. \theta = \varphi$ gesetzt, so erhält man nach §. 1177 folgenden Theil des Integrals:

$$\frac{2e^{ax\cos.\theta}}{n a^{n-1}} \left\{ \begin{array}{l} (-\cos.\theta\cos.\varphi - \sin.\theta\sin.\varphi) \int e^{-ax\cos.\theta} X dx \cos.\varphi \\ +(-\cos.\theta\sin.\varphi + \sin.\theta\cos.\varphi) \int e^{-ax\cos.\theta} X dx \sin.\varphi \end{array} \right\}$$

welche wie vorhin auf nachstehende Form zurückgeführt wird:

$$\frac{-2e^{ax\cos.\theta}}{n a^{n-1}} [\cos.(\theta + ax\sin.\theta) \int e^{-ax\cos.\theta} X dx \cos.(ax\sin.\theta) + \sin.(\theta + ax\sin.\theta) \int e^{-ax\cos.\theta} X dx \sin.(ax\sin.\theta)].$$

Nun schreibe man hier für θ successive die Winkel $\frac{2\pi}{n}$, $\frac{4\pi}{n}$, $\frac{6\pi}{n}$, ..., so lange sie kleiner als π sind, und bringe alle diese Theile

t den Anfangs gefundenen, und auch mit dem zweyten, wenn n
ie gerade Zahl ist, in eine Summe, so erhält man das gesuchte In-
gral oder den Werth von y.

Zusatz.

§. 1193. Da der allgemeine doppelte Factor

$$a^2 - 2az\cos.\theta + z^2$$

den Fällen, wo $\theta = 0$ und $\theta = \pi$ die einfachen reellen Factoren $-z$ und $a+z$ nicht selbst, sondern die Quadrate derselben gibt, ist einleuchtend, daß der hieraus entwickelte Theil des Integrals ch einmahl so groß ist, als jener Theil, welchen man nehmen muß.

Aufgabe 159.

§. 1194. Sey gegeben die Differenzialgleichung

$$X = y + \frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^3y}{dx^3} + \ldots + \frac{d^ny}{dx^n};$$

an suche das vollständige Integrale derselben.

Auflösung.

Die hieraus entstehende algebraische Formel ist

$$P = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \ldots + z^n,$$

ren sämmtliche Factoren aufgefunden werden müssen. Da also $= \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ ist, so wird man die Factoren des Ausdrucks $1-z^{n+1}$ t Ausnahme des Factors $1-z$ nehmen. Es ist also zuerst ein-chtend, daß, wenn $n+1$ eine gerade Zahl bezeichnet, der einfache ctor $1+z$ vorhanden seyn werde, und hieraus entsteht der Theil s Integrals

$$\frac{1}{A} e^{-x} \int e^x X dx,$$

bey $A = \frac{P}{1+z} = \frac{1-z^{n+1}}{1-z^2}$, wenn $z = -1$ gesetzt wird. s wird also auch $A = \frac{(n+1)z^n}{2z}$, folglich $A = \frac{1}{2}(n+1)$ seyn, daß dieser Theil des Integrals

$$\frac{2}{n+1} e^{-x} \int e^x X dx$$

rd. Es ist aber die Form der doppelten Factoren

$$1 - 2z\cos.\theta + z^2,$$

wenn der Winkel $\theta = \frac{2k\pi}{n+1}$ gesetzt wird, so daß wir nach §. 1176 $f = -1$ erhalten. Nun betrachte man den Ausdruck

$$\frac{dP}{dz} = \frac{1 - (n+1)z^n + nz^{n+1}}{(1-z)^2},$$

welche für $z = \cos.\theta + \sqrt{-1}\sin.\theta$ übergehen soll in $\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}\sqrt{-1}$, und so wird man erhalten:

$$\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}\sqrt{-1} = \frac{\left\{\begin{array}{l} 1 - (n+1)\cos.n\theta + n\cos.(n+1)\theta \\ -(n+1)\sqrt{-1}\sin.n\theta + n\sqrt{-1}\sin.(n+1)\theta \end{array}\right\}}{1 - 2\cos.\theta + \cos.2\theta - 2\sqrt{-1}\sin.\theta + \sqrt{-1}\sin.2\theta}$$

Weil aber

$$\sin.(n+1)\theta = 0 \quad \text{und} \quad \cos.(n+1)\theta = 1$$

ist, so wird man erhalten:

$$\sin.n\theta = -\sin.\theta \quad \text{und} \quad \cos.n\theta = \cos.\theta,$$

und daher

$$\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}\sqrt{-1} = \frac{(n+1) - (n+1)\cos.\theta + (n+1)\sqrt{-1}\sin\theta}{-2\cos.\theta + 2\cos.^2\theta - 2\sqrt{-1}\sin.\theta\,(1-\cos.\theta)}$$

oder

$$\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}\sqrt{-1} = \frac{n+1}{2(1-\cos.\theta)} \cdot \frac{1 - \cos.\theta + \sqrt{-1}\sin.\theta}{-\cos.\theta - \sqrt{-1}\sin.\theta}.$$

Multiplicirt man Zähler und Nenner dieses Bruches mit

$$-\cos.\theta + \sqrt{-1}\sin.\theta,$$

so wird man finden:

$$\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}\sqrt{-1} = \frac{-(n+1)\left[1 + \cos.\theta - 2\cos.^2\theta - \sqrt{-1}\sin.\theta\,(1-2\cos.\theta)\right]}{2(1-\cos.\theta)}$$

so daß

$$\mathfrak{P} = -\tfrac{1}{2}(n+1)(1+2\cos.\theta) \quad \text{und}$$

$$\mathfrak{Q} = \tfrac{1}{2}(n+1)\frac{\sin.\theta\,(1-2\cos.\theta)}{1-\cos.\theta},$$

und daher

$$\mathfrak{P}^2 + \mathfrak{Q}^2 = \frac{(n+1)^2}{2(1-\cos.\theta)^2}$$

wird. Setzt man aber dann den Winkel $-x\sin.\theta = \varphi$, so ergibt sich

$$\mathfrak{P}\cos.\varphi - \mathfrak{Q}\sin.\varphi = \frac{-(n+1)\left[\cos.(\theta-\varphi) - \cos.(2\theta-\varphi)\right]}{2(1-\cos.\theta)}$$

$$\mathfrak{P}\sin.\varphi + \mathfrak{Q}\cos.\varphi = \frac{+(n+1)\left[\sin.(\theta-\varphi) - \sin.(2\theta-\varphi)\right]}{2(1-\cos.\theta)};$$

weil aber

$$\cos. a - \cos. b = 2 \sin. \frac{a+b}{2} \sin. \frac{b-a}{2} \quad \text{und}$$

$$\sin. a - \sin. b = -2 \cos. \frac{a+b}{2} \sin. \frac{b-a}{2}$$

ist, so findet man aus jenen Gleichungen

$$\mathfrak{P} \cos. \varphi - \mathfrak{Q} \sin. \varphi = \frac{-(n+1) \sin. \frac{1}{2}(3\theta - 2\varphi)}{2 \sin. \frac{1}{2}\theta} \quad \text{und}$$

$$\mathfrak{P} \sin. \varphi + \mathfrak{Q} \cos. \varphi = \frac{-(n+1) \cos. \frac{1}{2}(3\theta - 2\varphi)}{2 \sin. \frac{1}{2}\theta},$$

und daher wird der gesuchte Theil des Integrales seyn:

$$\frac{-4}{n+1} e^{x \cos.\theta} \sin. \tfrac{1}{2}\theta \left[\sin. \tfrac{1}{2}(3\theta + 2x \sin.\theta) \int e^{-x \cos.\theta} X dx \cos.(x \sin.\theta) \right.$$
$$\left. - \cos. \tfrac{1}{2}(3\theta + 2x \sin.\theta) \int e^{-x \cos.\theta} X dx \sin.(x \sin.\theta)\right].$$

Man substituire also für θ nach und nach die Winkel

$$\frac{2\pi}{n+1}; \quad \frac{4\pi}{n+1}; \quad \frac{6\pi}{n+1} \text{ u. s. w.;}$$

so lange diese kleiner sind als π, bringe alle diese Theile in eine Summe, zu welcher, im Falle $n+1$ eine gerade Zahl seyn sollte, noch der Theil $\frac{2}{n+1} e^{-x} \int e^{x} X dx$ hinzuzufügen ist, und so wird man den Werth von y erhalten.

Zusatz 1.

§. 1195. Wenn die vorgelegte Gleichung ohne Ende fortschreitet, so daß also n eine unendliche Zahl bezeichnet, so werden die anfänglichen Werthe des Winkels θ sämmtlich unendlich klein, und ihre Anzahl daher unendlich groß, bis endlich die gerade Zahl $2k$ zur Zahl $n+1$ ein endliches Verhältniß zu haben anfängt; dann aber werden für θ lauter endliche Werthe in einer steigenden arithmetischen Progression erscheinen, deren Differenz $\frac{2\pi}{n+1}$ ist, und die bis π fortgeht; die Anzahl der Glieder aber ist ebenfalls unendlich groß.

Zusatz 2.

§. 1196. So lange der Winkel θ unendlich klein ist, nimmt der aus ihm entstehende Theil des Integrals folgende Form an:

$$\frac{-6^2 e^x}{n+1} \left[(3+2x) \int e^{-x} X dx - 2 \int e^{-x} X x dx\right],$$

und da dieſer durch die dritte Potenz einer unendlichen Größe getheilt iſt, ſo muß man auch die unendliche Menge ſolcher Formeln als verſchwindend betrachten.

Zuſatz 3.

§. 1197. Wenn $X = 0$ ſeyn ſollte, ſo daß man das Integrale der Gleichung

$$0 = y + \frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^3y}{dx^3} + \ldots + \frac{d^ny}{dx^n}$$

aufzuſuchen hat, ſo wird jeder Theil desſelben die Form

$e^{x \cos.\theta} [A \sin.\frac{1}{2}(3\theta + 2x \sin.\theta) + \mathfrak{A} \cos.\frac{1}{2}(3\theta + 2x \sin.\theta)]$

haben, oder einfacher ausgedrückt

$$A e^{x \cos.\theta} \cos.(\zeta + x \sin.\theta).$$

Da alſo für θ jeder beliebige Winkel genommen werden kann, wenn n unendlich groß iſt, ſo wird jedes particuläre Integrale jener Gleichung unter folgender Form erſcheinen:

$$y = A e^{x \cos.\theta} \cos.(x \sin.\theta + \zeta),$$

indem man für ζ ebenfalls einen beliebigen Winkel nimmt.

Anmerkung.

§. 1198. Ob aber das der ohne Ende fortlaufenden Differenzialgleichung

$$X = y + \frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^4y}{dx^4} + \ldots,$$

wobey X eine beliebige Function von x bezeichnet, entſprechende Integrale bequemer ausgedrückt werden kann, als durch die Summe jener unzähligen verſchwindenden Theile; dieß iſt eine Frage einer höhern Unterſuchung, und man ſcheint in der Analyſis noch nicht genug vorgedrungen zu ſeyn, um dieſelbe zu beantworten. In den Fällen, in welchen X eine ganze rationale Function iſt, wo nämlich

$$X = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \ldots$$

hat zwar die Sache keine Schwierigkeit, indem man, wenn

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \ldots + v$$

geſetzt wird, die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ immer ſo beſtimmen kann, daß nach gehöriger Subſtitution eine Gleichung von der Form

$$0 = v + \frac{dv}{dx} + \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^3v}{dx^3} + \ldots$$

zum Vorſchein kömmt, welcher der Werth

$$v = Ae^{x \cos. \theta} \cos. (x \sin. \theta + z)$$

als particuläres Integrale zugehört, wenn für z und θ beliebige Winkel genommen werden. Allein aus einem ſolchen gegebenen Werthe von X findet man:

$\alpha = a - b$; $\beta = b - 2c$; $\gamma = c - 3d$; $\delta = d - 4e$; $\varepsilon = e - 5f$ ...

Da aber im Allgemeinen

$$\frac{dX}{dx} = \frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^3y}{dx^3} + \ldots,$$

ſo iſt klar, daß, wenn $y = X - \frac{dX}{dx} + v$ geſetzt wird, jene Gleichung immer in folgende transformirt werde:

$$0 = v + \frac{dv}{dx} + \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^3v}{dx^3} + \ldots$$

Zuſatz.

§. 1199. Hier haben wir alſo wider unſere Erwartung das vollſtändige Integrale der ohne Ende fortlaufenden Differenzialgleichung

$$X = y + \frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^4y}{dx^4} + \ldots, \text{ ohne Ende,}$$

für welche, wie wir ſchon wiſſen:

$$y = X - \frac{dX}{dx} + Ae^{x \cos. \theta} \cos. (x \sin. \theta + z)$$

iſt. Hier kann das letzte Glied ohne Ende vervielfältigt werden, weil die Winkel z und θ ganz willkürlich ſind. Dieſer Ausdruck iſt mit jener ſehr verwickelten Formel, welche aus der Auflöſung hervorging, für gleichgeltend zu halten.

Aufgabe 160.

§. 1200. Sey gegeben folgende Differentialgleichung

$$X = y + \frac{n\,dy}{a\,dx} + \frac{n(n-1)\,d^2y}{1 \cdot 2 \cdot a^2 dx^2} + \frac{n(n-1)(n-2)\,d^3y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a^3 dx^3} + \ldots$$

wobey n eine ganze poſitive Zahl bezeichnen ſoll, ſo daß die Anzahl der Glieder begränzt wird; man ſuche das vollſtändige Integrale jener Gleichung.

Auflösung.

Die algebraische Formel, welche wir hier zu betrachten haben, ist

$$P = 1 + \frac{n}{1}\frac{z}{a} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{z^2}{a^2} + \ldots = \left(1 + \frac{z}{a}\right)^n,$$

welche also lauter einfache Factoren hat, die sämmtlich gleich $z + a$ sind. Da also $\frac{P}{(a+z)^n} = \frac{1}{a^n}$, so finden wir nach §. 1163 sogleich das gesuchte Integrale

$$y = a^n e^{-ax} \int dx \int dx \int dx \ldots \int e^{ax} X dx;$$

wo die Anzahl der Integralzeichen dem Exponenten n gleich ist. Diesen Ausdruck aber kann man auf folgende Weise in einfache Integralien auflösen, und zwar mit Hülfe der allgemeinen Reduction, nach welcher, wie wir wissen,

$$\int dx \int V dx = x \int V dx - \int V x dx$$

ist, es wird demnach

$$\int dx \int e^{ax} X dx = x \int e^{ax} X dx - \int e^{ax} X x dx$$

$$\int dx \int dx \int e^{ax} X dx =$$

$$= \tfrac{1}{2}x^2 \int e^{ax} X dx - x \int e^{ax} X x dx + \tfrac{1}{2}\int e^{ax} X x^2 dx$$

$$\int dx \int dx \int dx \int e^{ax} X dx =$$

$$= \frac{x^3 \int e^{ax} X dx - 3x^2 \int e^{ax} X x dx + 3x \int e^{ax} X x^2 dx - \int e^{ax} X x^3 dx}{1\cdot 2\cdot 3}$$

u. s. w.

Da also die Anzahl der Integralzeichen gleich n ist, so schließen wir, daß

$$y = \frac{a^n e^{-ax}}{1.2\ldots(n-1)}\left[x^{n-1}\int e^{ax} X dx - \frac{(n-1)}{1} x^{n-2}\int e^{ax} X x dx + \right.$$
$$\left. + \frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2} x^{n-3}\int e^{ax} X x^2 dx - \ldots\right].$$

Da hier jedes einzelne Integral eine willkürliche Constante mit sich führt, so ist offenbar dieß Integrale das vollständige.

Zusatz 1.

§. 1201. Wenn also $X = 0$ wäre, so würde das vollständige Integrale der vorgelegten Differenzialgleichung seyn:

$$y = e^{-ax}(Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + \ldots + Mx + N),$$

wo die Anzahl der willkürlichen Constanten A, B, C ... ebenfalls gleich n ist.

Zusatz 2.

§. 1202. Wenn n unendlich groß ist, und zugleich die Größe a unendlich groß genommen wird, so daß $a = nc$ ist, so wird die zu integrirende Gleichung ins Unendliche fortgehen, und man wird erhalten:

$$X = y + \frac{dy}{c\,dx} + \frac{d^2y}{1.2.c^2dx^2} + \frac{d^3y}{1.2.3.c^3dx^3} + \ldots;$$

endet man aber die Integralgleichung auf diesen Fall an, so verbreitet dieses kein Licht über die Sache.

Zusatz 3.

§. 1203. Es mag aber y was immer für eine Function von x und n, so geht sie, wenn man $x + \frac{1}{c}$ statt x schreibt, bekanntlich über in folgende Reihe:

$$y + \frac{dy}{c\,dx} + \frac{d^2y}{1.2.c^2dx^2} + \frac{d^3y}{1.2.3.c^3dx^3} + \ldots,$$

und da diese gleich X seyn muß, so leuchtet umgekehrt ein, daß y einer Function von x gleich werde, welche aus X entsteht, wenn man daselbst $x - \frac{1}{c}$ statt x schreibt.

Anmerkung 1.

§. 1204. Um dieses nun leichter einzusehen, bemerke ich, daß, wenn was immer für eine Gleichung von der Form

$$X = Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} + D\frac{d^3y}{dx^3} + \ldots$$

immer ein particuläres Integrale ohne alle Integration näherungsweise auf folgende Art gefunden werden könne. Man setze

$$y = \alpha X + \beta\frac{dX}{dx} + \gamma\frac{d^2X}{dx^2} + \delta\frac{d^3X}{dx^3} + \ldots,$$

und nach gehöriger Substitution wird man erhalten:

$$\begin{aligned} X = {} & A\alpha X + A\beta\frac{dX}{dx} + A\gamma\frac{d^2X}{dx^2} + A\delta\frac{d^3X}{dx^3} + \ldots \\ & + B\alpha \quad + B\beta \quad + B\gamma \\ & \quad + C\alpha \quad + C\beta \\ & \quad\quad + D\alpha; \end{aligned}$$

woraus sich die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ so bestimmen, daß

$\alpha = \frac{1}{A}$ wird, dann aber erhält man für die übrigen:

$$\beta = \frac{-B\alpha}{A} = \frac{-B}{A^2}$$

$$\gamma = \frac{-C\alpha - B\beta}{A} = \frac{-C}{A^2} + \frac{B^2}{A^3}$$

$$\delta = \frac{-D\alpha - C\beta - B\gamma}{A} = \frac{-D}{A^2} + \frac{2BC}{A^3} - \frac{B^3}{A^4}$$

$$\epsilon = \frac{-E\alpha - D\beta - C\gamma - B\delta}{A} = \frac{-E}{A^2} + \frac{2BD + C^2}{A^3} - \frac{3B^2C}{A^4} + \frac{B^4}{A^5}$$

u. s. w.

und wenn man diese für den Fall unseres Problemes einrichtet, wird

$$y = X - \frac{n\,dX}{1.a\,dx} + \frac{n(n+1)\,d^2X}{1.2.a^2\,dx^2} - \frac{n(n+1)(n+2)\,d^3X}{1.2.3.a^3\,dx^3} + \ldots$$

Hieraus ergibt sich für den Fall, in welchem $n = \infty$ und $a = nc$ ist:

$$y = X - \frac{dX}{1.c\,dx} + \frac{d^2X}{1.2.c^2\,dx^2} - \frac{d^3X}{1.2.3.c^3\,dx^3} + \ldots,$$

und obgleich dieser Ausdruck ins Unendliche fortgeht, so bestimmt er doch offenbar jene Function von x, welche aus X entsteht, wenn man $x - \frac{1}{c}$ statt x schreibt.

Bezeichnen wir nun diese neue Function durch X′, und setzen $y = X' + v$, so verwandelt sich die Gleichung des Zusatzes 2 in

$$0 = v + \frac{dv}{dx} + \frac{d^2v}{1.2.dx^2} + \frac{d^3v}{1.2.3.dx^3} + \ldots,$$

und jedes particuläre Integrale derselben ist $v = A\,e^{-ncx^m}$, wobey n eine unendlich große und m eine ganze positive Zahl bezeichnet.

Zusatz 2.

§. 1205. Das Gesagte leitet mich auf folgende Betrachtung, rücksichtlich der Summation der Reihen. Sey nämlich irgend eine Reihe

1	2	3	4		x
A,	B,	C,	D	.....	T

wo das dem Zeiger x entsprechende Glied T irgend eine Function von x seyn soll. Man setze die Summe aller dieser Glieder

$$A + B + C + D + \ldots + T = y,$$

ist einleuchtend, daß y eine solche Function von x seyn werde, daß, enn man in ihr x — 1 statt x setzt, eben diese Summe y, mit Aus- ahme des letzten Gliedes T, nämlich y — T, zum Vorschein kommen erde. Setzt man aber x — 1 statt x, so geht die Function y über in

$$y - \frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{1.2.dx^2} + \frac{d^3y}{1.2.3.dx^3} + \ldots,$$

nd hieraus erhält man die Gleichung

$$= \frac{dy}{dx} - \frac{d^2y}{1.2.dx^2} + \frac{d^3y}{1.2.3.dx^3} - \frac{d^4y}{1,2,3.4.dx^4} + \ldots$$

Wird diese einmahl integrirt, und $\int T dx = X$ gesetzt, so ndet man

$$= y - \frac{dy}{1.2.dx} + \frac{d^2y}{1.2.3.dx^2} - \frac{d^3y}{1.2.3.4.dx^3} + \ldots,$$

nd nun wollen wir sehen, wie wir diese Gleichung integriren können, enn wir sie ein wenig allgemeiner darstellen.

Aufgabe 161.

§. 1206. Das vollständige Integrale der Differenzialgleichung

$$X = \frac{ny}{a} - \frac{n(n-1)dy}{1.2.a^2dx} + \frac{n(n-1)(n-2)d^2y}{1.2.3.a^3dx^2} - \ldots$$

zu suchen.

Auflösung.

Man bilde aus der vorgelegten Gleichung den algebraischen usdruck

$$= \frac{n}{a} - \frac{n(n-1)z}{1.2.a^2} + \frac{n(n-1)(n-2)z^2}{1.2.3.a^3} - \ldots = \frac{1-\left(1-\frac{z}{a}\right)^n}{z}$$

er

$$P = \frac{a^n - (a-z)^n}{a^n z};$$

er quadratische Factor dieses Ausdruckes wird die Form haben:

$$a^2 - 2a(a-z)\cos. 2\zeta + (a-z)^2,$$

wobey $2\zeta = \frac{2k\pi}{n}$ ist.

Dieser Ausdruck aber geht über in

$$a^2(1 - \cos. 2\zeta) - 2az(1 - \cos. 2\zeta) + z^2 = 4a^2 \sin.\zeta^2 - 4az \sin.\zeta^2 + z^2,$$

und gibt, wenn er mit dem allgemeinen Ausdrucke

$$f^2 + 2fz\cos.\theta + z^2$$

verglichen wird:

$$f = 2a\sin.\zeta \quad \text{und} \quad \cos.\theta = -\sin.\zeta;$$

mithin ist

$$\theta = 90^\circ + \zeta \quad \text{und} \quad \sin.\theta = \cos.\zeta,$$

wobey $\zeta = \frac{k\pi}{n}$ ist. Um nun den hieraus entstandenen Theil des Integrals zu finden, betrachte man die Formel

$$\frac{dP}{dz} = \frac{-a^n + [a + (n-1)z](a-z)^{n-1}}{a^n z^2}.$$

Setzt man in dieser

$$z = -f(\cos.\theta + \sqrt{-1}\sin.\theta) \quad \text{oder}$$

$$z = 2a\sin.\zeta(\sin.\zeta - \sqrt{-1}\cos.\zeta) = a(1 - \cos.2\zeta - \sqrt{-1}\sin.2\zeta),$$

also

$$a - z = a(\cos.2\zeta + \sqrt{-1}\sin.2\zeta),$$

so erhält man

$$\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}\sqrt{-1} = \frac{\left\{\begin{matrix}-1 + [n - (n-1)(\cos.2\zeta + \sqrt{-1}\sin.2\zeta)] \\ [\cos.2(n-1)\zeta + \sqrt{-1}\sin.2(n-1)\zeta]\end{matrix}\right\}}{-4a^2\sin.\zeta^2(\cos.2\zeta + \sqrt{-1}\sin.2\zeta)}.$$

Da aber

$$\cos.2n\zeta = 1 \quad \text{und} \quad \sin.2n\zeta = 0$$

ist, so wird man erhalten:

$$\cos.2(n-1)\zeta = \cos.2\zeta \text{ und } \sin.2(n-1)\zeta = -\sin.2\zeta,$$

und daher

$$\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}\sqrt{-1} = \frac{-n + n(\cos.2\zeta - \sqrt{-1}\sin.2\zeta)}{-4a^2\sin\zeta^2(\cos.2\zeta + \sqrt{-1}\sin.2\zeta)},$$

welcher Ausdruck sich auf folgende Form reducirt:

$$\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}\sqrt{-1} =$$

$$= \frac{n}{4a^2\sin.\zeta^2}(\cos.2\zeta - \sqrt{-1}\sin.2\zeta - \cos.4\zeta + \sqrt{-1}\sin.4\zeta),$$

und hieraus schließen wir, daß

$$\mathfrak{P} = \frac{n}{4a^2\sin.^2\zeta}(\cos.2\zeta - \cos.4\zeta) = \frac{n}{2a^2\sin.\zeta}\sin.3\zeta,$$

$$\mathfrak{Q} = \frac{-n}{4a^2\sin.^2\zeta}(\sin.2\zeta - \sin.4\zeta) = \frac{n}{2a^2\sin.\zeta}\cos.3\zeta,$$

und so wird

$$\mathfrak{P}^2 + \mathfrak{Q}^2 = \frac{n^2}{4a^4 \sin.\zeta^4};$$

setzt man

$$\varphi = 2ax \sin.z \cos.z = ax \sin.2z,$$

so wird man finden:

$$\mathfrak{P} \cos.\varphi - \mathfrak{Q} \sin.\varphi = \frac{n}{2a^2 \sin.\zeta} \sin.(3z - \varphi) \text{ und}$$

$$\mathfrak{P} \sin.\varphi + \mathfrak{Q} \cos.\varphi = \frac{n}{2a^2 \sin.\zeta} \cos.(3z - \varphi).$$

Der hieraus sich ergebende Theil des Integrals wird demnach seyn:

$$\frac{4a^2 \sin.\zeta}{n} e^{2ax \sin.^2\zeta} [\sin.(3z - \varphi) \int e^{-2ax \sin.^2\zeta} X dx \cos.\varphi$$
$$+ \cos.(3z - \varphi) \int e^{-2ax \sin.^2\zeta} X dx \sin.\varphi],$$

wo man für z nach und nach die Winkel

$$\frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \frac{3\pi}{n}, \frac{4\pi}{n} \ldots$$

schreiben muß, so lange diese kleiner sind als ein rechter; wenn aber n eine gerade Zahl ist, so muß man zu diesen Theilen noch überdieß den Ausdruck

$$-\frac{2a^2}{n} e^{2ax} \int e^{-2ax} X dx$$

addiren, und so wird man den wahren Werth von y erhalten.

Zusatz 1.

§. 1207. Wenn $X = 0$ ist, so entsteht aus jedem Winkel $z = \frac{k\pi}{n}$ ein Theil des Integrals, der folgende Form annimmt:

$$e^{2ax \sin.^2\zeta} [A \sin.(3z - ax \sin.2z) + B \cos.(3z - ax \sin.2z)]$$

oder auch

$$A e^{2ax \sin.^2\zeta} \sin.(\alpha + ax \sin.2z),$$

wobey α einen beliebigen unveränderlichen Winkel bezeichnet.

Zusatz 2.

§. 1208. Ist aber irgend ein particuläres Integrale $y = V$ gefunden, welches der vorgelegten Gleichung Genüge leistet, und wir setzen dann $y = V + v$, so wird man folgende Gleichung erhalten:

wenn der Winkel $\theta = \frac{2k\pi}{n+1}$ geſetzt wird, ſo daß wir nach §. 1176 $f = -1$ erhalten. Nun betrachte man den Ausdruck

$$\frac{dP}{dz} = \frac{1 - (n+1)\,z^n + n\,z^{n+1}}{(1-z)^2},$$

welche für $z = \cos.\theta + \sqrt{-1}\,\sin.\theta$ übergehen ſoll in $\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}\sqrt{-1}$, und ſo wird man erhalten:

$$\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}\sqrt{-1} = \frac{\left\{\begin{array}{l} 1 - (n+1)\cos.n\theta + n\cos.(n+1)\theta \\ -(n+1)\sqrt{-1}\sin.n\theta + n\sqrt{-1}\sin.(n+1)\theta \end{array}\right\}}{1 - 2\cos.\theta + \cos.2\theta - 2\sqrt{-1}\sin.\theta + \sqrt{-1}\sin.2\theta}$$

Weil aber

$$\sin.(n+1)\,\theta = 0 \quad \text{und} \quad \cos.(n+1)\,\theta = 1$$

iſt, ſo wird man erhalten:

$$\sin.n\theta = -\sin.\theta \quad \text{und} \quad \cos.n\theta = \cos.\theta,$$

und daher

$$\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}\sqrt{-1} = \frac{(n+1) - (n+1)\cos.\theta + (n+1)\sqrt{-1}\sin\theta}{-2\cos.\theta + 2\cos.^2\theta - 2\sqrt{-1}\sin.\theta\,(1-\cos.\theta)}$$

oder

$$\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}\sqrt{-1} = \frac{n+1}{2(1-\cos.\theta)} \cdot \frac{1 - \cos.\theta + \sqrt{-1}\sin.\theta}{-\cos.\theta - \sqrt{-1}\sin.\theta}.$$

Multiplicirt man Zähler und Nenner dieſes Bruches mit

$$-\cos.\theta + \sqrt{-1}\sin.\theta,$$

ſo wird man finden:

$$\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}\sqrt{-1} = \frac{-(n+1)\,[1 + \cos.\theta - 2\cos.^2\theta - \sqrt{-1}\sin.\theta\,(1 - 2\cos.\theta)]}{2\,(1 - \cos.\theta)}$$

ſo daß

$$\mathfrak{P} = -\tfrac{1}{2}(n+1)\,(1 + 2\cos.\theta) \quad \text{und}$$

$$\mathfrak{Q} = \tfrac{1}{2}(n+1)\,\frac{\sin.\theta\,(1 - 2\cos.\theta)}{1 - \cos.\theta},$$

und daher

$$\mathfrak{P}^2 + \mathfrak{Q}^2 = \frac{(n+1)^2}{2\,(1-\cos.\theta)^2}$$

wird. Setzt man aber dann den Winkel $-x\,\sin.\theta = \varphi$, ſo ergibt ſich

$$\mathfrak{P}\cos.\varphi - \mathfrak{Q}\sin.\varphi = \frac{-(n+1)\,[\cos.(\theta-\varphi) - \cos.(2\theta-\varphi)]}{2\,(1-\cos.\theta)}$$

$$\mathfrak{P}\sin.\varphi + \mathfrak{Q}\cos.\varphi = \frac{+(n+1)\,[\sin.(\theta-\varphi) - \sin.(2\theta-\varphi)]}{2\,(1-\cos.\theta)}$$

weil aber

$$\cos. a - \cos. b = 2 \sin. \frac{a+b}{2} \sin. \frac{b-a}{2} \quad \text{und}$$

$$\sin. a - \sin. b = -2 \cos. \frac{a+b}{2} \sin. \frac{b-a}{2}$$

ist, so findet man aus jenen Gleichungen

$$\mathfrak{P} \cos. \varphi - \mathfrak{Q} \sin. \varphi = \frac{-(n+1) \sin. \frac{1}{2}(3\theta - 2\varphi)}{2 \sin. \frac{1}{2}\theta} \quad \text{und}$$

$$\mathfrak{P} \sin. \varphi + \mathfrak{Q} \cos. \varphi = \frac{-(n+1) \cos. \frac{1}{2}(3\theta - 2\varphi)}{2 \sin. \frac{1}{2}\theta},$$

und daher wird der gesuchte Theil des Integrales seyn:

$$\frac{-4}{n+1} e^{x \cos.\theta} \sin. \tfrac{1}{2}\theta \,[\sin. \tfrac{1}{2}(3\theta + 2x \sin.\theta) \int e^{-x \cos.\theta} X dx \cos.(x \sin.\theta)$$
$$- \cos. \tfrac{1}{2}(3\theta + 2x \sin.\theta) \int e^{-x \cos.\theta} X dx \sin.(x \sin.\theta)].$$

Man substituire also für θ nach und nach die Winkel

$$\frac{2\pi}{n+1}; \quad \frac{4\pi}{n+1}; \quad \frac{6\pi}{n+1} \text{ u. s. w.;}$$

so lange diese kleiner sind als π, bringe alle diese Theile in eine Summe, zu welcher, im Falle $n+1$ eine gerade Zahl seyn sollte, noch der Theil $\frac{2}{n+1} e^{-x} \int e^{x} X dx$ hinzuzufügen ist, und so wird man den Werth von y erhalten.

Zusatz 1.

§. 1195. Wenn die vorgelegte Gleichung ohne Ende fortschreitet, so daß also n eine unendliche Zahl bezeichnet, so werden die anfänglichen Werthe des Winkels θ sämmtlich unendlich klein, und ihre Anzahl daher unendlich groß, bis endlich die gerade Zahl $2k$ zur Zahl $n+1$ ein endliches Verhältniß zu haben anfängt; dann aber werden für θ lauter endliche Werthe in einer steigenden arithmetischen Progression erscheinen, deren Differenz $\frac{2\pi}{n+1}$ ist, und die bis π fortgeht; die Anzahl der Glieder aber ist ebenfalls unendlich groß.

Zusatz 2.

§. 1196. So lange der Winkel θ unendlich klein ist, nimmt der aus ihm entstehende Theil des Integrals folgende Form an:

$$\frac{-6^2 e^x}{n+1} [(3+2x) \int e^{-x} X dx - 2 \int e^{-x} X x dx],$$

und da dieſer durch die dritte Potenz einer unendlichen Größe getheilt iſt, ſo muß man auch die unendliche Menge ſolcher Formeln als verſchwindend betrachten.

Zuſatz 3.

§. 1197. Wenn $X = 0$ ſeyn ſollte, ſo daß man das Integrale der Gleichung

$$0 = y + \frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^3y}{dx^3} + \ldots + \frac{d^ny}{dx^n}$$

aufzuſuchen hat, ſo wird jeder Theil desſelben die Form

$e^{x \cos.\theta} [A \sin.\frac{1}{2}(3\theta + 2x \sin.\theta) + \mathfrak{A} \cos.\frac{1}{2}(3\theta + 2x \sin.\theta)]$

haben, oder einfacher ausgedrückt

$$A e^{x \cos.\theta} \cos.(\zeta + x \sin.\theta).$$

Da alſo für θ jeder beliebige Winkel genommen werden kann, wenn n unendlich groß iſt, ſo wird jedes particuläre Integrale jener Gleichung unter folgender Form erſcheinen:

$$y = A e^{x \cos.\theta} \cos.(x \sin.\theta + \zeta),$$

indem man für ζ ebenfalls einen beliebigen Winkel nimmt.

Anmerkung.

§. 1198. Ob aber das der ohne Ende fortlaufenden Differenzialgleichung

$$X = y + \frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^4y}{dx^4} + \ldots,$$

wobey X eine beliebige Function von x bezeichnet, entſprechende Integrale bequemer ausgedrückt werden kann, als durch die Summe jener unzähligen verſchwindenden Theile; dieß iſt eine Frage einer höhern Unterſuchung, und man ſcheint in der Analyſis noch nicht genug vorgedrungen zu ſeyn, um dieſelbe zu beantworten. In den Fällen, in welchen X eine ganze rationale Function iſt, wo nämlich

$$X = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \ldots$$

hat zwar die Sache keine Schwierigkeit, indem man, wenn

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \ldots + v$$

geſetzt wird, die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ immer ſo beſtimmen kann, daß nach gehöriger Subſtitution eine Gleichung von der Form

$$0 = v + \frac{dv}{dx} + \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^3v}{dx^3} + \ldots$$

zum Vorschein kömmt, welcher der Werth

$$v = A e^{x \cos. \theta} \cos. (x \sin. \theta + z)$$

als particuläres Integrale zugehört, wenn für z und θ beliebige Winkel genommen werden. Allein aus einem solchen gegebenen Werthe von X findet man:

$\alpha = a - b$; $\beta = b - 2c$; $\gamma = c - 3d$; $\delta = d - 4e$; $\varepsilon = e - 5f$ ...

Da aber im Allgemeinen

$$\frac{dX}{dx} = \frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^3y}{dx^3} + \ldots,$$

so ist klar, daß, wenn $y = X - \frac{dX}{dx} + v$ gesetzt wird, jene Gleichung immer in folgende transformirt werde:

$$0 = v + \frac{dv}{dx} + \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^3v}{dx^3} + \ldots$$

Zusatz.

§. 1199. Hier haben wir also wider unsere Erwartung das vollständige Integrale der ohne Ende fortlaufenden Differenzialgleichung

$$X = y + \frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^4y}{dx^4} + \ldots, \text{ ohne Ende,}$$

für welche, wie wir schon wissen:

$$y = X - \frac{dX}{dx} + A e^{x \cos. \theta} \cos. (x \sin. \theta + z)$$

ist. Hier kann das letzte Glied ohne Ende vervielfältigt werden, weil die Winkel z und θ ganz willkürlich sind. Dieser Ausdruck ist mit jener sehr verwickelten Formel, welche aus der Auflösung hervorging, für gleichgeltend zu halten.

Aufgabe 160.

§. 1200. Sey gegeben folgende Differentialgleichung

$$X = y + \frac{n\,dy}{a\,dx} + \frac{n(n-1)\,d^2y}{1 \cdot 2 \cdot a^2 dx^2} + \frac{n(n-1)(n-2)\,d^3y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a^3 dx^3} + \ldots$$

wobey n eine ganze positive Zahl bezeichnen soll, so daß die Anzahl der Glieder begränzt wird; man suche das vollständige Integrale jener Gleichung.

Auflösung.

Die algebraische Formel, welche wir hier zu betrachten haben, ist

$$P = 1 + \frac{n}{1}\frac{z}{a} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{z^2}{a^2} + \ldots = \left(1 + \frac{z}{a}\right)^n,$$

welche also lauter einfache Factoren hat, die sämmtlich gleich $z + a$ sind. Da also $\frac{P}{(a+z)^n} = \frac{1}{a^n}$, so finden wir nach §. 1163 sogleich das gesuchte Integrale

$$y = a^n e^{-ax} \int dx \int dx \int dx \ldots \int e^{ax} X dx;$$

wo die Anzahl der Integralzeichen dem Exponenten n gleich ist. Diesen Ausdruck aber kann man auf folgende Weise in einfache Integralien auflösen, und zwar mit Hülfe der allgemeinen Reduction, nach welcher, wie wir wissen,

$$\int dx \int V dx = x \int V dx - \int V x dx$$

ist, es wird demnach

$$\int dx \int e^{ax} X dx = x \int e^{ax} X dx - \int e^{ax} X x dx$$

$$\int dx \int dx \int e^{ax} X dx =$$

$$= \tfrac{1}{2}x^2 \int e^{ax} X dx - x \int e^{ax} X x dx + \tfrac{1}{2}\int e^{ax} X x^2 dx$$

$$\int dx \int dx \int dx \int e^{ax} X dx =$$

$$= \frac{x^3 \int e^{ax} X dx - 3x^2 \int e^{ax} X x dx + 3x \int e^{ax} X x^2 dx - \int e^{ax} X x^3 dx}{1\cdot 2\cdot 3}$$

u. s. w.

Da also die Anzahl der Integralzeichen gleich n ist, so schließen wir, daß

$$y = \frac{a^n e^{-ax}}{1.2\ldots(n-1)}\left[x^{n-1}\int e^{ax} X dx - \frac{(n-1)}{1} x^{n-2}\int e^{ax} X x dx + \right.$$
$$\left. + \frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2} x^{n-3}\int e^{ax} X x^2 dx - \ldots\right].$$

Da hier jedes einzelne Integral eine willkürliche Constante mit sich führt, so ist offenbar dieß Integrale das vollständige.

Zusatz 1.

§. 1201. Wenn also $X = 0$ wäre, so würde das vollständige Integrale der vorgelegten Differenzialgleichung seyn:

$y = e^{-ax}(Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + \ldots + Mx + N)$,

wo die Anzahl der willkürlichen Constanten A, B, C ... ebenfalls gleich n ist.

Zusatz 2.

§. 1202. Wenn n unendlich groß ist, und zugleich die Größe a unendlich groß genommen wird, so daß $a = nc$ ist, so wird die zu integrirende Gleichung ins Unendliche fortgehen, und man wird erhalten:

$$X = y + \frac{dy}{c\,dx} + \frac{d^2y}{1.2.c^2dx^2} + \frac{d^3y}{1.2.3.c^3dx^3} + \ldots;$$

endet man aber die Integralgleichung auf diesen Fall an, so verbreitet dieses kein Licht über die Sache.

Zusatz 3.

§. 1203. Es mag aber y was immer für eine Function von x yn, so geht sie, wenn man $x + \frac{1}{c}$ statt x schreibt, bekanntlich über folgende Reihe:

$$y + \frac{dy}{c\,dx} + \frac{d^2y}{1.2.c^2dx^2} + \frac{d^3y}{1.2.3.c^3dx^3} + \ldots,$$

ıd da diese gleich X seyn muß, so leuchtet umgekehrt ein, daß y ner Function von x gleich werde, welche aus X entsteht, wenn man ıselbst $x - \frac{1}{c}$ statt x schreibt.

Anmerkung 1.

§. 1204. Um dieses nun leichter einzusehen, bemerke ich, daß, enn was immer für eine Gleichung von der Form

$$X = Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} + D\frac{d^3y}{dx^3} + \ldots$$

ımer ein particuläres Integrale ohne alle Integration näherungseise auf folgende Art gefunden werden könne. Man setze

$$y = \alpha X + \beta\frac{dX}{dx} + \gamma\frac{d^2X}{dx^2} + \delta\frac{d^3X}{dx^3} + \ldots,$$

nd nach gehöriger Substitution wird man erhalten:

$$\begin{aligned} X = {} & A\alpha X + A\beta\frac{dX}{dx} + A\gamma\frac{d^2X}{dx^2} + A\delta\frac{d^3X}{dx^3} + \ldots \\ & + B\alpha \quad + B\beta \quad + B\gamma \\ & \quad + C\alpha \quad + C\beta \\ & \quad\quad + D\alpha; \end{aligned}$$

oraus sich die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ so bestimmen, daß

$\alpha = \frac{1}{A}$ wird, dann aber erhält man für die übrigen:

$$\beta = \frac{-B\alpha}{A} = \frac{-B}{A^2}$$

$$\gamma = \frac{-C\alpha - B\beta}{A} = \frac{-C}{A^2} + \frac{B^2}{A^3}$$

$$\delta = \frac{-D\alpha - C\beta - B\gamma}{A} = \frac{-D}{A^2} + \frac{2BC}{A^3} - \frac{B^3}{A^4}$$

$$\varepsilon = \frac{-E\alpha - D\beta - C\gamma - B\delta}{A} = \frac{-E}{A^2} + \frac{2BD + C^2}{A^3} - \frac{3B^2C}{A^4} + \frac{B^4}{A^5}$$

u. s. w.

und wenn man diese für den Fall unseres Problemes einrichtet, wird

$$y = X - \frac{n\,dX}{1.a\,dx} + \frac{n(n+1)\,d^2X}{1.2.a^2\,dx^2} - \frac{n(n+1)(n+2)\,d^3X}{1.2.3.a^3\,dx^3} + \ldots$$

Hieraus ergibt sich für den Fall, in welchem $n = \infty$ und $a = nc$ ist:

$$y = X - \frac{dX}{1.c\,dx} + \frac{d^2X}{1.2.c^2\,dx^2} - \frac{d^3X}{1.2.3.c^3\,dx^3} + \ldots,$$

und obgleich dieser Ausdruck ins Unendliche fortgeht, so bestimmt er doch offenbar jene Function von x, welche aus X entsteht, wenn man $x - \frac{1}{c}$ statt x schreibt.

Bezeichnen wir nun diese neue Function durch X', und setzen $y = X' + v$, so verwandelt sich die Gleichung des Zusatzes 2 in

$$0 = v + \frac{dv}{dx} + \frac{d^2v}{1.2.dx^2} + \frac{d^3v}{1.2.3.dx^3} + \ldots,$$

und jedes particuläre Integrale derselben ist $v = A\,e^{-ncx}x^m$, wobey n eine unendlich große und m eine ganze positive Zahl bezeichnet.

Zusatz 2.

§. 1205. Das Gesagte leitet mich auf folgende Betrachtung rücksichtlich der Summation der Reihen. Sey nämlich irgend eine Reihe

1	2	3	4		x
A,	B,	C,	D	.....	T

wo das dem Zeiger x entsprechende Glied T irgend eine Function von x seyn soll. Man setze die Summe aller dieser Glieder

$$A + B + C + D + \ldots + T = y,$$

So ist einleuchtend, daß y eine solche Function von x seyn werde, daß, wenn man in ihr $x-1$ statt x setzt, eben diese Summe y, mit Ausnahme des letzten Gliedes T, nämlich $y-T$, zum Vorschein kommen werde. Setzt man aber $x-1$ statt x, so geht die Function y über in

$$y - \frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{1.2.dx^2} + \frac{d^3y}{1.2.3.dx^3} + \ldots,$$

und hieraus erhält man die Gleichung

$$T = \frac{dy}{dx} - \frac{d^2y}{1.2.dx^2} + \frac{d^3y}{1.2.3.dx^3} - \frac{d^4y}{1,2,3.4.dx^4} + \ldots$$

Wird diese einmahl integrirt, und $\int T\,dx = X$ gesetzt, so findet man

$$X = y - \frac{dy}{1.2.dx} + \frac{d^2y}{1.2.3.dx^2} - \frac{d^3y}{1.2.3.4.dx^3} + \ldots,$$

und nun wollen wir sehen, wie wir diese Gleichung integriren können, wenn wir sie ein wenig allgemeiner darstellen.

Aufgabe 161.

§. 1206. Das vollständige Integrale der Differenzialgleichung

$$X = \frac{ny}{a} - \frac{n(n-1)\,dy}{1.2.a^2dx} + \frac{n(n-1)(n-2)\,d^2y}{1.2.3.a^3dx^2} - \ldots$$

zu suchen.

Auflösung.

Man bilde aus der vorgelegten Gleichung den algebraischen Ausdruck

$$P = \frac{n}{a} - \frac{n(n-1)z}{1.2.a^2} + \frac{n(n-1)(n-2)z^2}{1.2.3.a^3} - \ldots = \frac{1-\left(1-\frac{z}{a}\right)^n}{z}$$

oder

$$P = \frac{a^n - (a-z)^n}{a^n z};$$

jeder quadratische Factor dieses Ausdruckes wird die Form haben:

$$a^2 - 2a(a-z)\cos.2\zeta + (a-z)^2,$$

wobey $2\zeta = \frac{2k\pi}{n}$ ist.

Dieser Ausdruck aber geht über in

$$2a^2(1-\cos.2\zeta) - 2az(1-\cos.2\zeta) + z^2 = 4a^2\sin.\zeta^2 - 4az\sin.\zeta^2 + z^2,$$

und gibt, wenn er mit dem allgemeinen Ausdrucke

$$f^2 + 2fz \cos.\theta + z^2$$

verglichen wird:

$$f = 2a \sin.\zeta \quad \text{und} \quad \cos.\theta = -\sin.\zeta;$$

mithin ist

$$\theta = 90^\circ + \zeta \quad \text{und} \quad \sin.\theta = \cos.\zeta,$$

wobey $\zeta = \frac{k\pi}{n}$ ist. Um nun den hieraus entstandenen Theil des Integrals zu finden, betrachte man die Formel

$$\frac{dP}{dz} = \frac{-a^n + [a + (n-1)z](a-z)^{n-1}}{a^n z^2}.$$

Setzt man in dieser

$$z = -f(\cos.\theta + \sqrt{-1}\sin.\theta) \quad \text{oder}$$

$$z = 2a\sin.\zeta(\sin.\zeta - \sqrt{-1}\cos.\zeta) = a(1 - \cos.2\zeta - \sqrt{-1}\sin.2\zeta),$$

also

$$a - z = a(\cos.2\zeta + \sqrt{-1}\sin.2\zeta),$$

so erhält man

$$\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}\sqrt{-1} = \frac{\left\{\begin{matrix}-1 + [n - (n-1)(\cos.2\zeta + \sqrt{-1}\sin.2\zeta)] \\ [\cos.2(n-1)\zeta + \sqrt{-1}\sin.2(n-1)\zeta]\end{matrix}\right\}}{-4a^2\sin.\zeta^2(\cos.2\zeta + \sqrt{-1}\sin.2\zeta)}.$$

Da aber

$$\cos.2n\zeta = 1 \quad \text{und} \quad \sin.2n\zeta = 0$$

ist, so wird man erhalten:

$$\cos.2(n-1)\zeta = \cos.2\zeta \text{ und } \sin.2(n-1)\zeta = -\sin.2\zeta,$$

und daher

$$\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}\sqrt{-1} = \frac{-n + n(\cos.2\zeta - \sqrt{-1}\sin.2\zeta)}{-4a^2\sin.\zeta^2(\cos.2\zeta + \sqrt{-1}\sin.2\zeta)},$$

welcher Ausdruck sich auf folgende Form reducirt:

$$\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}\sqrt{-1} =$$

$$= \frac{n}{4a^2\sin.\zeta^2}(\cos.2\zeta - \sqrt{-1}\sin.2\zeta - \cos.4\zeta + \sqrt{-1}\sin.4\zeta),$$

und hieraus schließen wir, daß

$$\mathfrak{P} = \frac{n}{4a^2\sin.^2\zeta}(\cos.2\zeta - \cos.4\zeta) = \frac{n}{2a^2\sin.\zeta}\sin.3\zeta,$$

$$\mathfrak{Q} = \frac{-n}{4a^2\sin.^2\zeta}(\sin.2\zeta - \sin.4\zeta) = \frac{n}{2a^2\sin.\zeta}\cos.3\zeta,$$

und so wird

$$\mathfrak{P}^2 + \mathfrak{Q}^2 = \frac{n^2}{4a^4 \sin.\zeta^2};$$

setzt man

$$\varphi = 2ax \sin.\zeta \cos.\zeta = ax \sin.2\zeta,$$

so wird man finden:

$$\mathfrak{P} \cos.\varphi - \mathfrak{Q} \sin.\varphi = \frac{n}{2a^2 \sin.\zeta} \sin.(3\zeta - \varphi) \text{ und}$$

$$\mathfrak{P} \sin.\varphi + \mathfrak{Q} \cos.\varphi = \frac{n}{2a^2 \sin.\zeta} \cos.(3\zeta - \varphi).$$

Der hieraus sich ergebende Theil des Integrals wird demnach seyn:

$$\frac{4a^2 \sin.\zeta}{n} e^{2ax \sin.^2\zeta} [\sin.(3\zeta - \varphi) \int e^{-2ax \sin.^2\zeta} X dx \cos.\varphi + \cos.(3\zeta - \varphi) \int e^{-2ax \sin.^2\zeta} X dx \sin.\varphi],$$

wo man für ζ nach und nach die Winkel

$$\frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \frac{3\pi}{n}, \frac{4\pi}{n} \ldots$$

schreiben muß, so lange diese kleiner sind als ein rechter; wenn aber n eine gerade Zahl ist, so muß man zu diesen Theilen noch überdieß den Ausdruck

$$-\frac{2a^2}{n} e^{2ax} \int e^{-2ax} X dx$$

addiren, und so wird man den wahren Werth von y erhalten.

Zusatz 1.

§. 1207. Wenn $X = 0$ ist, so entsteht aus jedem Winkel $\zeta = \frac{k\pi}{n}$ ein Theil des Integrals, der folgende Form annimmt:

$$e^{2ax \sin.^2\zeta} [A \sin.(3\zeta - ax \sin.2\zeta) + B \cos.(3\zeta - ax \sin.2\zeta)]$$

oder auch

$$A e^{2ax \sin.^2\zeta} \sin.(\alpha + ax \sin.2\zeta),$$

wobey α einen beliebigen unveränderlichen Winkel bezeichnet.

Zusatz 2.

§. 1208. Ist aber irgend ein particuläres Integrale $y = V$ gefunden, welches der vorgelegten Gleichung Genüge leistet, und wir setzen dann $y = V + v$, so wird man folgende Gleichung erhalten:

$$0 = \frac{nv}{a} - \frac{n(n-1)\,dv}{1.2.a^2\,dx} + \frac{n(n-1)(n-2)\,d^2v}{1.2.3.a^3\,dx^2} - \ldots,$$

und hieraus ergibt ſich das vollſtändige Integrale

$$y = V + Ae^{2ax\sin.^2\zeta}\sin.(\alpha + ax\sin.2z),$$

nachdem man dieſen letzten Theil ſo vervielfältiget hat, daß v alle Werthe von z erhielt.

Zuſatz 3.

§. 1209. Wenn wir $n=\infty$ und $a=n$ ſetzen, damit wir die ohne Ende fortlaufende Differenzialgleichung

$$X = y - \frac{dy}{1.2.dx} + \frac{d^2y}{1.2.3.dx^2} - \frac{d^3y}{1.2.3.4.dx^3} + \frac{d^4y}{1.2.3.4.5.dx^4} - \ldots$$

erhalten, ſo wird y das ſummatoriſche Glied einer Progreſſion ſeyn, deren allgemeines dem Index x entſprechende Glied $T = \frac{dX}{dx}$ iſt. So lange demnach der Winkel $z = \frac{k\pi}{n}$ unendlich klein iſt, wird, weil $\varphi = 2k\pi x$ iſt, jeder Theil des Integrales

$$4k\pi e^{\frac{2k^2\pi^2}{n}x}\left[\sin.\left(\frac{3k\pi}{n} - 2k\pi x\right)\int e^{\frac{-2k^2\pi^2}{n}x} X\,dx\cos.(2k\pi x)\right.$$

$$\left. + \cos.\left(\frac{3k\pi}{n} - 2k\pi x\right)\int e^{\frac{-2k^2\pi^2}{n}x} X\,dx\sin.(2k\pi x)\right],$$

und wenn man die verſchwindenden Theile außer Acht läßt:

$$4k\pi\,[\cos.(2k\pi x)\int X\,dx\sin.(2k\pi x) -$$
$$- \sin.(2k\pi x)\int X\,dx\cos.(2k\pi x)];$$

wenn man nun hier für k ſucceſſive alle ganzen Zahlen 1, 2, 3, ... ſubſtituirt, ſo wird die Summe aller auf dieſe Weiſe zum Vorſchein kommenden Formeln den wahren und vollſtändigen Werth von y geben.

Anmerkung.

§. 1210. Man kann aber für die vorgelegte Gleichung nach der früher angegebenen Methode ein particuläres Integrale, durch eine Reihe der Differenzialien ausgedrückt, auffinden, indem man

$$y = AX + \frac{BdX}{dx} + \frac{Cd^2X}{dx^2} + \frac{Dd^3X}{dx^3} + \frac{Ed^4X}{dx^4} + \ldots$$

$$A = \frac{a}{n};\quad B = \frac{n-1}{2n};\quad C = \frac{n^2-1}{12an};\quad D = \frac{n^2-1}{24a^2n};\quad E = \frac{-(n^2-1)(n^2-19)}{720a^3n};\ \ldots.$$

Es ist nicht leicht, das Gesetz für das Fortschreiten der Glieder dieser Reihe allgemein anzugeben; allein für den Fall, wo $n = \infty$ und $a = n$ ist, und der besonders in der Lehre von den Progressionen merkwürdig ist, ergeben sich für die Coefficienten folgende Werthe:

$$A = 1,\quad B = \tfrac{1}{2},\quad C = \tfrac{1}{12},\quad D = 0,\quad E = \tfrac{1}{720}\ldots,$$

und hieraus entsteht eben jener Ausdruck, welchen ich einst im Allgemeinen für das summatorische Glied angegeben habe. Wenn man aber dieses summatorische Glied, welches gleich V wird, zuläßt, so muß man wohl merken, daß die Gleichung $y = V$ bloß ein particuläres Integrale der vorgelegten Gleichung sey; daß aber das vollständige sich leicht darstellen lasse, wenn man nur zur Größe V alle Ausdrücke von der Form $A \sin.(\alpha + 2k\pi x)$, welche entstehen, wenn man für k nach und nach alle ganzen Zahlen 1, 2, 3, 4, ... setzt, addirt, und wo für jedes einzelne Resultat der Winkel α nach Willkür angenommen werden kann. Daß aber jeder dieser Werthe der Gleichung

$$0 = v - \frac{dv}{2dx} + \frac{d^2v}{6dx^2} - \frac{d^3v}{24dx^3} + \frac{d^4v}{120dx^4} - \frac{d^5v}{720dx^5} + \ldots$$

Genüge leiste, läßt sich sehr leicht auf folgende Weise zeigen: Wird Kürze halber $2k\pi = m$ gesetzt, so daß $v = \sin.(\alpha + mx)$ wird, so muß nach gehöriger Substitution

$$\left.\begin{aligned} 0 = \sin.(\alpha+mx)\left(1 - \frac{m^2}{6} + \frac{m^4}{120} - \ldots\right) \\ \cos.(\alpha+mx)\left(-\frac{m}{2} + \frac{m^3}{24} - \frac{m^5}{720} + \ldots\right) \end{aligned}\right\} = \begin{aligned} &\sin.(\alpha+mx)\,\tfrac{1}{m}\sin. m \\ &\cos.(\alpha+mx)\,\tfrac{1}{m}(\cos. m - 1) \end{aligned}$$

werden. Da aber $m = 2k\pi$ ist, so ist offenbar sowohl $\sin. m = 0$, als auch $\cos. m - 1 = 0$.

Aufgabe 162.

§. 1211. Die Differenzialgleichung

$$X = y + \frac{n(n-1)}{1.2} \cdot \frac{d^2y}{a^2 dx^2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} \cdot \frac{d^4y}{a^4 dx^4} + \ldots$$

sey gegeben; man suche das vollständige Integrale derselben.

Auflösung.

Die aus dieser Gleichung abzuleitende algebraische Größe ist:

$$P = 1 + \frac{n(n-1)}{1.2} \cdot \frac{z^2}{a^2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} \cdot \frac{z^4}{a^4} + \ldots,$$

welche sich offenbar auf folgende Form bringen läßt:

$$P = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{z}{a}\right)^n + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{z}{a}\right)^n = \frac{(a+z)^n + (a-z)^n}{2a^n},$$

und jeder Trinomialfactor dieses Ausdrucks ist:

$$(a+z)^2 - 2(a^2 - z^2)\cos. 2\zeta + (a-z)^2,$$

indem man

$$2\zeta = \frac{(2k+1)\pi}{n} \quad \text{oder} \quad \zeta = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$$

setzt. Diese Formel aber geht über in

$$2a^2(1 - \cos. 2\zeta) + 2z^2(1 + \cos. 2\zeta) = 4a^2 \sin.^2\zeta + 4z^2 \cos.^2\zeta,$$

welcher allgemeine Factor sich durch den Ausdruck

$$a^2 \tang.^2\zeta + z^2$$

darstellen läßt, und wird derselbe mit der allgemeinen Formel

$$f^2 + 2fz \cos.\theta + z^2$$

verglichen, so erhält man

$$f = -a \tang.\zeta \quad \text{und} \quad \theta = 90^\circ,$$

und daher wird

$$\varphi = -ax \tang.\zeta \ (1177),$$

und der für z zu setzende Werth ist:

$$-f(\cos.\theta + \sqrt{-1}\sin.\theta) = a \tang.\zeta\sqrt{-1}.$$

Da

$$\frac{dP}{dz} = \frac{n(a+z)^{n-1} - n(a-z)^{n-1}}{2a^n}$$

ist, so nehme man an, dieser Ausdruck verwandle sich in

$$\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}\sqrt{-1},$$

ſo findet man:

$$\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}\sqrt{-1} = \frac{n}{2a}\left[(1 + \text{tang.}\,\zeta\sqrt{-1})^{n-1} - (1 - \text{tang.}\,\zeta\sqrt{-1})^{n-1}\right]$$

$$= \frac{n}{2a\,\text{cos.}\,\zeta^{n-1}}\left[\text{cos.}\,(n-1)\zeta + \sqrt{-1}\,\text{sin.}\,(n-1)\zeta - \text{cos.}\,(n-1)\zeta + \text{sin.}\,(n-1)\zeta\sqrt{-1}\right],$$

alſo iſt

$$\mathfrak{P} = 0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{Q} = \frac{n\,\text{sin.}\,(n-1)\zeta}{a\,\text{cos.}\,\zeta^{n-1}}.$$

Weil aber

$$n\zeta = \frac{2k+1}{2}\pi$$

iſt, alſo

$$\text{cos.}\,n\zeta = 0 \quad \text{und} \quad \text{sin.}\,n\zeta = \pm 1,$$

je nachdem k eine gerade oder ungerade Zahl bezeichnet, ſo wird man erhalten:

$$\text{sin.}\,(n-1)\zeta = \pm\,\text{cos.}\,\zeta, \quad \text{folglich} \quad \mathfrak{Q} = \frac{\pm n}{a\,\text{cos.}\,\zeta^{n-1}}.$$

Es iſt daher wegen $\text{cos.}\,\theta = 0$, der aus dieſem Factor entſtehende Theil des Integrals:

$$\pm\frac{2a\,\text{cos.}\,\zeta^{n-1}}{n}\left(\text{cos.}\,\varphi\int X\,dx\,\text{sin.}\,\varphi - \text{sin.}\,\varphi\int X\,dx\,\text{cos.}\,\varphi\right),$$

oder weil $\varphi = -ax\,\text{tang.}\,\zeta$ iſt:

$$\pm\frac{2a\,\text{cos.}\,\zeta^{n-1}}{n}\left(\text{sin.}\,(ax\,\text{tang.}\,\zeta)\int X\,dx\,\text{cos.}\,(ax\,\text{tang.}\,\zeta) - \text{cos.}\,(ax\,\text{tang.}\,\zeta)\int X\,dx\,\text{sin.}\,(ax\,\text{tang.}\,\zeta)\right),$$

wo für ζ nach und nach die Winkel

$$\frac{\pi}{2n};\quad \frac{3\pi}{2n};\quad \frac{5\pi}{2n};\quad \frac{7\pi}{2n}$$

zu ſetzen ſind, ſo lange dieſe kleiner als ein rechter ſind, und für welche man abwechſelnd die Zeichen + und − ſchreiben muß. Werden alle dieſe Theile in eine Summe gebracht, ſo geben ſie den vollſtändigen Werth von y, wenn man für den letzten Theil, welcher aus dem Winkel $\zeta = \frac{\pi}{2}$ entſteht, welches für einen ungeraden Werth von n der Fall iſt, bloß deſſen Hälfte nimmt.

Zuſatz 1.

§. 1212. Dieſe Bemerkungen wollen wir ſogleich anwenden auf den Fall, wo $n = \infty$ und $a = nc$ iſt, ſo daß die vorgelegte Diffe-

renzialgleichung folgende iſt:

$$X = y + \frac{d^2y}{1.2.c^2dx^2} + \frac{d^4y}{1.2.3.4.c^4dx^4} + \frac{d^6y}{1.2.3.4.5.6.c^6dx^6} + \ldots \text{ ohne Ende.}$$

Da nun hier die Werthe von z unendlich klein ſind, ſo wird

$$\cos. z = 1 \quad \text{und} \quad \text{tang. } z = z = \frac{(4k \pm 1)\pi}{2n},$$

folglich

$$ax \text{ tang. } z = (4k \pm 1)\, cx\frac{\pi}{2},$$

für welchen Winkel wir ω ſchreiben wollen. Jeder Theil des Integrals iſt alſo enthalten in der Formel

$$\pm 2c\,(\sin.\omega \int X dx \cos.\omega - \cos.\omega \int X dx \sin.\omega),$$

wo die beyden Zeichen ſich abwechſelnd entſprechen.

Zuſatz 2.

§. 1213. Wird bloß der Winkel $\frac{\pi}{2}cx = \varphi$ geſetzt, ſo wird das ganze Integrale auf folgende Art ausgedrückt erſcheinen:

$$\begin{aligned}\frac{y}{2c} = {} & + \sin.\varphi \int X dx \cos.\varphi - \cos.\varphi \int X dx \sin.\varphi \\ & - \sin.3\varphi \int X dx \cos.3\varphi + \cos.3\varphi \int X dx \sin.3\varphi \\ & + \sin.5\varphi \int X dx \cos.5\varphi - \cos.5\varphi \int X dx \sin.5\varphi \\ & - \sin.7\varphi \int X dx \cos.7\varphi + \cos.7\varphi \int X dx \sin.7\varphi \\ & \text{u. ſ. w.},\end{aligned}$$

welche Ausdrücke ohne Ende fortzuſetzen ſind.

Zuſatz 3.

§. 1214. Wenn wir $c = b\sqrt{-1}$ ſetzen, ſo daß folgende unendliche Reihe erhalten wird:

$$X = y - \frac{d^2y}{1.2.b^2dx^2} + \frac{d^4y}{1\ldots4b^4dx^4} - \frac{d^6y}{1\ldots6b^6dx^6} + \ldots,$$

und wir bezeichnen jetzt den Winkel $\frac{\pi}{2}bx$ durch ψ, ſo wird das vollſtändige Integrale ſeyn:

$$\begin{aligned}\frac{y}{b} = {} & + e^{-\psi} \int e^{\psi} X dx - e^{\psi} \int e^{-\psi} X dx \\ & - e^{-3\psi} \int e^{3\psi} X dx + e^{3\psi} \int e^{-3\psi} X dx \\ & + e^{-5\psi} \int e^{5\psi} X dx - e^{5\psi} \int e^{-5\psi} X dx \\ & \text{u. ſ. w.}\end{aligned}$$

Anmerkung.

§. 1215. Wenn wir für die Gleichung (Zuſatz 1) nach der oben erklärten Methode ein particuläres Integrale ſuchen, ausgedrückt durch die Differenzialien von X, und wir ſetzen zu dieſem Zwecke:

$$y = AX - \frac{B\,d^2X}{c^2\,dx^2} + \frac{C\,d^4X}{c^4\,dx^4} - \frac{D\,d^6X}{c^6\,dx^6} + \frac{E\,d^8X}{c^8\,dx^8} - \ldots,$$

ſo werden wir für die Coefficienten folgende Werthe finden:

$$A = 1;\quad B = \frac{1}{1\cdot 2};\quad C = \frac{5}{1\ldots 4};\quad D = \frac{61}{1\ldots 6};\quad E = \frac{1385}{1\ldots 8};$$

$$F = \frac{50521}{1\ldots 10};$$

und wenn dieſer Werth $= V$ geſetzt wird, ſo wird, wenn man den Winkel $\frac{\pi}{2}cx = \varphi$ ſetzt, das vollſtändige Integrale ſeyn:

$$y = V + A\sin.(\alpha + \varphi) + B\sin.(\beta + 3\varphi) + C\sin.(\gamma + 5\varphi) + D\sin.(\delta + 7\varphi)\ldots$$

Aufgabe 163.

§. 1216. Sey gegeben die Differenzialgleichung

$$X = y + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2a^2}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4a^4}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{n\ldots(n-5)}{1\ldots 6a^6}\cdot\frac{d^3y}{dx^3} + \ldots;$$

man ſuche das vollſtändige Integrale derſelben.

Auflöſung.

Da die hieraus abzuleitende algebraiſche Größe

$$P = 1 + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2\cdot a^2}z + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot a^4}z^2 + \ldots + \ldots = \tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{z}}{a}\right)^n + \tfrac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{z}}{a}\right)^n$$

aus der vorhergehenden entſteht, wenn man daſelbſt z ſtatt z^2 ſchreibt, ſo wird, wenn man den Winkel $\zeta = \frac{2k+1}{2n}\pi$ ſetzt, jeder Factor $a^2\,\text{tang.}^2\zeta + z$ ſeyn, ſo daß alle einfachen Factoren dieſes Ausdruckes reell ſind. Vergleicht man alſo dieſen Factor mit der Formel $\alpha + z$, ſo wird $\alpha = a^2\,\text{tang.}^2\zeta$, und, wenn $A = \frac{P}{\alpha + z}$ für

$z = -\alpha$ genommen wird, so entsteht aus diesem Factor der Integraltheil $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}} e^{-\alpha x} \int e^{\alpha x} X dx$. Weil aber P für $z = -\alpha$ verschwindet, so wird auch $\mathfrak{A} = \frac{dP}{dz}$ seyn; durch Differenziation aber erhält man:

$$\frac{dP}{dz} = \frac{n}{4a\sqrt{z}} \left[\left(1 + \frac{\sqrt{z}}{a}\right)^{n-1} - \left(1 - \frac{\sqrt{z}}{a}\right)^{n-1} \right].$$

Weil man also $\frac{\sqrt{z}}{a} = \text{tang. } \zeta \sqrt{-1}$ setzen muß, so wird

$$1 + \frac{\sqrt{z}}{a} = \frac{\cos. \zeta + \sqrt{-1} \sin. \zeta}{\cos. \zeta} \text{ und } 1 - \frac{\sqrt{z}}{a} = \frac{\cos. \zeta - \sqrt{-1} \sin. \zeta}{\cos. \zeta}$$

und daher

$$\mathfrak{A} = \frac{n}{4a^2 \text{ tang. } \zeta \sqrt{-1}} \cdot \frac{2\sqrt{-1} \sin. (n-1)\zeta}{\cos.^{n-1} \zeta} = \frac{n \sin. (n-1)\zeta}{2a^2 \sin. \zeta \cos.^{n-2} \zeta}.$$

Nun ist zu bemerken, daß

$$\sin. n\zeta = \sin. (2k+1)\frac{\pi}{2} = \pm 1$$

sey (wo das obere Zeichen gilt, wenn k eine gerade Zahl, das untere aber, wenn k eine ungerade Zahl ist), dann aber $\cos. n\zeta = 0$, und daher wird

$$\sin. (n-1)\zeta = \pm \cos. \zeta,$$

und hieraus ergibt sich

$$\mathfrak{A} = \frac{\pm n}{2a^2 \sin. \zeta \cos.^{n-3} \zeta},$$

und demnach wird der gesuchte Theil des Integrales seyn:

$$\pm \frac{2a^2 \sin. \zeta \cos.^{n-3} \zeta}{n} e^{-a^2 \text{ tang.}^2 \zeta . x} \int e^{a^2 \text{ tang.}^2 \zeta . x} X dx.$$

Man gebe also der Größe ζ nach und nach die Werthe

$$\frac{\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n}, \frac{5\pi}{2n}, \frac{7\pi}{2n} \ldots,$$

so lange sie einen rechten Winkel nicht überschreiten, und die Summe aller dieser Theile wird dann das vollständige Integrale oder den Werth von y geben.

Zusatz 1.

§. 1217. Setzen wir $n = \infty$ und $a = nc$, so geht die vorgelegte Gleichung ins Unendliche fort, und es wird seyn:

$$X = y + \frac{dy}{1.2.c^2\,dx} + \frac{d^2y}{1.2.3.4.c^4\,dx^2} + \frac{d^3y}{1.2.3.4.5.6.c^6\,dx^3} + \ldots$$

und die hieraus entſtehende algebraiſche Formel iſt:

$$P = 1 + \frac{z}{1.2.c^2} + \frac{z^2}{1.2.3.4.c^4} + \ldots = \tfrac{1}{2}e^{\frac{\sqrt{z}}{c}} + \tfrac{1}{2}e^{-\frac{\sqrt{z}}{c}},$$

bey welcher alle einfachen Factoren reell ſind, und da ζ unendlich klein iſt, ſo wird $\text{tang.}\,\zeta = \zeta = \frac{2k+1}{2n}\pi$ ſeyn, und daher iſt die allgemeine Form der Factoren:

$$z + \frac{(2k+1)^2}{4}\pi^2c^2 \quad \text{oder} \quad 1 + \frac{4z}{(2k+1)^2\pi^2c^2}.$$

Zuſatz 2.

§. 1218. Der Kürze wegen ſetze man den Winkel

$$\frac{2k+1}{2}\pi = \theta,$$

ſo wird man erhalten:

$$a^2\,\text{tang.}^2\,\zeta = \theta^2c^2,$$

dann aber iſt

$$\cos.\,\zeta = 1 \quad \text{und} \quad \frac{a^2\,\text{sin.}\,\zeta}{n} = \theta c^2,$$

und demnach wird jeder Theil des Integrales ſeyn:

$$\pm\, 2\theta c^2 e^{-\theta^2c^2x} \int e^{\theta^2c^2x}\,X\,dx,$$

wo man für θ nach und nach alle Werthe

$$\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2};\ \frac{5\pi}{2};\ \frac{7\pi}{2};\ \frac{9\pi}{2};\ \text{ꝛc.}$$

ſetzen muß.

Zuſatz 3.

§. 1219. Es iſt hier gleichgültig, ob man c^2 negativ oder poſitiv nimmt, und daher wird der unendlichen Differenzialgleichung

$$X = y + \frac{dy}{1.2.b\,dx} + \frac{d^2y}{1.2.3.4.b^2\,dx^2} + \frac{d^3y}{1\ldots6.b^3\,dx^3} + \ldots$$

folgendes Integrale entſprechen:

$$y = 2\theta b e^{-\theta^2bx} \int e^{\theta^2bx}\,X\,dx,$$

wenn man, da die Zweydeutigkeit des Zeichens jetzt nicht mehr Statt

findet, für θ die folgenden Werthe setzt:

$$+\frac{\pi}{2};\ -\frac{3\pi}{2};\ +\frac{5\pi}{2};\ -\frac{7\pi}{2};\ \ldots$$

Wenn demnach $X=0$ ist, so ist jedes particuläre Integrale

$$y = A e^{-\theta^2 b x}.$$

Aufgabe 164.

§. 1220. Die Differenzialgleichung

$$X=\frac{n\,dy}{a\,dx}+\frac{n(n-1)(n-2)\,d^2y}{1.2.3.a^3\,dx^2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\,d^3y}{1.2.3.4.5.a^5\,dx^3}+\ldots$$

sey gegeben; man suche das vollständige Integrale derselben.

Auflösung.

Obgleich diese Gleichung, wenn man sie mit dx multiplicirt, sogleich ein Mahl integrirt werden kann, so ist es denn doch besser, diese Form beyzubehalten; und daher wird

$$P=\frac{nz}{a}+\frac{n(n-1)(n-2)z^2}{1.2.3.a^3}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)z^5}{1.2.3.4.5.a^5}+\ldots$$

welcher Ausdruck offenbar auf folgende Form gebracht werden kann:

$$P=\frac{\sqrt{z}}{2}\left[\left(1+\frac{\sqrt{z}}{a}\right)^n-\left(1-\frac{\sqrt{z}}{a}\right)^n\right].$$

Hier biethet sich zwar sogleich ein Factor, nämlich z dar, die übrigen aber sind enthalten unter der Form

$$\left(1+\frac{\sqrt{z}}{a}\right)^2-2\left(1-\frac{z}{a^2}\right)\cos.2\zeta+\left(1-\frac{\sqrt{z}}{a}\right)^2,$$

wenn der Winkel

$$2\zeta=\frac{2k\pi}{n}\quad\text{oder}\quad\zeta=\frac{k\pi}{n}$$

genommen wird. Dieser Ausdruck aber geht über in

$$2(1-\cos.2\zeta)+\frac{2z}{a^2}(1+\cos.2\zeta);$$

hieraus geht hervor, daß $a^2\,\text{tang.}^2\zeta+z$, der allgemeine Factor seyn werde, welcher auch jenen ersten Factor z enthält, wenn $k=0$ genommen wird. Wird daher $a^2\,\text{tang.}^2\zeta=\alpha$ gesetzt, so ist der diesem Factor entsprechende Theil des Integrals:

$$\frac{1}{2i}e^{-\alpha x}\int e^{\alpha x}X\,dx,$$

wenn, nachdem man

$$z = -a^2 \text{ tang.}^2 \zeta \quad \text{oder} \quad \sqrt{z} = a \text{ tang. } \zeta \sqrt{-1}$$

gesetzt hat:

$$\mathfrak{A} = \frac{dP}{dz} = \frac{1}{4\sqrt{z}}\left[\left(1+\frac{\sqrt{z}}{a}\right)^n - \left(1-\frac{\sqrt{z}}{a}\right)^n\right] + \frac{n}{4a}\left[\left(1+\frac{\sqrt{z}}{a}\right)^{n-1} + \left(1-\frac{\sqrt{z}}{a}\right)^{n-1}\right]$$

genommen wird. Es ist aber

$$\left(1+\frac{\sqrt{z}}{a}\right)^n = \frac{\cos. n\zeta + \sqrt{-1}\sin. n\zeta}{\cos.^n\zeta} \quad \text{und}$$

$$\left(1-\frac{\sqrt{z}}{a}\right)^n = \frac{\cos. n\zeta - \sqrt{-1}\sin. n\zeta}{\cos.^n\zeta},$$

daher wird man erhalten:

$$\mathfrak{A} = \frac{\sin. n\zeta}{2a \text{ tang. } \zeta \cos.^n\zeta} + \frac{n\cos.(n-1)\zeta}{2a\cos.^{n-1}\zeta} = \frac{\pm n}{2a\cos.^{n-1}\zeta},$$

weil $\sin. n\zeta = 0$ und $\cos. n\zeta = \pm 1$ ist, je nachdem die Zahl k entweder gerade oder ungerade ist. Jeder Theil des Integrals wird daher sich unter folgender Form darstellen:

$$\pm\frac{2a\cos.^{n-1}\zeta}{n} e^{-\alpha x}\int e^{\alpha x} X dx,$$

wobey $\alpha = a^2 \text{ tang.}^2\zeta$ ist. Nun gebe man dem Winkel ζ nach und nach die Werthe

$$\frac{0\pi}{n};\ \frac{1\pi}{n};\ \frac{2\pi}{n};\ \frac{3\pi}{n};\ \ldots$$

so lange diese den rechten Winkel $\frac{\pi}{2}$ nicht überschreiten, und dann bringe man alle diese Ausdrücke mit ihren Zeichen in eine Summe, so erhält man den vollständigen Werth für y.

Zusatz 1.

§. 1221. Der erste Theil des Integrals entsteht also aus dem Winkel $\zeta = 0$, und er wird daher $+\frac{2a}{n}\int X dx$, für welchen man aber, aus den oben angeführten Gründen, rücksichtlich der einfachen Factoren, bloß die Hälfte desselben nehmen muß, so daß also dieser erste Theil $= \frac{a}{n}\int X dx$ wird, was auch schon daraus einleuchtet, daß für $z = 0$ offenbar $\frac{P}{z} = \frac{n}{a}$ wird.

Zuſatz 2.

§. 1222. Dieſelbe Bemerkung würde auch von dem letzten Theile gelten, wenn dieſer aus dem Werthe $z = \frac{\pi}{2}$ entſteht, welches für einen geraden Werth von n der Fall ſeyn wird; allein, weil in dieſem Falle $\cos. z = 0$ wird, ſo fällt dieſer ganze Theil des Integrals für ſich weg.

Zuſatz 3.

§. 1223. Wenn $X = 0$ wäre, ſo hätte jeder Theil des Integrals die Form $Ae^{-a^2 \text{tang.}^2 \zeta . x}$, wobey A eine willkürliche conſtante Größe bezeichnet, und es wäre die Gleichung

$$y = Ae^{-a^2 \text{tang.}^2 \zeta . x}$$

ſogar ein particuläres Integrale der vorgelegten Gleichung, wenn man nur den Winkel $z = \frac{k\pi}{n}$ ſetzt.

Anmerkung.

§. 1224. Wird demnach $n = \infty$ und $a = n\sqrt{b}$ geſetzt, ſo läßt ſich folgende, ins Unendliche fortſchreitende Differenzialgleichung integriren:

$$\frac{X}{\sqrt{b}} = \frac{dy}{1.b\,dx} + \frac{d^2y}{1.2.3.b^2\,dx^2} + \frac{d^3y}{1..5.b^3\,dx^3} + \frac{d^4y}{1...7.b^4\,dx^4} + \ldots$$

oder auch folgende, die aus jener durch eine einzige Integration erhalten wird:

$$\sqrt{b}\int X\,dx = \frac{y}{1} + \frac{dy}{1.2.3.b\,dx} + \frac{d^2y}{1...5.b^2\,dx^2} + \frac{d^3y}{1...7.b^3\,dx^3} + \ldots$$

Denn da der Winkel $z = \frac{k\pi}{n}$ unendlich klein iſt, ſo wird

$$\cos. z = 1 \quad \text{und} \quad a \text{ tang. } z = az = k\pi\sqrt{b}, \text{ daher}$$
$$\alpha = a^2 \text{ tang.}^2 z = k^2\pi^2 b,$$

und man wird jeden Theil des Integrals unter folgender Form erhalten:

$$\pm 2\sqrt{b}e^{-k^2\pi^2 bx}\int e^{k^2\pi^2 bx} X\,dx;$$

wird daher der erſte aus dem Werthe $k = 0$ entſprungene Theil aus den oben angeführten Gründen auf die Hälfte reducirt, ſo wird das vollſtändige Integrale ſeyn:

$$\frac{y}{\sqrt{b}} = \int X\,dx - 2e^{-\pi^2 bx}\int e^{\pi^2 bx} X\,dx + 2e^{-4\pi^2 bx}\int e^{4\pi^2 bx} X\,dx$$
$$- 2e^{-9\pi^2 bx}\int e^{9\pi^2 bx} X\,dx + 2e^{-16\pi^2 bx}\int e^{16\pi^2 bx} X\,dx + \ldots$$

Beyſpiel.

§. 1225. Sey $n = 6$ und $a = 1$, ſo hat man die Gleichung

$$X = \frac{6\,dy}{dx} + \frac{20\,d^2y}{dx^2} + \frac{6\,d^3y}{dx^3} \text{ oder}$$

$$\int X\,dx = 6y + \frac{20\,dy}{dx} + \frac{6\,d^2y}{dx^2}$$

integriren.

Die Werthe des Winkels z, die hiervon abhängen, ſind alſo

$$z = 0,\quad 30^\circ,\quad 60^\circ$$
$$\cos.z = 1,\quad \frac{\sqrt{3}}{2},\quad \frac{1}{2}$$
$$\alpha = 0,\quad \frac{1}{3},\quad 3,$$

ıd hieraus ergibt ſich das geſuchte Integrale

$$= \tfrac{1}{3}\int X\,dx - \tfrac{3}{16}e^{-\frac{1}{3}x}\int e^{\frac{1}{3}x}X\,dx + \tfrac{1}{48}e^{-3x}\int e^{3x}X\,dx,$$

ıches auch der vorgelegten Gleichung Genüge leiſtet, wovon man h durch einen einfachen Verſuch überzeugen kann.

Kapitel V.

Von der Integration der Differenzialgleichungen von der Form:

$$X = Ay + \frac{Bx\,dy}{dx} + \frac{Cx^2 d^2y}{dx^2} + \frac{Dx^3 d^3y}{dx^3} + \frac{Ex^4 d^4y}{dx^4} + \ldots.$$

Aufgabe 165.

§. 1226. Wenn eine Differenzialgleichung von der Form

$$X = Ay + \frac{Bx\,dy}{dx} + \frac{Cx^2 d^2y}{dx^2} + \frac{Dx^3 d^3y}{dx^3} + \ldots + \frac{Nx^n d^ny}{dx^n}$$

gegeben ist, eine solche Function von x zu finden, mit welcher die vorgelegte Gleichung multiplicirt, integrabel wird.

Auflösung.

Bey einiger Aufmerksamkeit wird man sogleich einsehen, daß eine einfache Potenz von x zum Ziele führe. Sey also folgende Gleichung integrabel:

$$Xx^\lambda dx = Ax^\lambda y\,dx + Bx^{\lambda+1} dy + Cx^{\lambda+2}\frac{d^2y}{dx} + \ldots + \frac{Nx^{\lambda+n} d^ny}{dx^{n-1}},$$

und ihr Integrale sey

$$\int Xx^\lambda dx = A'x^{\lambda+1}y + \frac{B'x^{\lambda+2}dy}{dx} + \frac{C'x^{\lambda+3}d^2y}{dx^2} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + \frac{N'x^{\lambda+n}d^{n-1}y}{dx^{n-1}}.$$

Da also das Differenziale dieser Gleichung der vorhergehenden Differenzialgleichung gleich seyn muß, so werden wir folgende Bestimmungen erhalten:

$A = (\lambda+1)A'$; also $(\lambda+1)A' = A$
$B = (\lambda+2)B' + A'$; also $(\lambda+1)(\lambda+2)B' = (\lambda+1)B - A$
$C = (\lambda+3)C' + B'$; „ $(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)C' =$
$= (\lambda+1)(\lambda+2)C - (\lambda+1)B + A$
$D = (\lambda+4)D' + C'$; also $(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)(\lambda+4)D' =$
$= (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)D - (\lambda+1)(\lambda+2)C$
$+ (\lambda+1)B - A$
. . . . . .
$N = N'$

nn alle folgenden Glieder des Integrales, welche Differenzialaus-
ücke vom Grade $d^n y$ oder von einer höhern Ordnung enthalten wür-
n, müſſen verſchwinden, weil ſonſt die Integration nicht hätte gelin-
n können. Da nun im Integrale der Buchſtabe N′ wegfällt, ſo
mmen wir auf folgende Gleichung:

$$0 = A - (\lambda+1)\,B + (\lambda+1)(\lambda+2)\,C - \\ - (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)\,D + \ldots \\ \ldots \pm (\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+n)\,N,$$

us welcher Gleichung der Exponent λ der geſuchten Potenz x^λ beſtimmt
erden muß. Man bilde demnach einen algebraiſchen Ausdruck von
r Form

$$= A + B(z-1) + C(z-1)(z-2) + D(z-1)(z-2)(z-3) + \ldots \\ \ldots + N(z-1)(z-2)(z-3)\ldots(z-n),$$

nd ſuche alle einfachen Factoren desſelben, ſo daß man erhält:

$$P = N(\alpha+z)(\beta+z)(\gamma+z)(\delta+z)\ldots$$

obey die Anzahl dieſer Factoren $= n$ iſt. Setzt man nun jeden Fac-
r $z+\alpha$ gleich Null, ſo wird der Werth $z = -\alpha$ eine ſolche Potenz
^{z} geben, daß die vorgelegte Gleichung, mit demſelben multiplicirt,
tegrabel wird, ſo daß ihr Integrale ſeyn wird:

$$-\alpha-1 \int x^\alpha X\,dx = A'y + \frac{B'x\,dy}{dx} + \frac{C'x^2 d^2y}{dx^2} + \frac{D'x^3 d^3y}{dx^3} + \ldots \\ \ldots + \frac{N x^{n-1} d^{n-1} y}{dx^{n-1}},$$

o der Ordnungsexponent der Differenzialien um eine Einheit niedriger
. Dieſe integrirte Gleichung aber wird durch die vorgelegte ſo be-
mmt, daß

$$A = (\alpha+1)\,A'$$
$$B = (\alpha+2)\,B' + A'$$
$$C = (\alpha+3)\,C' + B'$$
$$D = (\alpha+4)\,D' + C'$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

ird, bis man endlich auf den letzten Coefficienten N kömmt, der in
yden Gleichungen denſelben Werth hat.

Zuſatz 1.

§. 1227. Weil nun die integrirte Gleichung der vorgelegten
lbſt ähnlich iſt, ſo wird dieſelbe mit einer beſtimmten Potenz von x

multiplicirt, von neuem integrabel werden; denn, um diese Potenz aufzufinden, muß man den algebraischen Ausdruck $Q = A' + B'(z-1) + C'(z-1)(z-2) + D'(z-1)(z-2)(z-3) + \ldots + N(z-1)(z-2)\ldots(z-n+1)$ in Betrachtung ziehen. Wenn nun $z + \mu$ irgend ein einfacher Factor desselben ist, so wird $x^{+\mu}$ jene Potenz von x seyn, welche jene Gleichung integrabel macht.

Zusatz 2.

§. 1228. Wenn die vorgelegte Gleichung selbst integrabel werden sollte, wenn man sie mit der Potenz $x^{+\alpha}$ multiplicirt, so muß man hier wohl bemerken, daß die Größe Q, welche aus der integrirten Gleichung gebildet wurde, von dem frühern, aus der vorgelegten Gleichung selbst abgeleiteten Werthe P so abhänge, daß $Q = \frac{P}{\alpha + z}$ ist, wenn, wie wir voraussetzen, $\alpha + z$ ein Factor von P ist.

Anmerkung 1.

§. 1229. Um nun diese schöne Eigenschaft, daß $P = (\alpha + z)\,Q$ sey, zu erweisen, hat man nur nöthig, die Größe Q mit $\alpha + z$ zu multipliciren; damit jedoch unsere Folgerung deutlicher in die Augen falle, muß man für die einzelnen Glieder von Q den Multiplicator in zwey Theile zerlegen, und man schreibe für das erste Glied statt $\alpha + z$ den Werth $(\alpha + 1) + (z - 1)$, für das zweyte $(\alpha + 2) + (z - 2)$, für das dritte $(\alpha + 3) + (z - 3)$, für das vierte $(\alpha + 4) + (z - 4)$ u. s. w., so daß das Product eines jeden Gliedes durch zwey Theile dargestellt werde, welche Operation ich hier ganz anführen will:

$$Q = A' + B'(z-1) + C'(z-1)(z-2) + D'(z-1)(z-2)(z-3) + \ldots$$

Multiplicat.	$\alpha + 1$ $z - 1$	$\alpha + 2$ $z - 2$	$\alpha + 3$ $z - 3$	$\alpha + 4$ $z - 4$
Product:	$(\alpha+1)A' + A'(z-1)$	$+ B'(z-1)(z-2)$	$+ C'(z-1)(z-2)(z-3)$	$+ \ldots$
	$+(\alpha+2)B'(z-1)$	$+(\alpha+3)C'(z-1)(z-2)$	$+(\alpha+4)D'(z-1)(z-2)(z-3)$	$+ \ldots$

Bey der Auflösung aber haben wir gesehen, daß

$+1)A' = A$; $(\alpha+2)B'+A' = B$; $(\alpha+3)C'+B' = C$; ...

y, und daher wird dieses Product sich unter folgender Form dar-

ellen:

$$+B(z-1)+C(z-1)(z-2)+D(z-1)(z-2)(z-3)+\ldots$$

Diesem Ausdrucke ist der Werth von P gleich, und somit ist die

wähnte schöne Eigenschaft, daß $Q = \frac{P}{\alpha+z}$ sey, erwiesen.

Zusatz 3.

§. 1230. Stellt man also den Werth von P in seine einfachen

ctoren aufgelöst dar, setzt man nämlich

$$P = N(\alpha+z)(\beta+z)(\gamma+z)(\delta+z)\ldots$$

ld integrirt dann die vorgelegte Gleichung, nachdem man sie wegen

s Factors $\alpha+z$ mit x^{α} multiplicirt hat, und bildet sich dann aus

e integrirten Gleichung auf ähnliche Weise den Werth von Q, so

rd man erhalten:

$$Q = N(\beta+z)(\gamma+z)(\delta+z)\ldots$$

Zusatz 4.

§. 1231. Hat man also die integrirte Gleichung auf die Form

r vorgelegten gebracht, so daß, wenn man

$$x^{-\alpha-1}\int x^{\alpha} X\,dx = X'$$

st, die Gleichung zum Vorschein kömmt:

$$X' = A'y + \frac{B'x\,dy}{dx} + \frac{C'x^2d^2y}{dx^2} + \frac{D'x^3d^3y}{dx^3} + \ldots$$

wird auch diese wieder integrabel gemacht werden, wenn man sie

rch jede der Potenzen x^{β}, x^{γ}, x^{δ},... multiplicirt, welche Potenzen

e vorgelegte Gleichung selbst integrabel gemacht haben würden.

Anmerkung 2.

§. 1232. Bevor ich nun diese Integration weiter verfolge, wird

zweckmäßig seyn, jenen Fall der vorgelegten allgemeinen Formel,

welcher das erste Glied der Gleichung X verschwindet, abgesondert

entwickeln. Denn in diesem Falle tritt die Bequemlichkeit ein, daß

an, ohne die Integrationen zu wiederholen, das vollständige Inte-

grale sogleich darstellen kann, und zwar auf eine ähnliche Weise, wie wir es oben im Kapitel II. gethan haben. Ich wollte diesem Falle, weil er sich nun weit leichter behandeln läßt, kein eigenes Kapitel widmen, um die Vorschriften nicht zu sehr zu vervielfältigen.

Aufgabe 166.

§. 1233. Wenn die Differenzialgleichung einer beliebigen Ordnung

$$0 = Ay + \frac{Bx\,dy}{dx} + \frac{Cx^2d^2y}{dx^2} + \frac{Dx^3d^3y}{dx^3} + \ldots$$

vorgelegt ist, bey welcher die Veränderliche y mit ihren Differenzialien nicht mehr als eine Dimension hat, die andere Veränderliche x aber gar keine, das vollständige Integrale derselben aufzufinden.

Auflösung.

Es ist einleuchtend, daß ein particuläres Integrale dieser Gleichung erhalten werde, wenn man y einer bestimmten Potenz von x gleich setzt. Nehmen wir also an, es sey $y = x^\mu$, so werden wir nach gehöriger Substitution, und nachdem wir durchaus mit x^μ dividirt haben, auf folgende Gleichung kommen:

$$0 = A + \mu B + \mu(\mu-1)C + \mu(\mu-1)(\mu-2)D + \ldots,$$

aus welcher der Exponent μ bestimmt werden muß; oder, wenn wir nach der Vorschrift des vorhergehenden Problemes aus der gegebenen Gleichung den algebraischen Ausdruck

$$P = A + B(z-1) + C(z-1)(z-2) + D(z-1)(z-2)(z-3) + \ldots$$

bilden, und denselben in seine einfachen Factoren auflösen, so daß

$$P = N(\alpha+z)(\beta+z)(\gamma+z)(\delta+z)\ldots$$

wird, so ist einleuchtend, daß für $\mu = z-1$ der ersten Gleichung Genüge geschehe, wenn man

$$\mu = -\alpha-1, \text{ oder } \mu = -\beta-1, \text{ oder } \mu = -\gamma-1 \text{ u. s. w.}$$

nimmt, so daß jeder Factor ein particuläres Integrale gibt. Da also die Anzahl der Factoren den höchsten Exponenten der Differenzialien gleich ist, so wird sich hieraus das vollständige Integrale der vorgelegten Gleichung ergeben:

$$y = \mathfrak{A}x^{-\alpha-1} + \mathfrak{B}x^{-\beta-1} + \mathfrak{C}x^{-\gamma-1} + \mathfrak{D}x^{-\delta-1} + \ldots;$$

obey nur zu bemerken iſt, daß, wenn zwey oder mehrere jener einichen Factoren einander gleich ſeyn ſollten, die Form des Integrals en ſo verändert werden müſſe, wie es oben im Kapitel II. geſchehen . Da nämlich die dort behandelten Gleichungen auf die gegenwärge Form zurückgeführt werden, wenn man in denſelben lx ſtatt x ſchreibt, ſo ſchöpfen wir hieraus folgende Regeln:

1) Wenn der Ausdruck P den Factor $(\alpha + z)^2$ enthält, ſo entht hieraus der Theil des Integrals

$$x^{-\alpha-1}(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} lx).$$

2) Enthält der Ausdruck P den Factor $(\alpha+z)^3$, ſo iſt der hieris entſtandene Theil des Integrals

$$= x^{-\alpha-1}[\mathfrak{A} + \mathfrak{B} lx + \mathfrak{C} (lx)^2].$$

3) Enthält aber die Formel P den Factor $(\alpha + z)^4$, ſo wird der raus entſtandene Theil des Integrals ſeyn:

$$x^{-\alpha-1}[\mathfrak{A} + \mathfrak{B} lx + \mathfrak{C} (lx)^2 + \mathfrak{D} (lx)^3].$$

Wenn imaginäre Factoren vorkommen, ſo werden ſich die ihnen tſprechenden Theile des Integrals durch die gewöhnliche Reduction r imaginären Größen auf eine reelle Form leicht zurückführen laſſen, e ich in den folgenden Zuſätzen lehren will.

Zuſatz 1.

§. 1234. Wenn der Ausdruck P zwey einfache imaginäre Facren hat, welche in der Formel $f^2 + 2fz\cos.\theta + z^2$ enthalten ſind, wird man durch Vergleichung dieſer Formel mit dem Producte $+ z)(\beta + z)$ erhalten:

$= f(\cos.\theta + \sqrt{-1}\sin.\theta)$ und $\beta = f(\cos.\theta - \sqrt{-1}\sin.\theta)$;

her wird

$$-\alpha = x^{-f\cos.\theta}\, x^{-f\sqrt{-1}\sin.\theta} = x^{-f\cos.\theta}\, e^{-\sqrt{-1}f\sin.\theta lx}.$$

Es iſt aber

$$e^{-u\sqrt{-1}} = \cos.u - \sqrt{-1}\sin.u,$$

lglich findet man

$$-\alpha-1 = x^{-f\cos.\theta}\left[\frac{\cos.(f\sin.\theta lx) - \sqrt{-1}\sin.(f\sin.\theta lx)}{x}\right].$$

Da nun $x^{-\beta-1}$ auf eine ähnliche Weiſe ausgedrückt wird,

wenn man das Zeichen von $\sqrt{-1}$ verändert, so entsteht aus dem trinomischen Factor $f^2 + 2fz\cos.\theta + z^2$ folgender Theil des Integrals:

$$x^{-f\cos.\theta-1}\,[\mathfrak{A}\cos.(f\sin.\theta\,lx) + \mathfrak{B}\sin.(f\sin.\theta\,lx)],$$

der sich auch so darstellen läßt:

$$\mathfrak{A}x^{-fx\cos.\theta-1}\cos.(a + f\sin.\theta\,lx),$$

wobey a einen willkürlichen unveränderlichen Winkel bezeichnet.

Zusatz 2.

§. 1235. Wenn die Formel P zwey gleiche solche Factoren enthält, so daß

$$(\alpha + z)^2\,(\beta + z)^2 = (f^2 + 2fz\cos.\theta + z^2)^2$$

ist, so werden auf ähnliche Weise die Größen α und β dieselben imaginären Werthe erhalten, wie vorhin; und durch die Reduction derselben ergibt sich der zugehörige Theil des Integrales

$$x^{-f\cos.\theta-1}\,[\mathfrak{A}\cos.(a + f\sin.\theta\,lx) + \mathfrak{B}\,lx\cos.(b + f\sin.\theta\,lx)],$$

welcher die vier willkürlichen constanten Größen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, a, b enthält.

Zusatz 3.

§. 1236. Hieraus erhellt also, wie man aus den Factoren des Ausdrucks P, es mögen diese einfach oder quadratisch, ungleich oder gleich seyn, die einzelnen Theile des Integrals angeben und hieraus das ganze vollständige Integrale bilden müsse.

Anmerkung.

§. 1237. Es kömmt also hier lediglich darauf an, den aus der Differenzialgleichung gebildeten algebraischen Ausdruck

$$P = A + B(z-1) + C(z-1)(z-2) + D(z-1)(z-2)(z-3) + \ldots$$

in seine reellen, einfachen oder trinomischen Factoren aufzulösen, was aber gewöhnlich sehr schwierig ist, weil solche Formen gewöhnlich nicht ausführlich behandelt werden. Da aber jene Gleichung mit der allgemeinen, welche wir in diesem Kapitel entwickelt haben, diese Auflösung gemein hat, so wird es zweckmäßig seyn, das, was sich hier leisten läßt, lieber bey der allgemeinen Gleichung nachzuweisen, zu deren Auflösung ich daher zurückkehre. Ich halte es für nöthig, hier nur zu erinnern, daß, wenn man für die allgemeine Gleichung

$$X = Ay + \frac{Bx\,dy}{dx} + \frac{Cx^2d^2y}{dx^2} + \frac{Dx^3d^3y}{dx^3} + \ldots$$

irgend ein particuläres Integrale, z. B. $y = V$ kennt, wobey V irgend eine Function von x bezeichnet, ſo bald man $y = V + v$ ſetzt, folgende Gleichung zum Vorſchein komme:

$$o = Av + \frac{Bx\,dv}{dx} + \frac{Cx^2d^2v}{dx^2} + \frac{Dx^3d^3v}{dx^3} + \ldots,$$

wenn man das vollſtändige, nach den Vorſchriften dieſes Problemes gefundene Integrale ſtatt v ſchreibt, ſo wird man das vollſtändige Integrale jener Gleichung erhalten, wodurch man zuverläßig die Rechnung bedeutend abkürzt.

Aufgabe 167.

§. 1238. Sey gegeben die Differenzialgleichung des n^{ten} Grades von der Form

$$X = Ay + \frac{Bx\,dy}{dx} + \frac{Cx^2d^2y}{dx^2} + \ldots + \frac{Nx^nd^ny}{dx^n};$$

man ſuche das Integrale derſelben, indem man die Integration n Mahl wiederholt.

Auflöſung.

Aus dieſer Gleichung bilde man ſich den algebraiſchen Ausdruck

$$P = A + B(z-1) + C(z-1)(z-2) + D(z-1)(z-2)(z-3) + \ldots + N(z-1)(z-2)\ldots(z-n),$$

ſuche alle einfachen Factoren desſelben, ohne Rückſicht darauf zu nehmen, ob ſie reell oder imaginär ſind, ſo ſtellt ſich jener Ausdruck unter folgender Form dar:

$$P = N(\alpha + z)(\beta + z)(\gamma + z)\ldots(\mu + z)(\nu + z),$$

bey welcher die Anzahl der Factoren $= n$ iſt. Zu Anfang dieſes Kapitels haben wir geſehen, daß dann jeder Factor, nämlich $\alpha + z$, die Potenz x^α darbiethe, durch welche unſere Gleichung integrabel wird; ja wir haben ſelbſt gezeigt, daß das hieraus entſtandene Integrale, wenn man Kürze halber

$$x^{-\alpha-1}\int x^\alpha X\,dx = X'$$

ſetzt, durch folgende Gleichung dargeſtellt werde:

$$X' = A'y + \frac{B'x\,dy}{dx} + \frac{C'x^2d^2y}{dx^2} + \ldots + \frac{Nx^{n-1}d^{n-1}y}{dx^{n-1}},$$

so daß $A' = \frac{A}{\alpha + 1}$ wird, die übrigen Coefficienten aber in der dort angeführten Relation stehen; hier aber wird es hinreichend seyn, vorzüglich den ersten Coefficienten zu berücksichtigen. Hat man aber die erste Integration bereits ausgeführt, und man bildet nach demselben Gesetz aus der einmahl integrirten Gleichung die Größe

$$P' = A' + B'(z-1) + C'(z-1)(z-2) + \ldots + N(z-1)(z-2)\ldots(z-n+1),$$

deren Auflösung in Factoren schon aus dem ersten Ausdruck P bekannt ist, so ist, wie ich (§. 1229) bewiesen habe:

$$P' = N(\beta + z)(\gamma + z)(\delta + z)\ldots(\mu + z)(\nu + z),$$

so daß $P' = \frac{P}{a + z}$ wird. Es wird demnach der Factor $\beta + z$ auf ähnliche Weise den Multiplicator x^β geben, durch welchen jene Gleichung integrabel gemacht wird. Setzt man nun

$$x^{-\beta-1} \int x^\beta X' dx = X'',$$

so daß

$$X'' = x^{-\beta-1} \int x^{\beta-\alpha-1} dx \int x^\alpha X dx$$

wird, so ist das Integrale

$$X'' = A''y + \frac{B''x\,dy}{dx} + \frac{C''x^2 d^2y}{dx^2} + \ldots + \frac{N x^{n-2} d^{n-2} y}{dx^{n-2}},$$

wo $A'' = \frac{A'}{\beta + 1} = \frac{A}{(\alpha+1)(\beta+1)}$ ist. Wenn wir auf diese Weise nach und nach so viele Integrationen ausführen, wie viele Einheiten in dem Ordnungsexponenten n enthalten sind, und so alle einfachen Factoren des Ausdrucks P zu Hülfe nehmen, so werden wir endlich auf die Gleichung $X^{(n)} = A^{(n)}y$ kommen, welche die verlangte Integralgleichung selbst ist; weil aber hier

$$A^{(n)} = \frac{A}{(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots(\nu+1)}$$

ist, so sieht man, daß der Nenner aus dem Ausdrucke $\frac{P}{N}$ entstehe, wenn man statt z die Einheit schreibt; dann aber gibt der erste Ausdruck, wenn $z = 1$ genommen wird, offenbar $P = A$, so daß jener Nenner $= \frac{A}{N}$, also $A^{(n)} = N$ wird, was auch schon daraus erhellt, daß die letzten Glieder aller Gleichungen denselben Coefficienten N

aben, mit welchem alſo in der letzten Integralgleichung das erſte Glied ſelbſt behaftet ſeyn muß. Es iſt aber ferner

$$(\alpha) = x^{-\nu-1} \int x^{\nu-\mu-1} dx \int x^{\mu-\lambda-1} dx \ldots$$
$$\ldots \int x^{\beta-\alpha-1} dx \int x^{\alpha} X dx,$$

nd da hier die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ wie immer unter einander verauſcht werden können, ſo wird ſich das geſuchte Integrale auch auf lgende Weiſe darſtellen laſſen:

$$y = x^{-\alpha-1} \int x^{\alpha-\beta-1} dx \int x^{\beta-\gamma-1} dx \ldots$$
$$\ldots \int x^{\mu-\nu-1} dx \int x^{\nu} X dx.$$

Zuſatz 1.

§. 1239. Es kömmt alſo hier nur darauf an, den algebraiſchen usdruck

$$= A + B(z-1) + C(z-1)(z-2) + D(z-1)(z-2)(z-3) + \ldots$$

ſeine einfachen Factoren aufzulöſen. Iſt dieß geſchehen, hat man imlich die Gleichung

$$P = N(\alpha + z)(\beta + z)(\gamma + z) \ldots (\nu + z),$$

wird das geſuchte Integrale hieraus leicht abgeleitet, und zwar auf ehrere Arten, weil ſich die Factoren mannigfaltig vertauſchen laſſen. lein alle Reſultate bezeichnen denſelben Werth, wie aus den folgenn Unterſuchungen noch deutlicher erhellen wird.

Zuſatz 2.

§. 1240. Da dieſe gefundene Form des Integrals eben ſo viele ntegrationen erfordert, vom wievielten Grade die vorgelegte Differnzialgleichung iſt, ſo werden auch eben ſo viel willkürliche Conſtan- e eingeführt werden, wie es die Natur der vollſtändigen Integration fordert.

Anmerkung.

§. 1241. Weil das gefundene Integrale mehrere Integrationen fordert, ſo wird es um der bequemeren Anwendung willen zweckäßig ſeyn, dieſe Form in Theile aufzulöſen, deren jeder nur ein einjes Integralzeichen enthält. Dieſe Auflöſung aber läßt ſich auf ähnhe Weiſe ausführen, wie wir es oben gethan haben, und zwar wird er die ganze Rechnung auf einen Ausdruck von der Form

$$\int x^{m-n-1} dx \int x^{n} X dx$$

zurückgeführt, welcher sich offenbar so verkürzen läßt, daß man

$$\frac{1}{m-n}\,x^{m-n}\int x^n X\,dx - \frac{1}{m-n}\int x^m X\,dx$$

erhält, wobey jedoch zu bemerken ist, daß, wenn $m=n$ seyn sollte, eine eigene Reduction erforderlich sey, und daß man in diesem Falle erhalten werde:

$$\int\frac{dx}{x}\int x^n X\,dx = lx\int x^n X\,dx - \int x^n X\,dx\,lx.$$

Diese Regel wollen wir also anwenden bey der Auflösung der folgenden Probleme, in welchen wir nach und nach alle Grade der Differenzialien durchgehen wollen, mit Ausnahme des ersten Grades, weil der Gleichung

$$X = Ay + \frac{Nx\,dy}{dx}$$

wegen

$$P = A + N(z-1) = N(\alpha+z)$$

das Integrale

$$Ny = x^{-\alpha-1}\int x^\alpha X\,dx$$

entspricht, welches keiner weitern Reduction bedarf.

Aufgabe 168.

§. 1242. Sey gegeben die Differenzialgleichung des zweyten Grades:

$$X = Ay + \frac{Bx\,dy}{dx} + \frac{Nx^2d^2y}{dx^2};$$

man entwickle das Integrale derselben durch einfache Integralformeln.

Auflösung.

Weil

$$P = A + B(z-1) + N(z-1)(z-2)$$

ist, so setze man

$$P = N(\alpha+z)(\beta+z),$$

so wird das Integrale, nach der vorhergehenden Methode bestimmt, $Ny = X''$ seyn, wobey

$$x^{\beta+1}X'' = \int x^{\beta-\alpha-1}\,dx\int x^\alpha X\,dx$$

ist, welcher Ausdruck sich in folgenden verwandelt:

$$\frac{1}{\beta-\alpha}\,x^{\beta-\alpha}\int x^{\alpha}X\,dx-\frac{1}{\beta-\alpha}\int x^{\beta}X\,dx,$$

und so wird man erhalten:

$$Ny=\frac{x^{-\alpha-1}}{\beta-\alpha}\int x^{\alpha}X\,dx+\frac{x^{-\beta-1}}{\alpha-\beta}\int x^{\beta}X\,dx.$$

Hier aber ist der Fall auszunehmen, in welchem $\beta=\alpha$ ist, denn dann wird

$$x^{\alpha+1}X''=\int\frac{dx}{x}\int x^{\alpha}X\,dx=lx\int x^{\alpha}X\,dx-\int x^{\alpha}X\,dx\,lx,$$

und wir werden demnach für diesen Fall erhalten:

$$Ny=x^{-\alpha-1}\int\frac{dx}{x}\int x^{\alpha}X\,dx,\quad\text{oder}$$

$$Ny=x^{-\alpha-1}\left[lx\int x^{\alpha}X\,dx-\int x^{\alpha}X\,dx\,lx\right],$$

wo jedoch die erstere Form den Vorzug zu verdienen scheint.

Zusatz 1.

§. 1243. Sind die beyden einfachen Factoren imaginär, so setze man

$$(\alpha+z)(\beta+z)=f^2+2fz\cos.\theta+z^2,$$

und man wird finden:

$$\alpha=f(\cos.\theta+\sqrt{-1}\sin.\theta)\quad\text{und}$$

$$\beta=f(\cos.\theta-\sqrt{-1}\sin.\theta),$$

also

$$\beta-\alpha=-2f\sqrt{-1}\sin.\theta.$$

Dann aber ist

$$x^{\alpha}=x^{f\cos.\theta}\left[\cos.(f\sin.\theta\,lx)+\sqrt{-1}\sin.(f\sin.\theta\,lx)\right]$$

und

$$x^{-\alpha}=x^{-f\cos.\theta}\left[\cos.(f\sin.\theta\,lx)-\sqrt{-1}\sin.(f\sin.\theta\,lx)\right],$$

welche Formeln die Werthe von x^{β} und $x^{-\beta}$ bezeichnen, wenn man das Zeichen von $\sqrt{-1}$ in das entgegengesetzte verwandelt.

Zusatz 2.

§. 1244. Man setze Kürze halber den Winkel

$$f\sin.\theta\,lx=\varphi,$$

so wird man nach gehöriger Substitution finden:

$$Nxy = \frac{x^{-f\cos.\theta}(\cos.\varphi - \sqrt{-1}\sin.\varphi)\int x^{f\cos.\theta} X dx (\cos.\varphi + \sqrt{-1}\sin.\varphi)}{-2f\sqrt{-1}\sin.\theta} +$$

$$+ \frac{x^{-f\cos.\theta}(\cos.\varphi + \sqrt{-1}\sin.\varphi)\int x^{f\cos.\theta} X dx (\cos.\varphi - \sqrt{-1}\sin.\varphi)}{2f\sqrt{-1}\sin.\theta},$$

wo die imaginären Theile sich von selbst aufheben, und demnach wird

$$Nxy = \frac{x^{-f\cos.\theta}}{f\sin.\theta}[\sin.\varphi\int x^{f\cos.\theta} X dx \cos.\varphi - \cos.\varphi\int x^{f\cos.\theta} X dx \sin.\varphi].$$

Zusatz 3.

§. 1245. Diese so eben gefundene reelle Form ist also gleichgeltend mit folgender Formel, welche imaginäre Größen enthält, nämlich mit

$$Nxy = \frac{x^{-\alpha}}{\beta - \alpha}\int x^{\alpha} X dx + \frac{x^{-\beta}}{\alpha - \beta}\int x^{\beta} X dx,$$

wenn

$$(\alpha + z)(\beta + z) = f^2 + 2fz\cos.\theta + z^2$$

ist, und $\varphi = f\sin.\theta lx$ gesetzt wird. Ist diese Reduction einmahl gemacht, so wird sie auch bey den folgenden Reductionen ihre Dienste leisten.

Aufgabe 169.

§. 1246. Sey gegeben die Differenzialgleichung des dritten Grades:

$$X = Ay + \frac{Bxdy}{dx} + \frac{Cx^2d^2y}{dx^2} + \frac{Nx^3d^3y}{dx^3};$$

man entwickle das Integrale derselben durch einfache Integralformeln.

Auflösung.

Da hier

$$P = A + B(z-1) + C(z-1)(z-2) + N(z-1)(z-2)(z-3),$$

so setze man

$$P = N(\alpha + z)(\beta + z)(\gamma + z),$$

und weil durch die allgemeine Integration $Ny = X'''$ gefunden wird, so bemerke man, daß

$$X''' = x^{-\gamma-1}\int x^{\gamma} X'' dx$$

sey, wenn wir nämlich den Werth von X'' aus den zwey Factoren $\alpha + z$ und $\beta + z$ schon gefunden haben; man erhält nämlich nach dem vorhergehenden Probleme

$$X'' = \frac{x^{-\alpha-1}}{\beta-\alpha}\int x^{\alpha} X\,dx + \frac{x^{-\beta-1}}{\alpha-\beta}\int x^{\beta} X\,dx,$$

nd hieraus folgt:

$$\int x^{\gamma} X''\,dx = \frac{x^{\gamma-\alpha}\int x^{\alpha} X\,dx}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)} - \frac{\int x^{\gamma} X\,dx}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)} + \frac{x^{\gamma-\beta}\int x^{\beta} X\,dx}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)} - \frac{\int x^{\gamma} X\,dx}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)}.$$

Es ist aber

$$\frac{1}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)} + \frac{1}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)} = \frac{-1}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)},$$

ie theils für sich klar ist, theils aber aus dem §. 1169 bewiesenen hrsatze hervorgeht. Das gesuchte Integrale wird demnach durch fol- nden Ausdruck dargestellt:

$$Nxy = \frac{x^{-\alpha}\int x^{\alpha} X\,dx}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)} + \frac{x^{-\beta}\int x^{\beta} X\,dx}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)} + \frac{x^{-\gamma}\int x^{\gamma} X\,dx}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}.$$

Zusatz 1.

§. 1247. Wenn die Formel P zwey gleiche Factoren hat, so ß $\beta = \alpha$ ist, so wird, weil dann

$$X'' = x^{-\alpha-1}\int \frac{dx}{x}\int x^{\alpha} X\,dx$$

ird,

$$\gamma X''dx = \frac{x^{\gamma-\alpha}}{\gamma-\alpha}\int \frac{dx}{x}\int x^{\alpha} X\,dx - \frac{1}{\gamma-\alpha}\int x^{\gamma-\alpha-1}\,dx\int x^{\alpha} X\,dx;$$

ist aber

$$\int x^{\gamma-\alpha-1}\,dx\int x^{\alpha} X\,dx = \frac{x^{\gamma-\alpha}}{\gamma-\alpha}\int x^{\alpha} X\,dx - \frac{1}{\gamma-\alpha}\int x^{\gamma} X\,dx,$$

ıd hieraus folgt:

$$xy = \frac{x^{-\alpha}}{\gamma-\alpha}\int \frac{dx}{x}\int x^{\alpha} X\,dx - \frac{x^{-\alpha}}{(\gamma-\alpha)^2}\int x^{\alpha} X\,dx + \frac{x^{-\gamma}}{(\gamma-\alpha)^2}\int x^{\gamma} X\,dx.$$

Zusatz 2.

§. 1248. Eine ähnliche Formel wird erhalten, wenn $\gamma = \beta$ nommen wird, denn dann wird

$$\int x^{\gamma} X''\,dx = \frac{x^{\beta-\alpha}}{(\beta-\alpha)^2}\int x^{\alpha} X\,dx - \frac{\int x^{\beta} X\,dx}{(\beta-\alpha)^2} + \frac{1}{\alpha-\beta}\int \frac{dx}{x}\int x^{\beta} X\,dx$$

und daher

$$Nxy = \frac{x^{-\beta}}{\alpha-\beta}\int\frac{dx}{x}\int x^{\beta}X\,dx - \frac{x^{-\beta}\int x^{\beta}X\,dx}{(\beta-\alpha)^2} + \frac{x^{-\alpha}\int x^{\alpha}X\,dx}{(\beta-\alpha)^2}.$$

Zuſatz 3.

§. 1249. Wenn aber alle drey Factoren einander gleich ſind, wenn $\alpha = \beta = \gamma$ iſt, ſo wird man erhalten:

$$\int x^{\gamma}X''\,dx = \int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\int x^{\alpha}X\,dx,$$

und daher erſcheint in dieſem Falle das Integrale in der kurzen Form

$$Nxy = x^{-\alpha}\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\int x^{\alpha}X\,dx.$$

Zuſatz 4.

§. 1250. Wenn zwey Factoren imaginär ſind, wenn nämlich

$$(\alpha+z)(\beta+z) = f^2 + 2fz\cos.\theta + z^2$$

iſt, ſo bleibt zwar wegen

$\alpha = f(\cos.\theta + \sqrt{-1}\sin.\theta)$ und $\beta = f(\cos.\theta - \sqrt{-1}\sin.\theta)$

das letzte Glied unſeres Integrales reell, indem

$$(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma) = \gamma^2 - 2\gamma f\cos.\theta + f^2$$

iſt; allein, wenn $\varphi = f\sin.\theta\,lx$ geſetzt wird, werden die beyden erſten Glieder übergehen in

$$\frac{x^{-f\cos.\theta}(\cos.\varphi - \sqrt{-1}\sin.\varphi)\int x^{f\cos.\theta}X\,dx\,(\cos.\varphi + \sqrt{-1}\sin.\varphi)}{-2f\sqrt{-1}\sin.\theta\,[\gamma - f(\cos.\theta + \sqrt{-1}\sin.\theta)]}$$

$$+\frac{x^{-f\cos.\theta}(\cos.\varphi + \sqrt{-1}\sin.\varphi)\int x^{f\cos.\theta}X\,dx\,(\cos.\varphi - \sqrt{-1}\sin.\varphi)}{2f\sqrt{-1}\sin.\theta\,[\gamma - f(\cos.\theta - \sqrt{-1}\sin.\theta)]},$$

welche ſich auf folgende reelle Form zurückführen laſſen:

$$\frac{\left\{\begin{array}{l} x^{-f\cos.\theta}[\gamma\sin.\varphi - f\sin.(\theta+\varphi)]\int x^{f\cos.\theta}X\,dx\cos.\varphi \\ -x^{-f\cos.\theta}[\gamma\cos.\varphi - f\cos.(\theta+\varphi)]\int x^{f\cos.\theta}X\,dx\sin.\varphi \end{array}\right\}}{f\sin.\theta\,(\gamma^2 - 2\gamma f\cos.\theta + f^2)}.$$

Anmerkung.

§. 1251. Was die imaginären Factoren betrifft, ſo wird ſich die Reduction der hieraus entſtandenen Integralien leichter im Allgemeinen behandeln laſſen, und daher will ich mich bey dieſen beſtimmten

Graden der Differenzialien nicht länger mit derselben beschäftigen. Allein die gleichen Factoren, mit welchen wir uns hier für die einzelnen Grade beschäftiget haben, glaube ich noch genauer verfolgen zu müssen, weil ich oben durch das zu schnelle Fortschreiten zur allgemeinen Entwickelung in einen ganz besondern Irrthum gerathen bin, welchen ich sogleich glücklich hätte vermeiden können, wenn ich mich daselbst dieser Methode bedient hätte. Ein ähnlicher Irrthum rücksichtlich der imaginären Factoren ist nicht zu befürchten, da bey dieser Rechnung keine Größen erscheinen, welche, weil sie unter der Form des unendlich Kleinen erscheinen, vernachläßigt werden müssen. Aus dieser Quelle aber sind jene Fehler, welche ich oben begangen habe, hervorgegangen, welchen seinen Irrthum ich mit der nöthigen Verbesserung hier entwickeln will, um die Sache in ein desto helleres Licht zu setzen. Es handelt sich nämlich in dem gegenwärtigen Falle darum, daß der Werth der beyden Formeln

$$\frac{x^{-\alpha}\int x^{\alpha} X\,dx}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)} + \frac{x^{-\beta}\int x^{\beta} X\,dx}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)}$$

bestimmt werde, wenn $\beta = \alpha$ ist, und die beyden Glieder ins Unendliche fortwachsen. Zu diesem Zwecke setze ich $\beta = \alpha + \omega$, wobey ω eine verschwindend kleine Größe ist, so wird

$$x^{\beta} = x^{\alpha}x^{\omega} = x^{\alpha}e^{\omega lx} = x^{\alpha}(1 + \omega lx), \text{ also}$$

$$x^{-\beta} = x^{-\alpha}(1 - \omega lx),$$

und daher erhalten wir:

$$\frac{x^{-\alpha}\int x^{\alpha} X\,dx}{\omega(\gamma-\alpha)} - \frac{x^{-\alpha}(1-\omega lx)\int x^{\alpha} X\,dx\,(1+\omega lx)}{\omega(\gamma-\beta)}.$$

Weil nun

$$\frac{1}{\gamma-\alpha} = \frac{1}{\gamma-\beta+\omega} = \frac{1}{\gamma-\beta} - \frac{\omega}{(\gamma-\beta)^2},$$

so geht das erste Glied über in folgende Form:

$$\frac{x^{-\alpha}\int x^{\alpha} X\,dx}{\omega(\gamma-\beta)} - \frac{x^{-\alpha}\int x^{\alpha} X\,dx}{(\gamma-\beta)^2},$$

das letztere aber löst sich auf in

$$\frac{-x^{-\alpha}\int x^{\alpha} X\,dx}{\omega(\gamma-\beta)} + \frac{x^{-\alpha} lx \int x^{\alpha} X\,dx - x^{-\alpha}\int x^{\alpha} X\,dx\,lx}{\gamma-\beta},$$

und der gesuchte Werth ist für den Fall, wenn $\alpha = \beta$ ist, enthalten in

$$\frac{x^{-\alpha}(lx\int x^{\alpha}X\,dx - \int x^{\alpha}X\,dx\,lx}{\gamma-\alpha} - \frac{x^{-\alpha}\int x^{\alpha}X\,dx}{(\gamma-\alpha)^2} \quad \text{oder}$$

$$\frac{x^{-\alpha}}{\gamma-\alpha}\int\frac{dx}{x}\int x^{\alpha}X\,dx - \frac{x^{-\alpha}}{(\gamma-\alpha)^2}\int x^{\alpha}X\,dx.$$

Das letzte Glied dieses Ausdruckes, welches bey jener fehlerhaften Methode weggelassen war, entsteht daher, weil wir hier auf den Unterschied zwischen den Ausdrücken $\gamma-\alpha$ und $\gamma-\beta$ Rücksicht genommen haben, welche unerläßliche Vorsicht wir oben vernachläßigten.

Aufgabe 170.

§. 1252. Sey die Differenzialgleichung des vierten Grades

$$X = Ay + \frac{Bx\,dy}{dx} + \frac{Cx^2d^2y}{dx^2} + \frac{Dx^3d^3y}{dx^3} + \frac{Nx^4d^4y}{dx^4}$$

gegeben, das Integrale derselben durch einfache Integralformeln zu entwickeln.

Auflösung.

Wenn man sich hieraus den algebraischen Ausdruck

$$P = A + B(z-1) + C(z-1)(z-2) + D(z-1)(z-2)(z-3) + N(z-1)(z-2)(z-3)(z-4)$$

gebildet hat, so setze man

$$P = N(\alpha+z)(\beta+z)(\gamma+z)(\delta+z),$$

so findet man nach den allgemeinen Vorschriften

$$Ny = X^{IV}, \quad \text{wobey} \quad X^{IV} = x^{-\delta-1}\int X'''x^{\delta}dx$$

ist, wenn man nämlich X''' aus den drey ersten Factoren bestimmt, wie es in dem vorhergehenden Probleme geschehen ist. Man muß nämlich den dort für Nxy gefundenen Werth mit $x^{\delta-1}dx$ multipliciren, so erhält man dann:

$$\begin{aligned}\int x^{\delta}X'''dx = {} & + \frac{x^{\delta-\alpha}\int x^{\alpha}X\,dx}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\delta-\alpha)} - \frac{\int x^{\delta}X\,dx}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\delta-\alpha)} \\ & + \frac{x^{\delta-\beta}\int x^{\beta}X\,dx}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)(\delta-\beta)} - \frac{\int x^{\delta}X\,dx}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)(\delta-\beta)} \\ & + \frac{x^{\delta-\gamma}\int x^{\gamma}X\,dx}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\delta-\gamma)} - \frac{\int x^{\delta}X\,dx}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\delta-\gamma)}\end{aligned}$$

wo, wegen der oben bewieſenen Gründe, die drey letzten Glieder in den Ausdruck

$$+\frac{\int x^{\delta} X\,dx}{(\alpha-\delta)\,(\beta-\delta)\,(\gamma-\delta)}$$

zuſammengezogen werden, ſo daß das geſuchte Integrale

$$Nxy = \frac{x^{-\alpha}\int x^{\alpha} X\,dx}{(\beta-\alpha)\,(\gamma-\alpha)\,(\delta-\alpha)} + \frac{x^{-\beta}\int x^{\beta} X\,dx}{(\alpha-\beta)\,(\gamma-\beta)\,(\delta-\beta)}$$
$$+\frac{x^{-\gamma}\int x^{\gamma} X\,dx}{(\alpha-\gamma)\,(\beta-\gamma)\,(\delta-\gamma)} + \frac{x^{-\delta}\int x^{\delta} X\,dx}{(\alpha-\delta)\,(\beta-\delta)\,(\gamma-\delta)}$$

iſt, wenn nämlich alle Factoren von einander verſchieden ſind. Die Fälle aber, in welchen zwey oder mehrere Factoren einander gleich ſind, werden wir in den folgenden Zuſätzen unterſuchen.

Zuſatz 1.

§. 1253. Wenn zwey Factoren einander gleich ſind, nämlich $\delta = \gamma$, oder wenn

$$P = N\,(\alpha+z)\,(\beta+z)\,(\gamma+z)^2,$$

ſo entſteht aus eben dieſer vorhin für X''' gefundenen Form das Integrale

$$Nxy = \frac{x^{-\alpha}\int x^{\alpha} X\,dx}{(\beta-\alpha)\,(\gamma-\alpha)^2} - \frac{x^{-\gamma}\int x^{\gamma} X\,dx}{(\beta-\alpha)\,(\gamma-\alpha)^2}$$
$$+\frac{x^{-\beta}\int x^{\beta} X\,dx}{(\alpha-\beta)\,(\gamma-\beta)^2} - \frac{x^{-\gamma}\int x^{\gamma} X\,dx}{(\alpha-\beta)\,(\gamma-\beta)^2}$$
$$+\frac{x^{-\gamma}\int\frac{dx}{x}\int x^{\gamma} X\,dx}{(\alpha-\gamma)\,(\beta-\gamma)},$$

wo die negativen Theile ſich auf folgende Art darſtellen laſſen:

$$\frac{x^{-\gamma}\int x^{\gamma} X\,dx}{(\alpha-\beta)}\left(\frac{1}{(\gamma-\alpha)^2} - \frac{1}{(\gamma-\beta)^2}\right).$$

Zuſatz 2.

§. 1254. Wenn drey Factoren einander gleich ſind, ſo daß

$$P = N\,(\alpha+z)\,(\beta+z)^3,$$

alſo $\delta = \gamma = \beta$ wird, ſo ergibt ſich aus der §. 1248 gefundenen

Formel das Integrale:

$$Nxy = \frac{x^{-\alpha}\int x^{\alpha} X dx}{(\beta-\alpha)^3} - \frac{x^{-\beta}\int x^{\beta} X dx}{(\beta-\alpha)^3} - \frac{x^{-\beta}\int\frac{dx}{x}\int x^{\beta} X dx}{(\beta-\alpha)^2} + \frac{x^{-\beta}\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\int x^{\beta} X dx}{\alpha-\beta}.$$

Zusatz 3.

§. 1255. Wenn alle vier Factoren einander gleich sind, so daß

$$P = N(\alpha+z)^4, \text{ also } \delta = \gamma = \beta = \alpha$$

wird, so ist, nach der §. 1249 für drey gleiche Factoren gefundenen Formel, das Integrale:

$$Nxy = x^{-\alpha}\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\int x^{\alpha} X dx.$$

Zusatz 4.

§. 1256. Wenn $\beta = \alpha$ und $\delta = \gamma$ ist, so daß zwey und zwey Factoren einander gleich sind, nämlich

$$P = N(\alpha+z)^2(\gamma+z)^2,$$

so ergibt sich nach §. 1247, wo die Factoren $(\alpha+z)^2$ $(\gamma+z)$ waren, das Integrale:

$$Nxy = \frac{x^{-\alpha}}{(\gamma-\alpha)^2}\int\frac{dx}{x}\int x^{\alpha} X dx - \frac{x^{-\gamma}}{(\gamma-\alpha)^2}\int x^{\gamma-\alpha-1} dx \int x^{\alpha} X dx$$
$$- \frac{x^{-\alpha}}{(\gamma-\alpha)^3}\int x^{\alpha} X dx + \frac{x^{-\gamma}}{(\gamma-\alpha)^3}\int x^{\gamma} X dx + \frac{x^{-\gamma}}{(\gamma-\alpha)^2}\int\frac{dx}{x}\int x^{\gamma} X dx$$

und da

$$\int x^{\gamma-\alpha-1} dx \int x^{\alpha} X dx = \frac{x^{\gamma-\alpha}}{\gamma-\alpha}\int x^{\alpha} X dx - \frac{1}{\gamma-\alpha}\int x^{\gamma} X dx$$

ist, so wird dasselbe in folgenden Ausdruck zusammengezogen:

$$Nxy = \frac{x^{-\alpha}}{(\gamma-\alpha)^2}\int\frac{dx}{x}\int x^{\alpha} X dx + \frac{x^{-\gamma}}{(\gamma-\alpha)^2}\int\frac{dx}{x}\int x^{\gamma} X dx$$
$$- \frac{2x^{-\alpha}}{(\gamma-\alpha)^3}\int x^{\alpha} X dx + \frac{2x^{-\gamma}}{(\alpha-\gamma)^3}\int x^{\gamma} X dx.$$

Aufgabe 171.

§. 1257. Sey gegeben die Differenzialgleichung des fünften Grades:

$$X = Ay + \frac{Bx\,dy}{dx} + \frac{Cx^2d^2y}{dx^2} + \frac{Dx^3d^3y}{dx^3} + \frac{Ex^4d^4y}{dx^4} + \frac{Nx^5d^5y}{dx^5}$$

das Integrale derſelben durch einfache Integralformeln darzuſtellen.

Auflöſung.

Da man ſich hier den algebraiſchen Ausdruck

$$P = A + B(z-1) + C(z-1)(z-2) + \ldots$$
$$\ldots + N(z-1)(z-2)(z-3)(z-4)(z-5)$$

zu bilden hat, ſo ſetze man

$$P = N(\alpha+z)(\beta+z)(\gamma+z)(\delta+z)(\varepsilon+z),$$

und wenn alle dieſe Factoren von einander verſchieden ſind, ſo wird man aus dem vorhergehenden Integrale, wenn man die Integration von Neuem vornimmt, für das geſuchte Integrale erhalten:

$$Nxy = \frac{x^{-\alpha}\int x^{\alpha}X\,dx}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\delta-\alpha)(\varepsilon-\alpha)} + \frac{x^{-\beta}\int x^{\beta}X\,dx}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)(\delta-\beta)(\varepsilon-\beta)}$$
$$+ \frac{x^{-\gamma}\int x^{\gamma}X\,dx}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\delta-\gamma)(\varepsilon-\gamma)} + \frac{x^{-\delta}\int x^{\delta}X\,dx}{(\alpha-\delta)(\beta-\delta)(\gamma-\delta)(\varepsilon-\delta)}$$
$$+ \frac{x^{-\varepsilon}\int x^{\varepsilon}X\,dx}{(\alpha-\varepsilon)(\beta-\varepsilon)(\gamma-\varepsilon)(\delta-\varepsilon)}.$$

Die Fälle, in welchen zwey oder mehrere Factoren einander gleich ſind, wollen wir in den Zuſätzen entwickeln.

Zuſatz 1.

§. 1258. Wenn zwey Factoren einander gleich ſind, ſo daß

$$P = N(\alpha+z)(\beta+z)(\gamma+z)(\delta+z)^2,$$

alſo $\varepsilon = \delta$ wird, ſo findet man nach dem vorhergehenden Probleme das Integrale

$$Nxy = + \frac{x^{-\alpha}\int x^{\alpha}X\,dx - x^{-\delta}\int x^{\delta}X\,dx}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\delta-\alpha)^2}$$
$$+ \frac{x^{-\beta}\int x^{\beta}X\,dx - x^{-\delta}\int x^{\delta}X\,dx}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)(\delta-\beta)^2}$$
$$+ \frac{x^{-\gamma}\int x^{\gamma}X\,dx - x^{-\delta}\int x^{\delta}X\,dx}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\delta-\gamma)^2}$$
$$+ \frac{x^{-\delta}\int\frac{dx}{x}\int x^{\delta}X\,dx}{(\alpha-\delta)(\beta-\delta)(\gamma-\delta)}.$$

Zuſatz 2.

§. 1259. Wenn drey Factoren einander gleich ſind, ſo daß

$$P = N\,(\alpha + z)\,(\beta + z)\,(\gamma + z)^3,$$

alſo $\varepsilon = \delta = \gamma$ wird, ſo ergibt ſich nach Zuſatz 1 des vorhergehenden Problemes

$$Nxy = \frac{x^{-\alpha}\int x^{\alpha} X\,dx - x^{-\gamma}\int x^{\gamma} X\,dx}{(\beta-\alpha)\,(\gamma-\alpha)^3} - \frac{x^{-\gamma}\int\frac{dx}{x}\int x^{\gamma} X\,dx}{(\beta-\alpha)\,(\gamma-\alpha)^3}$$
$$+ \frac{x^{-\beta}\int x^{\beta} X\,dx - x^{-\gamma}\int x^{\gamma} X\,dx}{(\alpha-\beta)\,(\gamma-\beta)^3} - \frac{x^{-\gamma}\int\frac{dx}{x}\int x^{\gamma} X\,dx}{(\alpha-\beta)\,(\gamma-\beta)^3}$$
$$+ \frac{x^{-\gamma}\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\int x^{\gamma} X\,dx}{(\alpha-\gamma)\,(\beta-\gamma)}.$$

Zuſatz 3.

§. 1260. Wenn vier Factoren einander gleich ſind, ſo daß

$$P = N\,(\alpha + z)\,(\beta + z)^4,$$

alſo $\varepsilon = \delta = \gamma = \beta$ wird, ſo wird man, nach §. 1254, erhalten

$$Nxy = \frac{x^{-\alpha}\int x^{\alpha} X\,dx}{(\beta-\alpha)^4} - \frac{x^{-\beta}\int x^{\beta} X\,dx}{(\beta-\alpha)^4} - \frac{x^{-\beta}\int\frac{dx}{x}\int x^{\beta} X\,dx}{(\beta-\alpha)^3}$$
$$- \frac{x^{-\beta}\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\int x^{\beta} X\,dx}{(\beta-\alpha)^2} + \frac{x^{-\beta}\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\int x^{\beta} X\,dx}{\alpha-\beta}$$

und wenn alle fünf unter ſich gleich ſind, oder wenn

$$P = N\,(\alpha + z)^5,$$

ſo wird das Integrale ſeyn:

$$Nxy = x^{-\alpha}\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\int x^{\alpha} X\,dx.$$

Zuſatz 4.

§. 1261. Enthält P zwey quadratiſche Factoren, ſo daß

$$P = N\,(\alpha + z)\,(\beta + z)^2\,(\gamma + z)^2,$$

folglich $\delta = \gamma$ und $\varepsilon = \beta$ wird, ſo wird ſich nach §. 1253, nachdem man die nöthige Reduction gemacht hat, folgendes Integrale ergeben:

$$\mathfrak{N}xy = \frac{x^{-\alpha}\int x^{\alpha}X\,dx - x^{-\beta}\int x^{\beta}X\,dx}{(\beta-\alpha)^2\,(\gamma-\alpha)^2} - \frac{x^{-\gamma}\int x^{\gamma}X\,dx + x^{-\beta}\int x^{\beta}X\,dx}{(\beta-\alpha)\,(\alpha-\gamma)^2\,(\beta-\gamma)}$$
$$+ \frac{x^{-\beta}\int\frac{dx}{x}\int x^{\beta}X\,dx}{(\alpha-\beta)\,(\gamma-\beta)^2} - \frac{x^{-\gamma}\int x^{\gamma}X\,dx + x^{-\beta}\int x^{\beta}X\,dx}{(\alpha-\beta)\,(\beta-\gamma)^3}$$
$$+ \frac{x^{-\gamma}\int\frac{dx}{x}\int x^{\gamma}X\,dx}{(\alpha-\gamma)\,(\beta-\gamma)^2} - \frac{x^{-\gamma}\int x^{\gamma}X\,dx + x^{-\beta}\int x^{\beta}X\,dx}{(\alpha-\gamma)\,(\beta-\gamma)^3},$$

welches ferner auf folgenden Ausdruck zurückgeführt wird:

$$\mathfrak{N}xy = \frac{x^{-\alpha}\int x^{\alpha}X\,dx}{(\beta-\alpha)^2\,(\gamma-\alpha)^2} + \frac{x^{-\beta}\int\frac{dx}{x}\int x^{\beta}X\,dx}{(\alpha-\beta)\,(\gamma-\beta)^2} - \frac{x^{-\beta}\int x^{\beta}X\,dx}{(\alpha-\beta)^2\,(\gamma-\beta)^2}$$
$$- \frac{2x^{-\beta}\int x^{\beta}X\,dx}{(\alpha-\beta)\,(\gamma-\beta)^3}$$
$$+ \frac{x^{-\gamma}\int\frac{dx}{x}\int x^{\gamma}X\,dx}{(\alpha-\gamma)\,(\beta-\gamma)^2} - \frac{x^{-\gamma}\int x^{\gamma}X\,dx}{(\alpha-\gamma)^2\,(\beta-\gamma)^2} - \frac{2x^{-\gamma}\int x^{\gamma}X\,dx}{(\alpha-\gamma)\,(\beta-\gamma)^3}.$$

Zusatz 5.

§. 1262. Wenn P einen quadratischen und einen kubischen Factor hat, so daß

$$P = N\,(\alpha+z)^2\,(\gamma+z)^3,$$

also $\beta = \alpha$ und $\varepsilon = \delta = \gamma$, so ergibt sich, nach §. 1254, das Integrale

$$\mathfrak{N}xy = \frac{x^{-\alpha}\int\frac{dx}{x}\int x^{\alpha}X\,dx}{(\gamma-\alpha)^3} - \frac{3x^{-\alpha}\int x^{\alpha}X\,dx}{(\gamma-\alpha)^4}$$
$$+ \frac{x^{-\gamma}\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\int x^{\gamma}X\,dx}{(\alpha-\gamma)^2} - \frac{2x^{-\gamma}\int\frac{dx}{x}\int x^{\gamma}X\,dx}{(\alpha-\gamma)^3} - \frac{3x^{-\gamma}\int x^{\gamma}X\,dx}{(\alpha-\gamma)^4}.$$

Anmerkung.

§. 1263. Aus diesen Formeln erkennt man nicht so leicht, wie man dieselben für eine große Anzahl von Factoren weiter fortsetzen müsse, wenn nämlich einige dieser Factoren einander gleich sind; denn die Theile der Integralien, welche den ungleichen Factoren entsprechen, befolgen ein Gesetz, welches von selbst in die Augen fällt. Die Integralien aber, welche gleichen Theilen entsprechen, können bequemer ausgedrückt werden, wenn man sich einer gewissen Reduction bedient. So z. B. wenn man für den Fall des Zusatzes 1 Kürze halber $\alpha - \delta = p$, $\beta - \delta = q$ und $\gamma - \delta = r$ setzet, so ist der Aus-

druck $x^{-\delta}\int x^{\delta} X\,dx$ multiplicirt mit der Summe

$$\frac{1}{(p-q)(r-p)p^2}+\frac{1}{(p-q)(q-r)q^2}+\frac{1}{(r-p)(q-r)r^2},$$

oder mit

$$\frac{(q-r)q^2r^2+(r-p)p^2r^2+(p-q)p^2q^2}{(p-q)(q-r)(r-p)p^2q^2r^2};$$

der Zähler dieſes Bruches iſt:

$$-(p-q)(q-r)(r-p)(pq+pr+qr);$$

ſo daß dieſer Bruch auf folgenden zurückgeführt wird:

$$\frac{-pq-pr-qr}{p^2q^2r^2}=-\frac{1}{pqr}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\right).$$

Wenn demnach

$$P=N(\alpha+z)(\beta+z)(\gamma+z)(\delta+z)^2$$

iſt, ſo ſtellt ſich das Integrale unter folgender Form dar:

$$Nxy=\frac{x^{-\alpha}\int x^{\alpha}X\,dx}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\delta-\alpha)^2}+\frac{x^{-\beta}\int x^{\beta}X\,dx}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)(\delta-\beta)^2}+\frac{x^{-\gamma}\int x^{\gamma}X\,dx}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\delta-\gamma)^2}$$
$$+\frac{x^{-\delta}\int\frac{dx}{x}\int x^{\delta}X\,dx}{(\alpha-\delta)(\beta-\delta)(\gamma-\delta)}-\frac{x^{-\delta}\int x^{\delta}X\,dx}{(\alpha-\delta)(\beta-\delta)(\gamma-\delta)}\left(\frac{1}{\alpha-\delta}+\frac{1}{\beta-\delta}+\frac{1}{\gamma-\delta}\right).$$

Für den Fall aber, wo

$$P=N(\alpha+z)(\beta+z)(\gamma+z)^3$$

iſt, wird man erhalten:

$$Nxy=\frac{x^{-\alpha}\int x^{\alpha}X\,dx}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)^3}+\frac{x^{-\beta}\int x^{\beta}X\,dx}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)^3}$$
$$+\frac{x^{-\gamma}\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\int x^{\gamma}X\,dx}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}-\frac{x^{-\gamma}\int\frac{dx}{x}\int x^{\gamma}X\,dx}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}\left(\frac{1}{\alpha-\gamma}+\frac{1}{\beta-\gamma}\right)$$
$$+\frac{x^{-\gamma}\int x^{\gamma}X\,dx}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}\left(\frac{1}{(\alpha-\gamma)^2}+\frac{1}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}+\frac{1}{(\beta-\gamma)^2}\right).$$

Ferner wird, wenn

$$P=N(\alpha+z)(\beta+z)^4 \text{ iſt:}$$

$$Nxy=\frac{x^{-\alpha}\int x^{\alpha}X\,dx}{(\beta-\alpha)^4}+\frac{x^{-\beta}\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\int x^{\beta}X\,dx}{\alpha-\beta}$$
$$-\frac{x^{-\beta}\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\int x^{\beta}X\,dx}{\alpha-\beta}\cdot\frac{1}{\alpha-\beta}+\frac{x^{-\beta}\int\frac{dx}{x}\int x^{\beta}X\,dx}{\alpha-\beta}\cdot\frac{1}{(\alpha-\beta)^2}$$
$$-\frac{x^{-\beta}\int x^{\beta}X\,dx}{\alpha-\beta}\cdot\frac{1}{(\alpha-\beta)^3}.$$

Wenn aber

$$P = (\alpha + z)\ (\mathfrak{C} + z)^2\ (\gamma + z)^2$$

ist, so erhält man folgendes Integrale:

$$\int xy = \frac{x^{-\alpha} \int x^{\alpha} X\,dx}{(\mathfrak{C}-\alpha)^2\ (\gamma-\alpha)^2} + \frac{x^{-\beta} \int \frac{dx}{x} \int x^{\beta} X\,dx}{(\alpha-\mathfrak{C})\ (\gamma-\mathfrak{C})^2}$$
$$- \frac{x^{-\beta} \int x^{\beta} X\,dx}{(\alpha-\mathfrak{C})\ (\gamma-\mathfrak{C})^2} \left(\frac{1}{\alpha-\mathfrak{C}} + \frac{2}{\gamma-\mathfrak{C}}\right)$$
$$+ \frac{x^{-\gamma} \int \frac{dx}{x} \int x^{\gamma} X\,dx}{(\alpha-\gamma)\ (\beta-\gamma)^2} - \frac{x^{-\gamma} \int x^{\gamma} X\,dx}{(\alpha-\gamma)\ (\mathfrak{C}-\gamma)^2} \left(\frac{1}{\alpha-\gamma} + \frac{2}{\mathfrak{C}-\gamma}\right)$$

Endlich wenn

$$P = N\ (\alpha + z)^2\ (\gamma + z)^3$$

ist, wird man erhalten:

$$\int xy = \frac{x^{-\alpha} \int \frac{dx}{x} \int x^{\alpha} X\,dx}{(\gamma-\alpha)^3} - \frac{x^{-\alpha} \int x^{\alpha} X\,dx}{(\gamma-\alpha)^3} \cdot \frac{3}{\gamma-\alpha}$$
$$+ \frac{x^{-\gamma} \int \frac{dx}{x} \int \frac{dx}{x} \int x^{\gamma} X\,dx}{(\alpha-\gamma)^2} - \frac{x^{-\gamma} \int \frac{dx}{x} \int x^{\gamma} X\,dx}{(\alpha-\gamma)^2} \cdot \frac{2}{\alpha-\gamma}$$
$$+ \frac{x^{-\gamma} \int x^{\gamma} X\,dx}{(\alpha-\gamma)^2} \cdot \frac{3}{(\alpha-\gamma)^2};$$

hieraus erhellt die Natur dieser Formel schon deutlicher, und man sieht ugleich, daß auf den aus einigen Factoren entsprungenen Theil des Integrals die Gleichheit der übrigen keinen Einfluß äußere; deßhalb können wir nun das allgemeine Problem vornehmen.

Aufgabe 172.

§. 1264. Sey gegeben die Differenzialgleichung ines beliebigen Grades, von folgender Form:

$$X = Ay + \frac{Bx\,dy}{dx} + \frac{Cx^2 d^2y}{dx^2} + \frac{Dx^3 d^3y}{dx^3} + \ldots + \frac{Nx^n d^n y}{dx^n},$$

nd der hieraus nach folgendem Gesetz gebildete algeraische Ausdruck:

$$Z = A + B(z-1) + C(z-1)(z-2) + D(z-1)(z-2)(z-3) + \ldots$$
$$\ldots + N(z-1)(z-2)\ldots(z-n)$$

abe lauter ungleiche Factoren; man stelle den voll-

ſtändigen Werth von y durch einfache Integralformeln dar.

Auflöſung.

Seyen erſtlich alle einfachen Factoren des Ausdruckes P reell, nämlich

$$P = N(\alpha + z)(\beta + z)(\gamma + z) \ldots (\nu + z),$$

wobey die Anzahl der Factoren $= n$ iſt. Aus dem Vorhergehenden weiß man bereits, daß aus jedem dieſer Factoren ein Theil des Integrales entſtehe. Um nun dieſe Theile aufzufinden, entwickle man nachſtehende Werthe:

1) für $z = -\alpha$ ſey $\mathfrak{A} = \frac{P}{\alpha + z}$ oder $\mathfrak{A} = \frac{dP}{dz}$

2) » $z = -\beta$ » $\mathfrak{B} = \frac{P}{\beta + z}$ » $\mathfrak{B} = \frac{dP}{dz}$

3) » $z = -\gamma$ » $\mathfrak{C} = \frac{P}{\gamma + z}$ » $\mathfrak{C} = \frac{dP}{dz}$.

Da alſo

$$(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)(\delta - \alpha) \ldots (\nu - \alpha) = \frac{\mathfrak{A}}{N}$$

iſt, ſo wird der Buchſtabe N aus den obigen Ausdrücken durch Diviſion weggeſchafft werden, und das geſuchte Integrale wird ſeyn:

$$xy = \tfrac{1}{\mathfrak{A}} x^{-\alpha} \int x^{\alpha} X dx + \tfrac{1}{\mathfrak{B}} x^{-\beta} \int x^{\beta} X dx + \tfrac{1}{\mathfrak{C}} x^{-\gamma} \int x^{\gamma} X dx + \ldots$$

bis alle einzelnen Factoren in Anſpruch genommen worden ſind.

Wenn nun aber die Formel P imaginäre Factoren hat, ſo wird man die hieraus entſprungenen imaginären Theile auf folgende Weiſe auf eine reelle Form zurückführen können: Weil je zwey einfache imaginäre Factoren einen reellen doppelten Factor geben, ſo wollen wir

$$(\alpha + z)(\beta + z) = f^2 + 2fz \cos.\theta + z^2$$

ſetzen, ſo daß

$\alpha = f(\cos.\theta + \sqrt{-1} \sin.\theta)$ und $\beta = f(\cos.\theta - \sqrt{-1} \sin.\theta)$

wird, und daher beſtimme man zuerſt die Werthe der Größen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$; da aber jede derſelben aus dem Ausdrucke $\frac{dP}{dz}$ abgeleitet wird, und zwar der erſtere, wenn $z = -\alpha$, der letztere aber, wenn $z = -\beta$ geſetzt wird, ſo ſchreibe man in dem Ausdrucke $\frac{dP}{dz}$ ſelbſt durchaus

für z

$$-f(\cos.\theta \pm \sqrt{-1}\sin.\theta),$$

und es sey $\mathfrak{P} \pm \mathfrak{Q}\sqrt{-1}$ das Resultat, so ist einleuchtend, daß

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{P} + \mathfrak{Q}\sqrt{-1} \quad \text{und} \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{P} - \mathfrak{Q}\sqrt{-1}$$

seyn werde, wobey zu bemerken ist, daß $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ reelle Größen bezeichnen; da ferner

$$x^{m+n\sqrt{-1}} = x^m e^{n\sqrt{-1}lx} = x^m[\cos.(nlx) + \sqrt{-1}\sin.(nlx)]$$

ist, so wird man, wenn Kürze halber der Winkel $f\sin.\theta lx = \varphi$ gesetzt wird, finden:

$$x^{\alpha} = x^{f\cos.\theta}(\cos.\varphi + \sqrt{-1}\sin.\varphi);$$

$$x^{-\alpha} = x^{-f\cos.\theta}(\cos.\varphi - \sqrt{-1}\sin.\varphi);$$

$$x^{\beta} = x^{f\cos.\theta}(\cos.\varphi - \sqrt{-1}\sin.\varphi);$$

$$x^{-\beta} = x^{-f\cos.\theta}(\cos.\varphi + \sqrt{-1}\sin.\varphi);$$

wir werden daher für die beyden Theile

$$\frac{1}{\mathfrak{A}}x^{-\alpha}\int x^{\alpha}X\,dx + \frac{1}{\mathfrak{B}}x^{-\beta}\int x^{\beta}X\,dx$$

wegen

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{P}^2 + \mathfrak{Q}^2$$

erhalten:

$$+\frac{x^{-f\cos.\theta}}{\mathfrak{P}^2+\mathfrak{Q}^2}\left\{\begin{array}{l}(\mathfrak{P}-\mathfrak{Q}\sqrt{-1})(\cos.\varphi-\sqrt{-1}\sin.\varphi)\int x^{f\cos.\theta}(\cos.\varphi \\ \qquad +\sqrt{-1}\sin.\varphi)\,X\,dx \\ (\mathfrak{P}+\mathfrak{Q}\sqrt{-1})(\cos.\varphi+\sqrt{-1}\sin.\varphi)\int x^{f\cos.\theta}(\cos.\varphi \\ \qquad -\sqrt{-1}\sin.\varphi)\,X\,dx\end{array}\right\}$$

Dieser Ausdruck reducirt sich, weil die imaginären Theile sich tilgen, auf folgenden:

$$\frac{\left\{\begin{array}{l}2x^{-f\cos.\theta}(\mathfrak{P}\cos.\varphi - \mathfrak{Q}\sin.\varphi)\int x^{f\cos.\theta}X\,dx\cos.\varphi \\ +2x^{-f\cos.\theta}(\mathfrak{Q}\cos.\varphi + \mathfrak{P}\sin.\varphi)\int x^{f\cos.\theta}X\,dx\sin.\varphi\end{array}\right\}}{\mathfrak{P}^2+\mathfrak{Q}^2}.$$

Ein solcher Ausdruck erscheint jedesmahl in dem Integrale, so oft die Formel P einen trinomischen Factor von der Form

$$f^2 + 2fz\cos.\theta + z^2$$

enthält.

Zuſatz 1.

§. 1265. Obgleich aber einige der einfachen Factoren von P imaginär ſind, ſo wird dadurch die Entwicklung der reellen dennoch nicht geſtört; denn die Theile des Integrals, welche den einzelnen Factoren entſprechen, ſind von der Beſchaffenheit der übrigen Factoren ganz unabhängig.

Zuſatz 2.

§. 1266. Bisweilen läßt ſich der Theil des Integrals, welcher aus zwey imaginären Factoren oder aus einem trinomiſchen Factor entſteht, in einer geſchmeidigeren Form darſtellen, wenn man

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{O} \cos. \zeta \quad \text{und} \quad \mathfrak{Q} = \mathfrak{O} \sin. \zeta$$

ſetzt; denn auf dieſe Art wird jener Theil die Form erhalten:

$$\frac{2}{\mathfrak{O}} x^{-f \cos. \theta} [\cos. (\zeta + \varphi) \int x^{f \cos. \theta} X dx \cos. \varphi + \sin. (\zeta + \varphi) \int x^{f \cos. \theta} X dx \sin. \varphi],$$

wo ζ und θ conſtante Winkel bezeichnen, φ aber einen veränderlichen, weil $\varphi = f \sin. \theta lx$ iſt.

Aufgabe 173.

§. 1267. Wenn für die, im vorhergehenden Probleme vorgelegte Differenzialgleichung die aus ihr abgeleitete algebraiſche Größe P zwey gleiche einfache Factoren enthält; den hieraus ſich ergebenden Theil des Integrales aufzufinden.

Auflöſung.

In der früher aufgeſtellten Form

$$P = N (\alpha + z) (\beta + z) (\gamma + z) (\delta + z) \ldots$$

ſetzen wir alſo $\beta = \alpha$; weil aber dann beyde Theile des Integrales unendlich werden, deren einer mit dem Zeichen $+$, der andere aber mit dem Zeichen $-$ behaftet iſt, ſo daß beyde mit einander verbunden eine endliche Größe darſtellen, ſo wollen wir, um dieſelbe zu beſtimmen, $\beta = \alpha - \omega$ ſetzen, wobey ω eine verſchwindende Größe bezeichnet, und wir werden dann erhalten:

$$\mathfrak{A} = - N\omega (\gamma - \alpha) (\delta - \alpha) (\varepsilon - \alpha) \ldots \text{ und}$$
$$\mathfrak{B} = + N\omega (\gamma - \beta) (\delta - \beta) (\varepsilon - \beta) \ldots .$$

Nun ſetze man

$$\frac{P}{(\alpha+z)\,(\beta+z)} = \frac{P}{(\alpha+z)^2} = Q,$$

ſo daß

$$Q = N\,(\gamma+z)\,(\delta+z)\,(\varepsilon+z)$$

wird, ſo erhält man offenbar

$$\mathfrak{A} = -\omega Q \text{ für } z = -\alpha \text{ und}$$
$$\mathfrak{B} = +\omega Q \text{ » } z = -\beta = -\alpha+\omega.$$

Hieraus geht nun hervor, daß der letztere Werth von Q den erſtern um ſein Differenziale dQ übertreffe, wenn

$$z = -\alpha \text{ und } dz = \omega$$

geſetzt wird, ſo daß man hat

$$\mathfrak{B} = \omega\left(Q + \omega\frac{dQ}{dx}\right) \text{ für } z = -\alpha,$$

alſo

$$\frac{1}{\mathfrak{B}} = \frac{1}{\omega Q} - \frac{dQ}{Q^2\,dz} = \frac{1}{\omega Q} + \frac{1}{dz}\,d\cdot\frac{1}{Q},$$

wobey $\frac{1}{\mathfrak{A}} = -\frac{1}{\omega Q}$ iſt. Da aber dann

$$x^\beta = x^\alpha\,x^{-\omega} = x^\alpha\,(1-\omega lx) \text{ und}$$
$$x^{-\beta} = x^{-\alpha}\,(1+\omega lx)$$

wird, ſo werden die beyden geſuchten Theile des Integrales ſeyn:

$$-\frac{1}{\omega Q}x^{-\alpha}\int x^\alpha X dx + \left(\frac{1}{\omega Q}+\frac{1}{dz}d\cdot\frac{1}{Q}\right)x^{-\alpha}(1+\omega lx)\int x^\alpha X dx(1-\omega lx)$$

und weil ſich hier die Glieder, welche den Diviſor ω haben, tilgen, ſo ergibt ſich das Reſultat:

$$\frac{1}{Q}\,x^{-\alpha}\,(lx\int x^\alpha X dx - \int x^\alpha X dx\,lx) + \frac{1}{dz}\,d\cdot\frac{1}{Q}\,x^{-\alpha}\int x^\alpha X dx$$

oder

$$\frac{1}{Q}\,x^{-\alpha}\int\frac{dx}{x}\int x^\alpha X dx + \frac{1}{dz}\,d\cdot\frac{1}{Q}\,x^{-\alpha}\int x^\alpha X dx,$$

wenn man nämlich ſowohl in dem Werthe $\frac{1}{Q}$, als auch in dem Ausdrucke $\frac{1}{dz}\,d\cdot\frac{1}{Q}$ überall $-\alpha$ ſtatt z ſchreibt; weil aber $Q=\frac{P}{(\alpha+z)^2}$ iſt, ſo werden dieſe Werthe hieraus leicht gefunden.

Zusatz 1.

§. 1268. Wenn also die aus der vorgelegten Differenzialgleichung abgeleitete algebraische Größe P den quadratischen Factor $(\alpha + z)^2$ enthält, so gibt dieser zu dem Integrale folgenden Theil ab:

$$\frac{(\alpha+z)^2}{P} x^{-\alpha} \int \frac{dx}{x} \int x^\alpha X dx + \frac{1}{dz} d \cdot \frac{(\alpha+z)^2}{P} x^{-\alpha} \int x^\alpha X dx$$

wenn $z = -\alpha$ genommen wird. Wenn daher bloß $(\alpha + z)$ als Factor erschiene, so würde der entsprechende Theil des Integrales seyn:

$$\frac{\alpha+z}{P} x^{-\alpha} \int x^\alpha X dx \quad \text{für} \quad z = -\alpha.$$

Zusatz 2.

§. 1269. Da $Q = \frac{P}{(\alpha+z)^2}$ ist, so wird, wenn $z = -\alpha$ ist, $Q = \frac{d^2 P}{2 dz^2}$; weil aber hier der Größe z schon ein bestimmter Werth beygelegt ist, so läßt sich hieraus $\frac{dQ}{dz}$ nicht bestimmen, sondern man muß die erste Formel gebrauchen, aus welcher

$$\frac{dQ}{dz} = \frac{(\alpha+z)\, dP - 2P dz}{(\alpha+z)^3 dz}$$

gefunden wird, und weil sowohl der Zähler als der Nenner dieses Bruches für $z = -\alpha$ verschwindet, so wird man für denselben Fall erhalten:

$$\frac{dQ}{dz} = \frac{(\alpha+z) d^2 P - 2 dz dP}{3(\alpha+z)^2 dz^2} = \frac{(\alpha+z) d^3 P}{6(\alpha+z) dz^3} = \frac{d^3 P}{6 dz^3}.$$

Zusatz 3.

§. 1270. Hat man diesen Werth gefunden, so wird, weil die Größe $Q = \frac{d^2 P}{2 dz^2}$ ist, wenn $z = -\alpha$ genommen wird:

$$\frac{1}{dz} d \cdot \frac{1}{Q} = -\frac{dQ}{Q^2 dz} = -\frac{4 dz d^3 P}{3 (d^2 P)^2} \quad \text{oder}$$

$$\frac{1}{dz} d \cdot \frac{1}{Q} = \frac{2 dz}{3} d \cdot \frac{1}{d^2 P},$$

aus welchen Formeln die Theile des Integrales leichter bestimmt werden, wenn die Factoren von P nicht entwickelt dargestellt sind.

Aufgabe 174.

§. 1271. Wenn für die vorhergehende Differenzialgleichung die aus ihr abgeleitete algebraiſche Größe P den kubiſchen Factor $(\alpha + z)^3$ enthält, den hieraus ſich ergebenden Theil des Integrals aufzuſuchen.

Auflöſung.

Setzen wir alſo, es ſey

$$P = (\alpha + z)^2 (\gamma + z) R,$$

wobey $\gamma = \alpha - \omega$ iſt, und ω als eine verſchwindende Größe genommen wird. Die früher durch Q bezeichnete Größe wird demnach hier $Q = (\gamma + z) R$, und, wenn $z = -\alpha$ geſetzt wird, wird $Q = -\omega R$, wenn man in R ebenfalls $z = -\alpha$ nimmt; da ferner

$$\frac{dQ}{dz} = R + \frac{(\gamma + z)\, dR}{dz} = R - \frac{\omega\, dR}{dz}$$

iſt, ſo wird man für denſelben Fall erhalten:

$$\frac{1}{dz} d \cdot \frac{1}{Q} = -\frac{1}{\omega^2 R} + \frac{dR}{\omega R^2 dz} = -\frac{1}{\omega^2} \cdot \frac{1}{R} - \frac{1}{\omega\, dz} d \cdot \frac{1}{R}.$$

Aus dem quadratiſchen Factor $(\alpha + z)^2$ ergibt ſich demnach, dem vorhergehenden Probleme gemäß, folgender Theil des Integrals:

$$-\frac{1}{\omega R} x^{-\alpha} \int \frac{dx}{x} \int x^{\alpha} X dx - \left(\frac{1}{\omega^2 R} + \frac{1}{\omega\, dz} d \cdot \frac{1}{R}\right) x^{-\alpha} \int x^{\alpha} X dx;$$

deſſen Glieder wegen $\omega = 0$ beyde unendlich werden. Hierzu fügen wir aber noch den aus dem dritten Factor

$$\gamma + z = \alpha - \omega + z$$

entſtandenen Theil, welcher wegen

$$\frac{P}{\gamma + z} = (\alpha + z)^2 R$$

durch folgenden Ausdruck dargeſtellt wird:

$$\frac{1}{(\alpha + z)^2 R} x^{-\gamma} \int x^{\gamma} X dx,$$

wenn man

$$z = -\gamma = -\alpha + \omega$$

ſetzt. Wenn nun der Buchſtabe R wie vorher jenen Werth bezeichnet,

welcher durch die Substitution $z = -\alpha$ hervorgebracht wird, so muß man, indem man diesen Werth um die verschwindende Größe ω vermehrt, statt $\frac{1}{R}$ schreiben:

$$\frac{1}{R} + \frac{\omega}{dz} d \cdot \frac{1}{R} + \frac{\omega^2}{1.2\,dz^2} d^2 \cdot \frac{1}{R} + \ldots,$$

wenn wir nämlich den Werth $z = -\alpha$ auch hier beybehalten. Es wird demnach wegen $\alpha + z = \omega$ der entsprechende Theil des Integrales seyn:

$$\left(\frac{1}{\omega^1 R} + \frac{1}{\omega\,dz} \cdot d \cdot \frac{1}{R} + \frac{1}{2\,dz^2} \cdot d^2 \cdot \frac{1}{R} + \ldots\right) x^{-\alpha+\omega} \int x^{\alpha-\omega} X dx,$$

und so leuchtet nun ein, daß man jenen Werth von $\frac{1}{R}$ bis zur zweyten Potenz von ω hätte fortsetzen müssen; und es wird gut seyn, hier auch den andern Theil, welcher die Größe x enthält, nach demselben Gesetze auszudrücken. Hiebey bemerke ich, daß, wenn ein Ausdruck von der Form

$$x^{\omega} \int x^{-\omega} V dx$$

nach den Potenzen von ω zu entwickeln ist, dieß auf folgende Weise sehr bequem geschehen könne. Setzt man

$$v = x^{\omega} \int x^{-\omega} V dx,$$

so daß

$$x^{-\omega} v = \int x^{-\omega} V dx$$

ist, so wird man durch Differenziation erhalten:

$$dv - \frac{\omega v dx}{x} = V dx,$$

und daher wird man, wenn

$$v = T + \omega T' + \omega^2 T'' + \omega^3 T''' + \ldots$$

gesetzt wird, finden, indem die Glieder nach den Potenzen von ω geordnet werden:

$$\left.\begin{array}{l} dT + \omega dT' + \omega^2 dT'' + \omega^3 dT''' + \ldots \\ - V dx - \omega T \frac{dx}{x} - \omega^2 T' \frac{dx}{x} - \omega^3 T'' \frac{dx}{x} - \ldots \end{array}\right\} = 0$$

und daher

$$T = \int V dx; \quad T' = \int \frac{dx}{x} \int V dx; \quad T'' = \int \frac{dx}{x} \int \frac{dx}{x} \int V dx; \ldots$$

folglich wird, da bey der Anwendung $V = x^\alpha X$ ist, der aus dem Factor

$$\gamma + z = \alpha - \omega + z$$

entstandene Theil des Integrales seyn:

$$\left(\frac{1}{\omega^2 R} + \frac{1}{\omega\, dz}\, d\cdot\frac{1}{R} + \frac{1}{2\, dz^2}\, d^2\,\frac{1}{R} + ..\right) x^{-\alpha}\left(\int x^\alpha X dx + \omega \int \frac{dx}{x}\int x^\alpha X dx + \omega^2 \int \frac{dx}{x}\int \frac{dx}{x}\int x^\alpha X dx + ...\right).$$

Wird nun mit diesem Theile der aus $(\alpha + z)^2$ entstandene verbunden, so heben sich alle unendlichen Glieder gegenseitig auf, und für den kubischen Factor $(\alpha + z)^3$ der Größe $P = (\alpha + z)^3 R$ erscheint im Integrale folgender Theil:

$$\frac{1}{R} x^{-\alpha} \int \frac{dx}{x}\int \frac{dx}{x}\int x^\alpha X dx + \frac{dz}{x}\, d\cdot\frac{1}{R} x^{-\alpha} \int \frac{dx}{x}\int x^\alpha X dx + \frac{1}{2\, dz^2}\, d^2\cdot\frac{1}{R} x^{-\alpha}\int x^\alpha X dx,$$

wenn nur in der Größe $R = \frac{P}{(\alpha + z)^3}$ durchgehends $z = -\alpha$ gesetzt wird.

Zusatz 1.

§. 1272. Die bey der Auflösung dieses Problemes gebrauchte Methode läßt sich ohne Schwierigkeit auf beliebig viele gleiche Factoren ausdehnen; denn, wenn $(\alpha + z)^m$ erhoben ein Factor der Größe P wäre, und man setzt in dem Bruche $\frac{(\alpha + z)^m}{P}$, und seine Differenzialien, nach der Entwickelung $z = -\alpha$, so werden sich die hieraus entstandenen Theile des Integrals auf folgende Weise darstellen:

Factor der Größe P	$\alpha + z$	$(\alpha + z)^2$	$(\alpha + z)^3$
Integraltheil	$\frac{\alpha + z}{P} x^{-\alpha} \int x^{\alpha} X dx$	$\frac{(\alpha + z)^2}{P} x^{-\alpha} \int \frac{dx}{x} \int x^{\alpha} X dx$	$\frac{(\alpha + z)^3}{P} x^{-\alpha} \int \frac{dx}{x} \int \frac{dx}{x} \int x^{\alpha} X dx$
		$\frac{1}{dz} d . \frac{(\alpha + z)^2}{P} x^{-\alpha} \int x^{\alpha} X dx$	$\frac{1}{dz} d . \frac{(\alpha + z)^3}{P} x^{-\alpha} \int \frac{dx}{x} \int x^{\alpha} X dx$
			$\frac{1}{2 dz^2} d^2 . \frac{(\alpha + z)^3}{P} x^{-\alpha} \int x^{\alpha} X dx.$

Zusatz 2.

§. 1273. Wenn zwey oder mehrere doppelte Factoren einander gleich sind, so wird man, wenn

$$\alpha = f (\cos. \theta + \sqrt{-1} \sin. \theta) \quad \text{und} \quad \beta = f (\cos. \theta - \sqrt{-1} \sin. \theta)$$

gesetzt wird, die für die Potenzen $(\alpha + z)^2$ und $(\beta + z)^2$ abgesondert entwickelten Theile nach der oben gebrauchten Methode ohne Schwierigkeit verbinden, und auf einen reellen Ausdruck zurückführen können.

Anmerkung.

§. 1274. Eine ähnliche Methode, nach welcher wir dieses Kapitel behandelt haben, hätten wir auch bey der Entwickelung des dritten Kapitels gebrauchen sollen, und dann wären wir keineswegs der Gefahr, in Irrthümer zu gerathen, ausgesetzt gewesen; nun aber wäre es überflüssig, die dort begangenen Fehler hier zu verbessern, indem nicht allein die Methode ganz dieselbe wäre, sondern auch die hier behandelte Gleichung leicht in die dort betrachtete Form verwandelt werden kann und umgekehrt. Denn wenn man in der Gleichung des dritten Kapitels

$$X = Ay + \frac{B dy}{dx} + \frac{C d^2 y}{dx^2} + \frac{D d^3 y}{dx^3} + \frac{E d^4 y}{dx^4} + \ldots$$

$x = lv$, also $dx = \frac{dv}{v}$ setzt, die Function X aber übergeht in eine Function von v, welche wir V nennen wollen, so wird eine Gleichung von der hier behandelten Form zum Vorschein kommen. Da wir aber am angeführten Orte das Element dx als unveränderlich angesehen haben, so wollen wir, um diese Bedingung zu erfüllen,

$$dy = p\,dx, \quad dp = q\,dx, \quad dq = r\,dx, \quad dr = s\,dx$$

setzen, damit man folgende Gleichung erhalte:

$$X = V = Ay + Bp + Cq + Dr + Es + \ldots$$

Wenn wir aber jetzt wegen $dx = \frac{dv}{v}$ das Element dv als constant annehmen, so erhalten wir:

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{v\,dy}{dv}$$

$$q = \frac{dp}{dx} = \frac{v^2 d^2 y}{dv^2} + \frac{v\,dy}{dv}$$

$$r = \frac{dq}{dx} = \frac{v^3 d^3 y}{dv^3} + \frac{3 v^2 d^2 y}{dv^2} + \frac{v\,dy}{dv}$$

$$s = \frac{dr}{dx} = \frac{v^4 d^4 y}{dv^4} + \frac{6 v^3 d^3 y}{dv^3} + \frac{7 v^2 d^2 y}{dv^2} + \frac{v\,dy}{dv}$$

$$t = \frac{ds}{dx} = \frac{v^5 d^5 y}{dv^5} + \frac{10 v^4 d^4 y}{dv^4} + \frac{25 v^3 d^3 y}{dv^3} + \frac{15 v^2 d^2 y}{dv^2} + \frac{v\,dy}{dv};$$

es wird daher die zwischen v und y bestehende Gleichung seyn:

$$\begin{aligned} V = Ay &+ \frac{Bv\,dy}{dv} + \frac{Cv^2 d^2 y}{dv^2} + \frac{Dv^3 d^3 y}{dv^3} + \frac{Ev^4 d^4 y}{dv^4} + \frac{Fv^5 d^5 y}{dv^5} \\ &+ C + 3D + 6E + 10F \\ &+ D + 7E + 25F \\ &+ E + 15E \\ &+ F \end{aligned}$$

deren Integration wir hier gelehrt haben. Es ist aber besonders zu bemerken, daß die hieraus abzuleitende algebraische Größe

$$\begin{aligned} P = A &+ (B + C + D + E + F)(z - 1) \\ &+ (C + 3D + 7E + 15F)(z - 1)(z - 2) \\ &+ (D + 6E + 25F)(z - 1)(z - 2)(z - 3) + \ldots \end{aligned}$$

auf folgende Form zurückgeführt werden könne:

$$\begin{aligned} P = A + B(z - 1) + C(z - 1)^2 + D(z - 1)^3 \\ + E(z - 1)^4 + F(z - 1)^5 + \ldots \end{aligned}$$

Dieſe algebraiſche Größe iſt von jener, welche wir im dritten Kapitel bey der Integration benützt haben, nur dadurch unterſchieden, daß dort der Buchſtabe z dieſelbe Bedeutung hat, welche wir hier dem Ausdrucke z — 1 beygelegt haben; es wird daher auch die Integration der beyden Größen ſo beſchaffen ſeyn, daß ſich die eine auf die andere ſehr leicht zurückführen läßt.

Schluß des erſten Buches.

§. 1275. Dieß ſind beyläufig die Unterſuchungen, von welchen ich glaubte, daß ſie in das erſte Buch der Integralrechnung gehören, in welchem ich die Methode zu lehren verſuchte, Functionen einer einzigen Veränderlichen aus irgend einer gegebenen Beziehung der Differenzialien irgend einer Ordnung aufzufinden, und ich glaube dieſen Gegenſtand ſo behandelt zu haben, daß kaum etwas von den Leiſtungen, welche bisher von Andern über denſelben Gegenſtand aufgefunden und bekannt gemacht worden ſind, übergangen worden ſey.